

Geschichte.

Bohr, Harald: Die Vorlage einer neuen Ausgabe von Zeuthens Mathematikgeschichte. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 195—200 (1952) [Dänisch].

Ein Abdruck desselben Vortrages ist bereits in dies. Zbl. 36, 4 besprochen.

Dow, Sterling: Greek numerals. Amer. J. Archaeology 56, 21—23 (1952).

Brusotti, Luigi: I metodi di esaurizione nella storia della matematica. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 241—248 (1952).

Verf. zeigt in diesem Vortrag an Hand des von D. Gigli und L. Brusotti, Teoria della misura (in der Enciclopedia delle Matematiche elementari, herausgegeben von L. Berzolari, G. Vivanti und D. Gigli, Bd. II, 1, Mailand 1937, S. 119—174) beigebrachten Materials, daß, wie auf so vielen Gebieten der Mathematik, so auch bei den griechischen Inhaltsberechnungen gewissermaßen Vorahnungen der jüngsten Entwicklungen zu finden sind. So beschränkt sich Euklid im zwölften Buch der Elemente auf zu einem ersten Typ der sogenannten geometrischen Größen dritter Art (Gleichheit durch Zerlegung und Abschätzung) gehörende Inhalte, d. h. solche, bei denen die Größer-Kleiner-Beziehung auf die Gleichzerlegbarkeit einer Größe und eines Teils der anderen zurückführbar ist. Hierzu gehören ebene Flächen und Volumina. Erst Archimedes dehnte — neben der Inhaltsberechnung der Kugel und zahlreicher weiterer Körper sowie der Spiralenfläche — das Exhaustionsprinzip auf Größen des zweiten Typs, d. h. Bogenlängen und gekrümmte Oberflächen aus, nachdem es ihm gelungen war, auch für solche Größen (jedenfalls soweit sie konvex sind) Anordnungspostulate aufzustellen (Über Kugel und Zylinder Post. 1—4). — Auch in der Beweismethode bestehen Unterschiede: Euklid benutzt (wohl im Anschluß an Eudoxos) die Tatsache, daß die zu vergleichenden Größen beide die obere Grenze derselben Folge von bekannten Größen bilden, während Archimedes sie meist als Schnitt einander berührender Klassen stetiger Größen bestimmt. Ein zwingender Grund für diesen Verfahrenswechsel ist nicht bekannt. — Nach einem kurzen Überblick über die Schicksale der Exhaustionsmethode in späteren Zeiten, ihren allmählichen Ersatz durch die Infinitesimalrechnung und ihr Wiederaufblühen in den Schulen stellt der Verf. die Frage, ob es nicht an der Zeit sei, sie auch in der Schule durch den Begriff des bestimmten Integrals zu ersetzen. *H. I. Hermelink.*

Schmidt, Olaf: Some critical remarks about Autolycus' on risings and settings.

11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 202—209 (1952).

Eine sorgfältige, z. T. noch erweiterungsfähige mathematische Analyse führt den Verf. zu der Feststellung, daß die beiden Bücher der von den Mathematikhistorikern zu Unrecht lange vernachlässigten Schrift „Über Aufgang und Untergang der Gestirne“ zwei voneinander vollkommen unabhängige Abhandlungen darstellen, deren Inhalt sich weitgehend deckt. Auch sprachliche Beobachtungen sprechen übrigens für diese überraschende Entdeckung. Ein einziger wesentlicher Unterschied ist vorhanden: Buch II geht von der sehr stark idealisierten Voraussetzung aus, daß jeder Stern sichtbar sei, solange sich die Sonne mehr als 15° längs der Ekliptik gemessen, unter dem Horizont befindet; Buch I führt keine derartige Annahme ein, muß sich darum aber auf mehr qualitative Angaben über die Sichtbarkeitsverhältnisse der Gestirne beschränken. — Ein späterer Bearbeiter (Theodosius ?) hat offenbar die beiden Abhandlungen oberflächlich zu harmonisieren versucht; von ihm dürfte insbesondere der aus dem Rahmen fallende Beweis von I, 10 stammen. Die Hoffnung des Verf. auf eine Handschrift mit ursprünglicherem Textzustand hat sich nach der restlosen Aufklärung der Überlieferungsgeschichte durch J. Mogenet (Autolycus de Pitane, Louvain 1950, dies. Zbl. 41, 337) nicht erfüllt.

H. I. Hermelink.

Garrido, Jules: Les groupes de symétrie des ornements employés par les anciennes civilisations du Mexique. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1184—1186 (1952).

Verf. untersucht die Ornamente der vor-spanischen mexikanischen Kultur, die er aus fremden Publikationen und mit eigenen Photographien zusammengestellt

hat. Er verwendet dabei die Methoden der Kristallographie und der Gruppentheorie und ordnet sie nach den verschiedenen Symmetrietypen. Es handelt sich um Streifen- und Flächenornamente, die fortsetzbar sind, also einen unendlichen Rapport enthalten. Einige, z. T. recht komplizierte Muster werden reproduziert. Er konstatiert, daß keine Ebenengruppen mit Triglyren vorkommen (die namentlich in der arabischen Kunst häufig verwendet werden). Von den 17 ebenen Gruppen kommen nur 7 vor, aber es ist zu bemerken, daß die Elementarfiguren bei den angeführten Beispielen selber geometrische Eigenschaften aufweisen, die nicht mit der Gruppentheorie erfaßt werden und deren Ursprung wohl noch auf andere Prinzipien führen würde, z. B. Spiralen, ineinander gehängte Seile und vor allem seltsame Anordnungen von Quadraten (letzteres in der ersten Figur). *Andreas Speiser.*

● **Courtois, V.: Ai-Birunī. A life sketch.** (Indo-Iranica popular series, no. 1.) Calcutta: Iran Society 1952 42. p.

Natucci, A.: Leonardo geometra. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 89—103 (1952).

Die Arbeit enthält eine Mitteilung, die im Juni 1952 bei einer Versammlung der italienisch. Ges. f. d. Fortschritt d. Wiss. vorgetragen wurde. In der Einleitung hebt Verf. die Vielseitigkeit Leonardos da Vinci sowie seine besonderen Leistungen auf dem Gebiet der Naturwissenschaften hervor und berichtet kurz über seine diesbezüglichen Werke. Sodann wendet er sich den geometrischen Arbeiten Leonardos zu, die in seinen hinterlassenen Manuskripten, vor allem den berühmten Codices Atlantico (ambrosianische Bibliothek in Mailand) und Arundel (Britisches Museum in London) niedergelegt sind. Er unterscheidet nach den behandelten Themen sechs Gruppen: Flächenverwandlungen und Quadraturen, Untersuchungen über die Quadratur der Möndchen, Probleme über Körperverwandlung, Probleme, die mit dem Zirkel allein zu lösen sind und Konstruktion regelmäßiger Vielecke, Sätze über das Tetraeder und Schwerpunktuntersuchungen, verschiedene Gegenstände wie z. B. das sogenannte Problem von Alhazen (Ibn al Haitam, 965—1039), Betrachtungen über die Quadratur des Kreises, Konstruktion spezieller Kurven. Das Wesentliche dieser Arbeiten, bei denen es sich zum Teil um Erstentdeckungen oder grundlegende Erkenntnisse handelt, wird in modernisierter Form wiedergegeben. Dazwischen finden sich geschichtliche Hinweise, die zeigen, mit welchen Vorgängern Leonardo sich beschäftigt hat und welche Auswirkungen seine Gedanken und Entdeckungen hatten. Der Verf. weist auch darauf hin, daß Leonardo sich mit der Ersinnung und Konstruktion mathematischer Instrumente befaßt hat. Zum Schluß gibt er der Meinung Ausdruck, daß nach diesen neueren Forschungen das Urteil, das G. Loria über die Leistungen Leonardos auf dem Gebiet der Mathematik gefällt hat [Storia delle Matematiche vol. I, 450 (1929)], der Bedeutung seiner Arbeiten nicht gerecht werde. *E. Löffler.*

Battistini, Mario: Girolamo Cardano nel Belgio, nel 1552. Rivista Storia Sci. 42, 92—101 (1952).

Rosen, Edward: Galileo on the distance between the earth and the moon. Isis 43, 344—348 (1952).

Stipanić, Ernest: Un'osservazione alla storia d'un problema di geometria del triangolo. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 65—66 u. italienische Zusammenfassg. 66 (1952) [Kroatisch].

Larsen, L. Melchior: Zur Geschichte der Rechenkunst in Dänemark. Mat. Tidsskr. A 1952, 1—21 (1952) [Dänisch].

Verf. skizziert Entstehungsgeschichte und Inhalt der für ihre Zeit sehr beachtlichen Rechenbücher von C. T. Morsing (Köln 1528 ?, lat.), H. Veigere (Wittenberg 1552, dän.) und Cl. L. Skavbo (Paris ? 1552, dän.), wobei er auf viele interessante Einzelheiten eingeht. *J. E. Hofmann.*

● **Scott, J. F.: The scientific work of René Descartes (1596—1650).** London: Taylor and Francis, Ltd. 1952. X, 211 p. 21 s.

Erim, Kerim: Descartes. Mathematician & physicist. Pakistan J. Sci. 4, 57—60 (1952).

Allgemeine Übersicht über die Leistungen von Descartes, die jedoch nicht ganz mit der gegenwärtigen Auffassung übereinstimmt. *J. E. Hofmann.*

Koyré, Alexandre: An unpublished letter of Robert Hooke to Isaac Newton. *Isis* 43, 312—337 (1952).

1579/80 wechselten Newton und Hooke 7 Briefe, worin wichtige Vorfragen hinsichtlich des Gravitationsgesetzes behandelt wurden. 5 davon sind in W. W. R. Ball, *An essay on Newton's „Principia“* (London 1893) abgedruckt. Der 1904 aufgetauchte Brief Newtons vom 13. 12. 1679 ist aus der mit eingehenden Erläuterungen von J. Pelseneer versehenen Wiedergabe in *Isis* 12, 237—254 (1929) bekannt. Nunmehr legt Verf. den 1918 wiederaufgefundenen vorausgehenden Brief Hookes vom 9. 12. nebst Faksimile und musterhafter Darlegung der Vorgeschichte, des wesentlichen Inhaltes und der späteren Rückbeziehungen in Newtons Briefen an Halley (1686) vor. Darnach hat Newton wichtige Anregungen von Hooke empfangen; nur die volle mathematische Durchdringung des Gegenstandes gehört ihm allein.

J. E. Hofmann.

Conte, Luigi: *Elisse di Fagnano o di Huygens?* *Archimede* 4, 214—217 (1952).

Die häufig nach G. Fagnano (*Opere*, Bd. 2, Milano 1911, S. 293—313, 442—464) benannte Ellipse $2x^2 + y^2 = 2$ wurde schon 1659 von Huygens (*Oeuvres* XII, 225/29) bei Behandlung von Problemen bei gezeichnet vorliegendem Kegelschnitt verwendet.

J. E. Hofmann.

Conte, Luigi: *Vincenzo Viviani e l'invenzione di due medie proporzionali.* *Periodico Mat.*, IV. Ser. 30, 185—193 (1952).

Viviani verwendet im Quinto libro degli *Elementi* d'Euclide, Florenz 1674 zur Auflösung von $a:x = x:y = y:b$ neben dem Schnitt von $ay = x^2$, $bx = y^2$ bzw. $ay = x^2$, $xy = ab$ (Methoden von Menaichmos) auch den Schnitt der Geraden $at = by$ mit der geometrisch aus dem Kreis $t^2 + y^2 = bt$ erzeugten von ihm so genannten hyperbola mesolabica $ty^2 = b^3$.

J. E. Hofmann.

Sauvenier-Goffin, Elisabeth: *Note au sujet des manuscrits de H. Bosmans relatifs à Grégoire de Saint-Vincent.* *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 21, 301—302 (1952).

Tenca, Luigi: *Guido Grandi nelle sue relazioni coi Bolognesi.* *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis.*, X. Ser. 9, 49—60 (1952).

Saltykow, N.: *La vie et l'oeuvre de Elie Cartan.* *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 4, Nr. 3/4, 59—63 u. französ. Zusammenfassg. 63—64 (1952) [Serbisch].

Schmeidler, Werner: *Bericht über die Hamel-Feier anlässlich des Salzburger Mathematiker-Kongresses 1952.* *S.-Ber. Berliner math. Ges.* 1951/52, 27—34 (1952). Mit Schriftenverzeichnis.

● **Milne, E. A.:** *Sir James Jeans — a biography. With a memoir by S. C. Roberts.* London: Cambridge University Press 1952. XVI, 176 p. 21 s.

Sasaki, Shigeo: *Obituary note: Tadahiko Kubota (1885—1952).* *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 4, 318—322 (1952).

Mineo, Corradino: *In memoria di Gaspare Mignosi (5 gennaio 1875 — 11 giugno 1951).* *Matematiche* 7, III—XII (1952).

Mit Schriftenverzeichnis.

Štokalo, I. Z.: *M. V. Ostrogradskijs Arbeiten zur mathematischen Physik.* *Ukrain. mat. Žurn.* 4, 3—24 (1952) [Russisch].

Rybkin, G. F.: *Die materialistischen Züge der Weltanschauung M. V. Ostrogradskijs und seines Lehrers T. F. Osipovskij.* *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 2 (48), 123—144 (1952) [Russisch].

Signorini, Antonio: *Elenco cronologico delle pubblicazioni.* *Rivista Mat. Univ. Parma* 3, 301—306 (1952).

Sestini, G.: *Pietro Teofilo.* (28 agosto 1879—31 agosto 1952). *Rivista Mat. Univ. Parma* 3, 291—296 (1952).

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● Clark, J. T.: *Conventional logic and modern logic. With a preface by W. V. Quine.* Woodstock, Md.: Woodstock College Press 1952. VII, 109 p.

Durch diese Publikation hat der Verf. der vorliegenden Studie sich in die vorderste Reihe der scholastisch orientierten Vorkämpfer der mathematischen Logik gestellt. Auf eine durchaus originelle Art legt er eine Folge vor von nicht-trivialen Probestücken von Aristoteles bis zu Wilhelm Ockham, aus denen sich ein Doppeltes ergibt: (1) wie die aristotelisch-scholastische Logik der mathematischen Logik vorgearbeitet hat, (2) wie sie an den mannigfaltigsten Stellen über sich selbst hinausweist auf eine Logik, durch die sie im Sinne der mathematischen Logik ergänzt, präzisiert und berichtigt wird. Der Verf. hat die mathematische Logik bei W. V. Quine in Harvard studiert. Es ist ihm in einem vorbildlichen Sinne gelungen, die Sprache der Alten in die symbolische Sprache der mathematischen Logik zu übertragen. Prof. Quine, in der Vorrede, die er zu dieser Studie verfaßt hat, bekennt sich zu diesem Urteil, indem er sagt: „By his apt translations of ancient and medieval passages into the technical terminology of current logic, Father Clark brings our remote predecessors so convincingly up to date that we feel we have been listening to them — Chrysippus, Aquinas, Peter of Spain, and the rest — in a Harvard logic seminar.“ Der Verf. wendet sich zwar zunächst an seine scholastischen Kollegen; es scheint mir jedoch, daß seine Studie mindestens ebenso lehrreich ist für den mathematischen Logiker, der nicht nur an sich selber denkt, sondern auch an den größeren Raum, in den er mit seiner Arbeit hineingestellt ist. Sehr wertvoll ist ein p. 61–98 umfassender bibliographischer Anhang, der nicht nur ein Schrifttum zusammenstellt, das man sonst so nicht antreffen wird, sondern jedes Stück mit einer kritischen Würdigung begleitet, die mir vorbildlich zu sein scheint. Mehrere Indices erleichtern den Gebrauch für den Leser, der bestimmte Informationen sucht.

H. Scholz.

● Linsky, L. (edited by): *Semantics and the philosophy of language.* Urbana: University of Illinois Press 1952. IX, 189 p. \$ 3,75.

● Berkeley, Edmund C.: *Symbolic Logic. Twenty problems and solutions.* New York: Edmund C. Berkeley and Associates 1952. II, 28 p. mimeographed.

Hesse, Mary B.: *Boole's philosophy of logic.* Ann. of Sci. 8, 61–81 (1952).

Wright, G. H. von: *Interpretation of modal logic.* Mind, n. Ser. 61, 165–177 (1952).

Rose, Alan: *An extension of computational logic.* J. symbolic Logic 17, 32–34 (1952).

Verallgemeinerung der für den klassischen Aussagenkalkül von Levin (dies. Zbl. 35, 5) angegebenen Methode auf die dreiwertige Logik von Lukasiewicz.

H. Hermes.

Rose, Alan: *A formalisation of Post's m -valued propositional calculus.* Math. Z. 56, 94–104 (1952).

Verf. gibt mit 10 Axiomen eine Axiomatisierung der m -wertigen Logik mit den Werten $1, \dots, m$ und dem ausgezeichneten Wert 1 unter Zugrundelegung der Postschen Funktoren $\sim x = x + 1 \pmod{m}$, $x \vee y = \min(x, y)$. Dabei verwendet er u. a. als Axiom $((x \rightarrow y) \rightarrow z \vee (u \vee v)) \rightarrow ((u \rightarrow x) \rightarrow z \vee (v \vee x))$ mit $x \rightarrow y =_d \sim x \vee y$, und benutzt ein Resultat von Meredith (unpubliziert), daß aus diesem Axiom alle identischen Formeln des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls in den Funktoren \sim, \vee folgen. Schlußregeln sind wie üblich die Einsetzungs- und Abtrennungsregeln.

H. Hermes.

Rose, Alan: *The degree of completeness of the m -valued Lukasiewicz propositional calculus.* J. London math. Soc. 27, 92–102 (1952).

L sei ein System eines den Forderungen von J. Lukasiewicz genügenden m -wertigen Aussagenkalküls in \sim und \rightarrow . Es seien also die L -Werte bestimmt durch die zwischen 0 und 1 mit Einschließung der Grenzen liegenden Zahlen $i/(m-1)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$), und für \sim und \rightarrow soll folgendes gelten; Ist H mit x , Θ mit y bewertet (H, Θ L -Ausdrücke), so soll $\sim H$ mit $1-x$, $H \rightarrow \Theta$ mit dem Minimum von 1 und $1-x+y$ bewertet sein. Die L -Ausdrücke, die für jede Bewertung der in ihnen vorkommenden Aussagenvariablen auf Grund der Bewertungstafeln für \sim und \rightarrow einen ausgezeichneten Wert annehmen, sollen „ L -Identitäten“ heißen. Mit Bezug auf eine endliche Menge M_0 von L -Identitäten soll die Menge der L -Sätze die kleinste M_0 umfassende Menge von L -Ausdrücken sein, die abgeschlossen ist in bezug auf Einsetzung und Abtrennung. In bezug auf Abtrennung mit der zusätzlichen Forderung, daß die ausge-

zeichneten L -Werte so bestimmt sein sollen, daß mit H und $H \rightarrow \Theta$ stets auch Θ einen ausgezeichneten Wert annimmt (in Übereinstimmung mit dem Effekt einer verwickelteren Forderung des Verf., die nicht unmittelbar, sondern erst indirekt auf \rightarrow Bezug nimmt). Die Menge der L -Sätze soll mit der Menge der L -Identitäten zusammenfallen. — In einer ersten Arbeit (dies. Zbl. 41, 149) hat der Verf. für einen nicht aus M_0 ableitbaren L -Ausdruck gezeigt, daß aus $M_0 \cup \{H\}$ jeder L -Ausdruck abgeleitet werden kann genau dann, wenn H nicht eine Identität des zweiwertigen Aussagenkalküls ist. In einer zweiten Arbeit (dies. Zbl. 41, 149) hat er für den Fall, daß $m - 1$ eine Primzahl ist, gezeigt, daß der Vollständigkeitsgrad von L (die Anzahl der L uneigentlich oder echt umfassenden Systeme) 3 ist. In der vorliegenden Arbeit wird der Vollständigkeitsgrad von L für den allgemeinen Fall bestimmt. Es kommt heraus die Anzahl $d(m - 1) + 1$, wo $d(x)$ die Zahl der Divisoren von x (mit Einschließung von 1 und x), was für den Primzahlcharakter von $m - 1$ in das vorangehende Ergebnis übergeht. Es wird zusätzlich gezeigt, daß das neue Resultat auch dann erhalten bleibt, wenn die in der Formulierung des Verf. vorausgesetzte Abtrennungsregel ersetzt wird durch eine andere, die gleichfalls erst indirekt, aber in einem anderen, durch E. L. Post bestimmten Sinne auf \rightarrow Bezug nimmt. H. Scholz.

Rose, Alan: Sur un ensemble de fonctions primitives pour le calcul des prédicats du premier ordre lequel constitue son propre dual. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1830—1831 (1952).

Church und Post haben den klassischen Aussagenkalkül mit Hilfe der in gewisser Hinsicht selbstdualen bedingten Disjunktion aufgebaut (dies. Zbl. 34, 391). Verf. (dies. Zbl. 42, 7) hat die Methode auf den m -wertigen Aussagenkalkül erweitert; dabei wird die bedingte Disjunktion verallgemeinert zur Operation $[p, q_1, \dots, q_m, p]$. In der vorliegenden Note wird das Verfahren auf den Prädikatenkalkül ausgedehnt. Dabei erscheint als neues Symbol (unter einschränkenden Bedingungen für die freien Individuenvariablen)

$$(*) \quad \{x\} \{p, r(x), q_1, \dots, q_{m-2}, s(x), p\} \{x\},$$

das mit $[p, \forall x r(x), q_1, \dots, q_{m-2}, \exists x s(x), p]$ gleichbedeutend ist. Man erhält ein vollständiges und unabhängiges Funktionensystem, in welchem die zu (*) duale Formel die Gestalt $\{x\} \{p^*, s^*(x), q_{m-2}^*, \dots, q_1^*, r^*(x), p^*\} \{x\}$ annimmt, wobei die gesternten Ausdrücke zu den ungesternten dual sind. H. Hermes.

Quine, W. V.: On an application of Tarski's theory of truth. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 430—433 (1952).

Aus den grundlegenden Untersuchungen Tarskis zum Wahrheitsbegriff kann man folgern, daß für das System L der *Mathematical logic* von Quine die Wahrheit für L in einer reicheren Sprache L' , die außer L noch die elementare Syntax (Proto-syntax) von L enthält, nicht definiert werden kann, falls L widerspruchsfrei ist. Verf. zeigt, daß man in Anlehnung an Tarski in L' eine Art induktive Definition (die über den Formelaufbau fortschreitet) für die Erfüllbarkeit (und damit auch für die Wahrheit) für L geben kann. Man gibt dabei die Intuitionen nur dann richtig wieder, wenn man zuläßt, daß auch Nicht-Elemente zur Interpretation verwendet werden. Der allgemeine Tarskische Satz zeigt, daß man (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit in L) die induktive Definition der Erfüllbarkeit für L nicht in L' in eine explizite Definition verwandeln kann. Das allgemeine Fregesche Verfahren, das man versuchen könnte anzuwenden, führt nicht zum Ziele, da es bei der Struktur des Quineschen Systems die Nichtelemente nicht berücksichtigt. H. Hermes.

Quine, W. V.: The problem of simplifying truth functions. Amer. math. Monthly 59, 521—531 (1952).

Es ist bekannt, daß der klassische Aussagenkalkül in \sim, \wedge, \vee ein unentbehrliches Hilfsmittel geworden ist für die theoretische Beherrschung der elektrischen Schaltungen. Die in Frage kommenden Kalkülausdrücke (H, Θ) können als Normalformeln vorausgesetzt werden. Mit der Festsetzung, daß π eine beliebige Aussagevariable andeuten soll, erhält man eine Normalformel aus einer alternativen Normalform, indem man die mit π und $\sim \pi$ besetzten Alternativglieder streicht und die übrigen so komprimiert, daß π oder $\sim \pi$ jeweils nur genau einmal in ihnen vorkommen. H soll Θ genau dann implizieren, wenn es keine simultane Bewertung der Aussagevariablen in H und Θ gibt, die H verifiziert, Θ falsifiziert. Zwei Formeln sollen äquivalent heißen, wenn sie sich gegenseitig implizieren. Für die Auswertung des Aussagenkalküls im Dienst der

Schaltungen ist es wesentlich, daß es gelingt, zu jeder Normalformel, die eine Schaltungsapparatur repräsentiert, ein möglichst einfaches Äquivalent (vom Charakter einer Normalformel) zu finden. Das kann in unbequemen Fällen so viel Arbeit und Mühe kosten, daß der Stab des Computation Laboratory of Harvard University ein eigenes Hilfsbuch mit ausgearbeiteten Umformungsverfahren und Tabellen mit den einfachsten Äquivalenten für Normalformeln in nicht mehr als vier Variablen zur Entlastung der Beteiligten herausgebracht hat [Synthesis of Electronic Computing and Control Circuits (Ann. Comput. Labor. Harvard Univ. 27) Cambridge, Mass., 1952]. Hierdurch angeregt hat Quine sich um ein möglichst einfaches Verfahren zur Auffindung der gesuchten Äquivalente bemüht. Dies ist ihm auch gelungen für den Fall, daß es nur darauf ankommt, die vorgegebene Normalformel von überzähligen Bestandteilen zu befreien. Es gibt aber auch Fälle, in denen eine solche Reduktion noch nicht ein einfachstes Äquivalent liefert. Man rechnet z. B. leicht aus, daß die in jedem Falle einfacheren Normalformeln $p \wedge q \vee \sim p \wedge r \vee q \wedge \sim r$ und $\sim p \wedge q \vee p \wedge \sim r \vee q \wedge r$ äquivalent sind mit $p \wedge \sim q \vee \sim p \wedge q \vee q \wedge \sim r \vee \sim q \wedge r$. Hier versagt die angegebene Methode. Quine hat zwar auch noch für diesen Fall ein Verfahren angeben können; aber dieses Verfahren ist so umständlich, daß er selbst die Auffindung einer Methode für wünschenswert hält, die wesentlich schneller zum Ziele führt. *H. Scholz.*

Shaw-Kwei, Moh: A note on the theory of quantification. *J. symbolic Logic* 17, 243—244 (1952).

H, Θ seien Ausdrücke des engeren Prädikatenkalküls der ersten Stufe (PK), *Gen* (H) — die Generalisierte von H — die Abschließung von H durch Generalisierung der in H frei vorkommenden Variablen, „ $\vdash H$ “ eine Abkürzung für die metasprachliche Feststellung, daß H ein Satz ist. Mit diesen Voraussetzungen kann das bemerkenswerte Resultat dieser Note so formuliert werden: Man setze die entscheidbare Menge der Identitäten des einstelligen PK als Axiomenmenge voraus. Dann genügen für eine Gewinnung des vollen PK die folgenden Regeln: (1) die Einsetzungsregel für die Prädikatenvariablen (wie in Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik II, Berlin 1939, S. 377 f.; dies. Zbl. 20, 193), (2) die Abtrennungsregel in einer der beiden folgenden Gestalten: (a) Wenn $\vdash \text{Gen}(H)$ und wenn $\vdash \text{Gen}(H \rightarrow \Theta)$, so $\vdash \text{Gen}(\Theta)$; (b) Wenn $\vdash H$ und wenn $\vdash H \rightarrow \Theta$, so $\vdash \Theta$. *H. Scholz.*

Izumi, Yoshihisa: Über den Begriff der ω -Vollständigkeit. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 4, 314—315 (1952).

The author makes two comments on ω -consistency; the first is an immediate consequence of results of Tarski; the proof of the second contains a logical error.

J. C. Shepherdson.

Kalmár, László: Reduction of the decision problem to the satisfiability question of logical formulae on a finite set. *C. r. I. Congr. Math. Hongr.* 1950, 163—188, russische und engl. Zusammenfassgn. 189, 190 (1952) [Ungarisch].

Berezki, Ilona: Lösung eines Markovschen Problems betreffs einer Ausdehnung des Begriffes der elementaren Funktion. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 3, 197—218 (1952).

Arithmetische Funktionen sind solche, deren Argumente und Werte nicht-negative ganze Zahlen sind. Elementare Funktionen sind die arithmetischen Funktionen, die aus den Funktionen $x + y$, $x \cdot y$, $|x - y|$, $\left[\frac{x}{y}\right]$ und 1 durch Substitutionen und Anwendungen der Opera-

tionen \sum^n und \prod^n entstehen. Jede elementare Funktion ist bekanntlich primitiv-rekursiv. Die Umkehrung gilt, wie Verf. in einer früheren Arbeit gezeigt hat, nicht. — Sei K eine Klasse arithmetischer, I eine Klasse zweistelliger arithmetischer Funktionen. Dann soll $E(K, I)$ die kleinste Klasse sein, für die gilt: (1) $K \subseteq E$, (2) E ist abgeschlossen in bezug auf Substitutionen, (3) Ist $\alpha(x_1, \dots, x_r)$ aus E , $\beta(x, y)$ aus I , so gehört die durch $\varphi(0, x_1, \dots, x_r) = \alpha(x_1, \dots, x_r)$, $\varphi(n+1, x_1, \dots, x_r) = \beta(\varphi(n, x_1, \dots, x_r), \alpha(x_1, \dots, x_r))$ definierte Funktion zu E . — Die Funktionen aus I werden also als Iterationsfunktionen benutzt. Besteht z. B. K aus den Funktionen $x + y$, $x \cdot y$, $|x - y|$, $\left[\frac{x}{y}\right]$ und 1, I aus den Funktionen $x + y$ und $x \cdot y$, so ist $E(K, I)$ die Klasse der elementaren Funktionen. Verf. zeigt: (1) Läßt man für K und I nur endlich viele primitiv-rekursive Funktionen zu, so umfaßt E , wie im Falle der elementaren Funktionen, nicht alle primitiv-rekursiven Funktionen (Vermutung von Markov). (2) Läßt man im Beispiel der elementaren Funktionen aus I die Produktbildung fort, so gehört die Potenz nicht mehr zu E (Vermutung von Egerváry). Beides ergibt sich aus dem Hauptsatz der Verf., der besagt, daß, wenn die Funktionen der Klassen K und I durch bestimmte primitiv-rekursive Funktionen

majorisiert werden können, eine ähnliche Majorisierung auch für die Funktionen der Klasse $E(K, I)$ gilt. Durch ein Diagonalverfahren folgt daraus unmittelbar (1), durch Betrachtung spezieller Majoranten (2). Zur Majorisierung wird die durch $a \bigtriangledown^0 b = b + 1$, $a \bigtriangledown^{m+1} 0 = a$, falls $m = 0$, bzw. $= 0$, falls $m = 1$, bzw. $= 1$, falls $m > 1$, $a \bigtriangledown^{m+1} (b + 1) = a \bigtriangledown^m (a \bigtriangledown^{m+1} b)$, definierte Funktion benutzt. Ihre wesentlichen Eigenschaften, auf die der Hauptsatz über eine Reihe von

Hilfssätzen zurückgeführt wird, sind: (a) Für jedes feste m ist $x \bigtriangledown^m y$ primitiv rekursiv. (b) Für jede primitiv-rekursive Funktion $f(x_1, \dots, x_r)$ gibt es Zahlen m, k , so daß f durch $\max(3, x_1, \dots, x_r) \bigtriangledown^m k$ majorisiert wird. (c) Für jede zweistellige primitiv-rekursive Funktion $g(x, y)$ gibt es ein p ,

so daß g durch $\max(3, x) \bigtriangledown^p \max(3, y)$ majorisiert wird. — (b) und (c) folgen aus einem ähnlichen Satz von R. Péter (R. Péter, Rekursive Funktionen, Budapest 1951, S. 68—73, dies. Zbl. 43, 248). — Errata: S. 206, Z. 4 v. o. muß es $a \bigtriangledown^{m+2} b \geq a \bigtriangledown^{m+1} b$ heißen; S. 210, Z. 11 v. o. muß $2 \bigtriangledown^m 4$ statt $2 \bigtriangledown^{m+1} 4$ stehen.

W. Markwald.

Péter, Rózsa: Transfinite Rekursionen. (Grundlagenforschung und rekursive Funktionen). C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 419—426, russische und deutsche Zusammenfassgn. 427, 427—428 (1952) [Ungarisch].

Es wird gezeigt, wie eng die Geschichte der mathematischen Grundlagenforschung verbunden ist mit der Untersuchung der von Ackermann eingeführten transfiniten Rekursion. Durch transfinite Rekursion definieren wir eine arithmetische Funktion, wenn wir ihren Wert $\varphi(n)$ mit Hilfe solcher Werte angeben, die in einer gewissen Wohlordnung der natürlichen Zahlen vor n stehen. Es zeigt sich, daß die k -fachen (d. h. nach k Argumenten gleichzeitig veränderlichen) Rekursionen und die transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k sich aufeinander zurückführen lassen. Das ermöglicht, durch Anwendung des mengentheoretischen Diagonalverfahrens nicht-mehrfach-rekursive Funktionen zu konstruieren, die einfacher sind als die Ackermannschen Beispiele. Daraus erkennt man, daß Rekursionen vom Typus ω^ω über die Klasse der mehrfach-rekursiven Funktionen hinausführen.

Autoreferat.

Kreisel, Georg: Some concepts concerning formal systems of number theory. Math. Z. 57, 1—12 (1952).

Sei \mathfrak{F} das System Z_μ [Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. 2, Berlin 1939 (dies. Zbl. 20, 193), p. 293] zuzüglich aller verifizierbaren Formeln (mit freien Variablen) der Zahlentheorie als Axiome und sei F ein System, das eben diese genannten Formeln als Axiome enthält, ferner ordinale rekursive Funktionen endlicher Ordnung (vgl. dies. Zbl. 44, 4; 46, 7, in der dort ref. Arb. § 35, oder auch Hilbert-Bernays, l. c., p. 360ff.), und schließlich (als deduktiven Teil) den elementaren Kalkül mit freien Variablen umfaßt. Eine finite (vollständige disjunktive) Interpretation von \mathfrak{F} durch F besteht in der Angabe einer quasirekursiven Funktion $g(n, a)$, a Gödelnummer einer Formel \mathfrak{A} aus \mathfrak{F} , $g(n, a)$ Gödelnummer einer Formel A_n aus F , so daß \mathfrak{A} in \mathfrak{F} dann und nur dann beweisbar bzw. widerlegbar ist, wenn ein in F verifizierbares A_n gefunden werden kann, bzw. solche Einsetzungen für die Variablen für jedes A_n angegeben werden können, daß A_n falsch wird. \mathfrak{F} heißt extern widerspruchsfrei (ext. wf.) bezüglich einer Klasse \mathfrak{C} von Funktionen $f_1(a_1), \dots, f_n(a_1, \dots, a_n)$, wenn \mathfrak{F} , falls $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ primitiv rekursiv und $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n, f_1(a_1), \dots, f_n(a_1, \dots, a_n))$ verifizierbar ist, bei Hinzunahme der Formel $(x_1)(E y_1) \dots (x_n)(E y_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ als Axiom wf. bleibt. Speziell wird unter \mathfrak{C} im folgenden die Klasse der quasirekursiven Funktionen verstanden (unter Verwendung der Darstellung in Hilbert-Bernays, l. c., p. 410ff.). Ein System wird im schwachen Sinne ω -wf. genannt, wenn man, falls $(E x) \mathfrak{A}(x)$ beweisbar ist, eine Zahl n so finden kann, daß $\neg \mathfrak{A}(n)$ nicht beweisbar ist. — Verf. gibt einen weiter vereinfachten Beweis (vgl. dies. Zbl. 50, 6), daß \mathfrak{F} eine finite Interpretation in F hat und zeigt die Äquivalenz zwischen ext. Wf.-heit und Existenz einer finiten Interpretation, sowie, daß aus der ω -Wf.-heit die ext. Wf.-heit folgt, falls in dem betrachteten System die Funktionen aus \mathfrak{C} vertretbar sind. Die Umkehrung gilt nicht, wie durch ein Gegenbeispiel (mit Hilfe des Gödelschen Diagonalverfahrens) gezeigt wird. Gert H. Müller.

Götlind, Erik: A note on Chwistek and Hetper's foundation of formal mathematics. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 268—270 (1952).

Es wird gezeigt, daß ein Nominalismus, der die Mathematik oder genauer eine mathematische Theorie mit einer ihrer möglichen Formalisierungen identifiziert, also eine Unterscheidung zwischen Zeichen und Bezeichnetem grundsätzlich ablehnt, auf Aporien stößt, aus denen sich seine Unzulässigkeit oder mindestens seine Unzulänglichkeit ergibt.

H. Scholz.

Britzelmayr, Wilhelm: Logisch-philosophische Bemerkungen zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitslehre. Mitteil.-Bl. math. Statistik 4, 167—172 (1952).

Delevsky, J.: La philosophie des paradoxes mathématiques. *Revue philos.* 1952, 196—222 (1952).

Erim, Kerim: The foundations of mathematics. *Pakistan J. Sci.* 4, 139—143 (1952).

Ridder, J.: Art und Struktur der Mathematik. *Euclides*, Groningen 27, 271—291 (1952) [Holländisch].

Der Arbeit liegt eine Rede zugrunde, die Verf. bei der Übernahme einer Professur an der Universität Groningen gehalten hat. Er versucht, seinen überwiegend nichtmathematisch vorgebildeten Zuhörern eine Vorstellung vom Wesen und von der Struktur der Mathematik zu geben. Er tut dies in der Weise, daß er an Hand der geschichtlichen Entwicklung vom Altertum bis zur Gegenwart zeigt, wie sich mathematische Begriffe und Methoden entwickelt und wie sich die erkenntnistheoretischen Vorstellungen vom Wesen der Mathematik allmählich gewandelt haben. Dabei werden zahlreiche charakteristische Beispiele, insbesondere aus dem Forschungsgebiet des Verf., herangezogen, und viele große Namen aus der Geschichte der Mathematik erwähnt. Für den Mathematiker und den Historiker der Mathematik bringt die Arbeit nichts Neues; aber sie ist geeignet, dem gebildeten Laien das Wesen dieser Wissenschaft nahezubringen. — Den Geist, aus dem die Abhandlung geschrieben ist, erkennt man, wenn ich einige Sätze aus dem Schlußabsatz anführe: „Auf jeden, der mit Plato und Kant in der Mathematik eine absolute Wissenschaft, eine Wissenschaft ewiger Wahrheiten zu sehen wünscht, müssen meine Betrachtungen ernüchternd wirken. Überall findet man in der Mathematik Relativierungen. Wer sich ihrem Studium widmet, muß die Tugend der Bescheidenheit lernen . . . Nicht eine Geometrie, nicht eine Analysis, nicht eine Logik, stehen zu seiner Verfügung, sondern viele . . . Die Mathematik . . . ist nicht mehr die Lehre von den stetigen und unstetigen Größen. . . Abstrakte Algebra, Mengenlehre, abstrakte Räume, symbolische Logik zeigen uns Gebiete, in denen die natürliche Zahl keine beherrschende Rolle mehr spielt, vielmehr die Struktur von Beziehungen den Hauptgegenstand der Untersuchung bildet. Gerade dadurch ist die Möglichkeit der Anwendung mathematischer Methoden auf außermathematische Gebiete ausgedehnt worden, in denen Maß und Zahl nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die neuere Entwicklung hat der „Königin der Wissenschaften“ ihren Ehrentitel nicht genommen, sondern ihn in einem Sinne bekräftigt, an den Gauß, der Schöpfer dieses Namens, sicher nicht dachte.“ *E. Löffler.*

Wilder, R. L.: The cultural basis of mathematics. *Proc. Internat. Congr. Math.* (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 258—271 (1952).

Ott, K.: Zahlen- oder Größengleichung? *Elemente Math.* 7, 80—85 (1952).

Ob eine physikalische Gleichung eine Gleichung zwischen Zahlen oder „Größen“ sei, diese Frage sucht Verf. zugunsten der Größen zu entscheiden. Zu diesem Zweck axiomatisiert Verf. den Begriff der „Größen gleicher Art“, die zusammen eine „meßbare Menge“ bilden; offenbar will Verf. darunter die Menge der positiven Vektoren eines total (= einfach) und Archimedisches geordneten Vektorraumes über dem Körper der reellen Zahlen verstanden wissen. Leider muß diese Axiomatisierung als mathematisch unbefriedigend angesehen werden; weder ist das vom Verf. angegebene Axiomensystem unabhängig, noch vollständig (insofern sich nicht alle vom Verf. behaupteten Folgerungen aus seinen Axiomen herleiten lassen). — Die Arbeit schließt mit den Worten: „Überblicken wir noch einmal den Gedankengang, so erscheint die Größengleichung als das Ursprüngliche. Der Psychologe, Genetiker und Erkenntnistheoretiker wird vielleicht geneigt sein, zu sagen, wir rechnen mit Zahlen wie mit Größen — und nicht umgekehrt. Doch das geht über die in der Mathematik übliche Analyse der Relationensysteme auf Grund einer a priori gegebenen Logik hinaus.“ *Jürgen Schmidt.*

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen:

• **Hasse, Helmut und Walter Klobe:** Aufgabensammlung zur höheren Algebra. 2. verb. und vermehrte Aufl. (Sammlung Götschen Bd. 1082.) Berlin: W. de Gruyter & Co. 1952. 181 S. geh. DM 2.40.

Besprechung s. dies. Zbl. 45, 152.

• **Kuroš, A. G.:** Lehrgang der höheren Algebra. 3. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 335 S. 10,90 R. [Russisch].

Es handelt sich um ein Lehrbuch der Algebra für Studenten des 1. Studienjahres. Neben den Grundbegriffen der abstrakten Algebra wird die lineare Algebra eingehend behandelt. Daneben enthält das Buch eine Darlegung der grundlegenden Sätze über Wurzeln von Polynomen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Da

sich das Buch an Anfänger richtet, illustriert der Verf. alle wichtigen allgemeinen Sätze durch eine Reihe von Beispielen. Das Buch ist mit großem pädagogischen Geschick geschrieben. Die folgenden Kapitel-Überschriften mögen eine Übersicht über den Inhalt des Werkes geben: I. Körper. Komplexe Zahlen, II. Determinanten, III. Algebra der Matrizen, IV. Systeme linearer Gleichungen, V. Quadratische Formen, VI. Polynome über beliebigen Körpern, VII. Polynome von mehreren Unbestimmten, VIII. Polynome mit reellen und komplexen Koeffizienten, IX. Polynome mit rationalen Koeffizienten, X. Gruppen und Algebren.

L. Kaloujnine.

Stojakovic, Mirko: Sur les déterminants des matrices rectangulaires. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 303—305 (1952).

Der Inhalt deckt sich, abgesehen von zahlreichen Druckfehlern, im wesentlichen mit der deutschen Zusammenfassung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **47**, 20). Vgl. auch das Referat über eine spätere Note des Verf. (dies. Zbl. **50**, 10).

E. Schönhardt.

Mikusiński, J. G.-: Sur un déterminant. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 27—29 (1952).

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ seien natürliche Zahlen. Ferner werde die aus den Elementen $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ in dieser Reihenfolge gebildete Spalte einer n -reihigen Determinante mit (x) , die λ -te Ableitung dieser Spalte nach x mit $(x)^\lambda$ bezeichnet. Verf. betrachtet dann folgende Verallgemeinerung der Vandermondeschen Determinante

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix} = \left| (x_1) (x_1)^1 \dots (x_1)^{\alpha_1-1} \dots (x_m) (x_m)^1 \dots (x_m)^{\alpha_m-1} \right|$$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n)$ und beweist, daß sie den Wert

$$\left(\prod_{\mu=1}^m (\alpha_\mu - 1)!! \right) \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq m} (x_\nu - x_\mu)^{\alpha_\mu \alpha_\nu}$$

hat, wobei $k!! = 1!2!\dots k!$ ($0!! = 1$) gesetzt ist.

E. Schönhardt.

Duparc, H. J. A. und W. Peremans: Bemerkung zum Rapport ZW 1949—001. Math. Centrum. Amsterdam, Rapport ZW 1952—020, 3. S. (1952) [Holländisch].

Berechnung der Minoren einer gewissen speziellen Determinante. *W. Specht.*

Tōyama, Hiraku: On some determinant equation. Kōdai math. Sem. Reports **1952**, 31—32 (1952).

Es bezeichne $A(z) = (a_{\kappa\lambda}(z))$ eine quadratische Matrix des Grades n , deren Elemente $a_{\kappa\lambda}(z)$ ganze analytische Funktionen $a_{\kappa\lambda}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\kappa\lambda\nu} z^\nu$ mit $a_{\kappa\lambda\nu} \geq 0$ sind. Ist dann im charakteristischen Polynom $|\lambda E - A(z)|$ wenigstens ein Koeffizient nichtkonstant, so ist für die Gleichung $|E - A(z)| = 0$ die Nullstelle vom absolut kleinsten Betrag reell und positiv. Im Falle $a_{\kappa\lambda}(z) = a_{\kappa\lambda 1} z$ für jedes Indexpaar erhält man ein altes Theorem von G. Frobenius. *W. Specht.*

Tenca, L.: Relazioni fra determinanti ricavati da una particolare matrice. Periodico Mat., IV. Ser. **30**, 211—215 (1952).

Verschiedene Determinanten, deren Elemente a_{mn} die Form $(a + r_m d + n s_m d)^m$ haben, und solche, die daraus durch Determinantenmultiplikation gebildet werden können, werden berechnet. Die Methode beruht darauf, daß die Zeilen arithmetische Reihen (höherer Ordnung) bilden. *G. Lochs.*

Taussky, Olga und John Todd: Systems of equations, matrices and determinants. I, II. Math. Mag. **26**, 9—20; 71—88 (1952).

Verff. geben einen elementaren Abriß der Matrizen Theorie in Auswahl. In Kap. I werden die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften, im allgemeinen ohne Beweise, zusammengestellt. Kap. II gibt numerische Anwendungen für die Auflösung von linearen Gleichungssystemen und für die Bestimmung von Eigenwerten. Hier-

bei werden Vor- und Nachteile der klassischen Methoden diskutiert, einige neuere Verfahren angegeben und typische Schwierigkeiten bei speziellen Fragestellungen aufgezeigt.

H. Rohrbach.

Reichel, Georg: Zur Transformationstheorie der Matrizen über dem Ring der ganzen p -adischen Zahlen. Math. Z. 57, 75—85 (1952).

Verf. stellt sich die Aufgabe, bei invertierbaren Matrizen über dem Ring \mathfrak{R}_p der ganzen p -adischen Zahlen (p Primzahl) Normalformen für die Vertreter der Ähnlichkeitsklassen anzugeben. Dies gelingt ihm bei der Menge der Matrizen über \mathfrak{R}_p , die mod p genau einen Elementarteiler besitzen, sowie bei der Menge der zweireihigen Matrizen über \mathfrak{R}_p .

H. Rohrbach.

Sherman, S.: On a conjecture concerning doubly stochastic matrices. Proc. Amer. math. Soc. 3, 511—513 (1952).

Zweifach stochastisch heißt eine quadratische Matrix P mit nichtnegativen Elementen, wenn jede Zeilensumme und jede Spaltensumme den Wert 1 hat. Man ordnet diese Matrizen teilweise, indem man $P_1 < P_3$ nennt, wenn eine zweifach stochastische Matrix P_2 mit $P_1 = P_2 P_3$ existiert. Zwei reelle Vektoren a, b sind teilweise geordnet, wenn $a < b$ durch $\sum_i \varphi(a_i) \leq \sum_i \varphi(b_i)$ für jede reelle konvexe

Funktion φ definiert wird. $a < b$ tritt dann und nur dann ein, wenn eine zweifach stochastische Matrix P mit $a = P b$ existiert. Daher folgt für jeden reellen Vektor a aus $P_1 < P_3$ stets $P_1 a < P_3 a$. Verf. zeigt nun, daß die von Kakutani vermutete Umkehrung dieses Sachverhalts zutrifft. Fragestellung und Beweis stützen sich auf das Buch Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, Cambridge 1934 (dies. Zbl. 10, 107).

H. Rohrbach.

Givens, Wallace: Fields of values of a matrix. Proc. Amer. math. Soc. 3, 206—209 (1952).

Der Wertevorrat $\mathfrak{B}(A)$ einer quadratischen (komplexen) Matrix A , d. h. die Menge der komplexen Zahlen $\omega = \sum a_{\kappa\lambda} \bar{x}_\kappa x_\lambda$ unter $\sum \bar{x}_\kappa x_\kappa = 1$ enthält insbesondere die konvexe Hülle $\mathfrak{B}(A)$ der Eigenwerte von A . Erklärt man den Wertevorrat $\mathfrak{B}_H(A)$ der Matrix A für eine beliebige definite Hermitesche Form H als Menge der Zahlen $\omega = \sum a_{\kappa\lambda} \bar{x}_\kappa x_\lambda$ unter $\sum \bar{x}_\kappa h_{\kappa\lambda} x_\lambda = 1$, so ist $\mathfrak{B}(A)$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{B}_H(A)$. Eigenwerte, die nichteinfachen Elementarteilern von A entsprechen, liegen im Innern jedes $\mathfrak{B}_H(A)$; eine Gleichheit $\mathfrak{B}_H(A) = \mathfrak{B}(A)$ trifft genau dann für eine gewisse Form H zu, wenn die auf dem Rande von $\mathfrak{B}(A)$ liegenden Eigenwerte sämtlich einfachen Elementarteilern von A entsprechen.

W. Specht.

Cetlin, M. L.: Eine Anwendung der Matrizenrechnung auf die Synthese von Relais-Kontaktschemata. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 525—528 (1952) [Russisch].

Verf. ordnet jeder nur aus Zweigen vom Widerstand Null oder Unendlich bestehenden Schaltung mit q Eingangsklemmen und q Ausgangsklemmen eine q -reihige quadratische Matrix zu, deren Elemente a_{ik} gleich 1 oder 0 sind, je nachdem die i -te Eingangsklemme mit der k -ten Ausgangsklemme verbunden oder nicht verbunden ist. Werden mehrere solche Schaltungen durch Hintereinanderschalten miteinander verbunden, so entspricht der entstehenden Schaltung das Produkt der den Einzelschaltungen zugeordneten Matrizen, wenn man noch vereinbart, daß bei Ausführung der Matrizenmultiplikation „im Booleschen Sinne“ gerechnet wird (insbesondere ist $1 + 1 = 1$ zu setzen). Schalterstellungen werden durch Variabeln ausgedrückt, die nur der Werte 0 oder 1 fähig sind. Die Zuordnung der Matrizen zu den Schaltungen wird an einigen Beispielen vorgeführt.

A. Stöhr.

Lunc, A. G.: Algebraische Methoden der Analyse und Synthese der Kontaktschemata. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 405—426 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet Schaltungen, in deren Zweigen Relaiskontakte liegen. Sind A_1, A_2, \dots die Relais, so werden mit a_1, a_2, \dots alle diejenigen Kontakte bezeichnet, die in Ruhestellung des betreffenden Relais offen, in Arbeitsstellung geschlossen sind; mit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots$ werden alle

diejenigen Kontakte bezeichnet, bei denen das Umgekehrte der Fall ist. a_1, a_2, \dots sind zugleich als Funktionen des Relaiszustandes aufzufassen, die der beiden Werte 0 (offen) und 1 (geschlossen) fähig sind; ist allgemein x irgendeine Größe, die der Werte 0 oder 1 fähig ist, so sei \bar{x} jeweils der entgegengesetzte Wert, also 1 oder 0. Ferner sind in der Schaltung beständig geschlossene Zweige (zugeordnete Größe: 1) und „Ventilelemente“ (zugeordnete Größe in Durchlaßrichtung: 1, in Sperrichtung: 0) zugelassen. Mit allen genannten Größen ist wie mit den Elementen einer Booleschen Algebra \mathfrak{A} zu rechnen. Eine Elementarkette ist eine Folge hintereinanderliegender Zweige, die zwei Klemmen verbindet, ohne einen Knotenpunkt mehrmals zu treffen; als „Leitvermögen“ einer Elementarkette ist das Boolesche Produkt aller Größen anzusehen, die den Zweigen dieser Elementarkette bei vorgeschriebener Durchlaufungsrichtung zugeordnet sind. Einer Schaltung mit den Klemmen M_1, \dots, M_n ordnet Verf. nun zwei n -reihige quadratische Matrizen zu: A sei die Matrix, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$ die Booleschen Summen der Leitvermögen aller derjenigen Elementarketten sind, die von M_α nach M_β führen, ohne eine der übrigen Klemmen zu treffen (bzw. 0, wenn solche Elementarketten nicht vorhanden sind). $\chi(A)$ sei die Matrix, deren Elemente $\chi_{\alpha\beta}(A)$ die Booleschen Summen der Leitvermögen sämtlicher Elementarketten sind, die von M_α nach M_β führen. Die Diagonalelemente $a_{\alpha\alpha}$ bzw. $\chi_{\alpha\alpha}(A)$ sind alle gleich 1 zu setzen; eine Matrix, deren Diagonalelemente gleich 1 sind, bezeichnet Verf. als „normiert“. Enthält die Schaltung keine Ventilelemente, so sind A und $\chi(A)$ symmetrische Matrizen. Die „charakteristische Matrix“ $\chi(A)$ gibt das von den Klemmen aus wahrnehmbare elektrische Verhalten des Mehrpols wieder, während A unmittelbarer mit dem inneren Aufbau der betrachteten Schaltung zusammenhängt. Während $\chi(A)$ durch A eindeutig bestimmt ist, ist das Umgekehrte nicht notwendig der Fall; zwei Matrizen A und B mit $\chi(A) = \chi(B)$ werden äquivalent genannt. Zur Berechnung von $\chi(A)$ aus A gibt Verf. drei Methoden an. Die erste Methode benutzt eine Art von Determinanten, die über der Booleschen Algebra \mathfrak{A} durch $D = \sum a_{1s_1} \dots a_{ns_n}$ definiert sind, wo S alle Permutationen der Indizes $1, \dots, n$ durchläuft; diese Ausdrücke gehören ähnlichen Rechenregeln wie die gewöhnlichen Determinanten. $\chi(A)$ ist dann die Transponierte der aus den Minoren $(n-1)$ -ter Ordnung von A gebildeten Matrix. Die zweite Methode beruht darauf, daß für normierte Matrizen A in der Folge der Potenzen A, A^2, \dots von einem Exponenten r ab $A^r = A^{r+1} = A^{r+2} = \dots$ ist (übrigens ist $r < n$ für $n > 1$); dann ist $\chi(A) = A^r$. Dann und nur dann ist eine normierte Matrix charakteristisch, wenn sie gleich ihrem Quadrat (also idempotent) ist. Die dritte Methode bildet aus A und Variablen x_1, \dots, x_n die „charakteristische Funktion“ $f_A(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$. Diese Funktion hängt nur von $\chi(A)$ ab. Ist $f(x)$ irgendeine Funktion, so werde unter „Ausschließen“ der Variablen x der Übergang von $f(x)$ zu dem von x freien Booleschen Produkt $f(0) f(1)$ verstanden. In diesem Sinne ist $\chi_{12}(A)$ gleich der Größe, die aus $f_A(1, 0, x_3, \dots, x_n)$ durch Ausschließen von x_3, \dots, x_n entsteht. Sind $M_1, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ die Knotenpunkte einer Schaltung und ist A die zugehörige Matrix, interessiert man sich aber nur für das Verhalten der Schaltung an den Klemmen M_1, \dots, M_m , so erhält man die zugehörige charakteristische Funktion, indem man in $f_A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ die Variablen x_{m+1}, \dots, x_n ausschließt. Umgekehrt kann die zum Ausschließen inverse Operation des Einführens neuer Variabler (eine Operation, die jedoch im allgemeinen nicht eindeutig ist) dazu benutzt werden, eine Schaltung von vorgeschriebenem Verhalten zu finden. Verf. erläutert dies an einer Anzahl von Beispielen, wobei Schaltungen teils mit, teils ohne Benutzung von Ventilelementen konstruiert werden. A. Stöhr.

● **Berkeley, Edmund C.: Circuit algebra. Introduction.** New York: Edmund C. Berkeley and Associates 1952. I, 34 p. mimeographed.

Delone, B. N.: Asymptotische Formeln in der Galoisschen Theorie. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 767—768, 769—770 [Russisch u. Ungarisch].

Sz.-Nagy, Gyula: Wertverteilung bei Polynomen mit lauter reellen Nullstellen und Koeffizienten. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 269—274 (1952).

A number of theorems are given concerning the value distribution of polynomials with all real zeros and coefficients, as, for example, the following theorem: If the polynomial $f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_p \geq a_{p+1} \geq \dots \geq a_n$ has all real zeros, if D_p ($p = 1, 2, \dots, n-1$) denotes the deltoid region symmetric to the real axis which has the main diagonal (a_p, a_{p+1}) and at the vertices a_p, a_{p+1} has angles $\pi/p, \pi/(n-p)$, respectively, and if D_0, D_n denote the sectors symmetric to the real axis of openings π/n with a_1, a_n , respectively, within which none of the zeros of the polynomial $f(z)$ lie, then $(-1)^k \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} (-1)^k f(z) \equiv \operatorname{Re} f_k(z) > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$) at every inner point of the region D_k . The transformation $Z = f(x + iy) = X + iY$ transforms the region D_k of the complex z -plane on a region of the complex Z -plane above or below the real axis according as k is an even or odd number, respectively.

E. Frank.

Turán, Pál: Sur l'algèbre fonctionnelle. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 279—290, ungarische Übersetzung 267—278 und russische Zusammenfassg. 278 (1952).

Mit Funktionalalgebra bezeichnet Verf. den Problemkreis, der sich damit befaßt, aus der Kenntnis der Koeffizienten eines Polynoms einer komplexen Veränderlichen Aussagen über die Lage der Nullstellen zu machen. Die bekannten Ergebnisse aus diesem Gebiet beziehen sich

durchweg auf die Vieta-Darstellung $V(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$; und da die Niveaulinien (der Betragsfläche) von z^k Kreise sind, ergeben sich Kreisgebiete, in denen die Nullstellen liegen können.

Dies verallgemeinert Verf., indem er z. B. von der Hermite-Darstellung $H(z) = \sum_{k=0}^m b_k H_k(z)$

von Polynomen ausgeht, wobei die $H_k(z)$ die Hermiteschen Polynome bedeuten. Nun sind die Niveaulinien der Hermiteschen Polynome „im wesentlichen“ (diese Aussage wird nicht präzisiert) Parallelen zur reellen Achse. Hieraus folgert Verf. eine Fülle von Sätzen, durch welche die Nullstellen eines Polynoms auf Parallelstreifen zur reellen Achse festgelegt werden. Die sich dadurch ergebende Möglichkeit, Schranken für die Imaginärteile der Nullstellen aus der Kenntnis der Koeffizienten eines Polynoms in der Hermite-Darstellung zu gewinnen, wird besonders in Hinblick auf die Riemannsche Vermutung diskutiert. — Der Vortrag bringt ohne Beweisandeutungen Ergebnisse aus einer (nicht zitierten) Arbeit des Verf.; weitere Ergebnisse werden angekündigt.
H. Tietz.

Jankowski, W.: Sur les zéros de polynomes contenant des paramètres arbitraires. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 5, 31—78, polnische und russ. Zusammenfassgn. 79—91, 92 (1952).

Here is determined the upper limit of the moduli of a certain number of zeros of a polynomial. This limit is independent of the value of the arbitrary parameters which are the coefficients of the polynomial, in the case where these parameters enter linearly in the polynomial. M. Biernacki [Bull. Acad. polon., Cl. Sci. Math., Sér. A 1927, 541—685] studied the polynomial $a_1 P_1(z) + \dots + a_k P_k(z)$, where are known only the degrees of the polynomials $P_1(z), \dots, P_k(z)$ and the regions R_1, \dots, R_k , which contain respectively all their zeros. For $k=2$, Biernacki showed that if $P(z), Q(z)$ are polynomials of degrees $p, q, q > p$, respectively, with zeros which do not exceed in modulus the values P, Q , respectively, then $P(z) + a Q(z)$ has at least p zeros with moduli which do not exceed the number $r = \text{Max} \{Q, (q P + p Q)/(q - p)\}$ and this upper limit is attained. The study of this problem in the cases $k=3$ and $k=4$ is the object of the present work. Examples are also discussed.
E. Frank.

Forbat, N.: Démonstration élémentaire d'un théorème de Sylvester sur les formes quadratiques. Mathesis 61, 256—258 (1952).

Gruppentheorie:

Mal'cev, A. I.: Symmetrische Gruppoide. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 136—151 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht multiplikative Bereiche, bei denen jedem geordneten Paar von Elementen a, b ein eindeutig bestimmtes Produktelement $c = a b$ zugeordnet werden kann. Er nennt einen solchen Bereich Gruppoid und verwendet damit eine vom Ref. eingeführte Bezeichnung in vollständig konträrem Sinne. Dieser vom Verf. nur übernommene, aber nicht eingeführte Mißbrauch, daß zwei sich gegenseitig ausschließende Verallgemeinerungen eines Begriffes mit demselben Terminus benannt werden, dürfte in der Mathematik einzigartig dastehen und muß daher unbedingt beseitigt werden. Da die ältere und offensichtlich wichtigere Bezeichnung den Vorrang haben muß, so schlage ich für solche multiplikativen Bereiche, wenn man unbedingt einen ähnlichen Ausdruck haben will, vor, von den Chemikern die Partikel „id“ zu entleihen und das künstliche Wort „Gruppid“ zu verwenden. Dies Wort würde sich allen Sprachen einfügen und auch alle bei

der Gruppe üblich gewordenen Zusammensetzungen gestatten. Indessen werde ich in dieser Besprechung mit dem Wort Halbgruppe auskommen, weil der Verf. fast ausschließlich assoziative Systeme behandelt und dafür dieser Ausdruck bereits im Gebrauch ist. — In § 1 werden zunächst für beliebige multiplikative Systeme grundlegende Begriffe wie Einheitselement, Nullelement, Rechtsnull erörtert. Dann wird eine abstrakte Charakterisierung der aus den eindeutigen Selbstabbildungen einer Menge in sich gebildeten symmetrischen Halbgruppen gegeben, welche zu dem schon früher bekannten Satz führt, daß die Automorphismen (wie bei einer symmetrischen Gruppe) sämtlich innere sind. Für eine auf eine Menge M ausgeübte Abbildung A wird die Mächtigkeit der Bildmenge MA als Rang bezeichnet. Dann geben die Abbildungen, deren Rang eine feste Schranke nicht übersteigt, eine Unterhalbgruppe der gegebenen symmetrischen Halbgruppe. Diese läßt sich in ähnlicher Weise abstrakt charakterisieren wie die volle symmetrische Halbgruppe. In § 2 werden die Faktorhalbgruppen der symmetrischen Halbgruppe untersucht. Sie werden durch solche Äquivalenzrelationen bestimmt, die mit der Multiplikation in der Halbgruppe verträglich sind, können also nicht einfach wie Faktorgruppen erzeugt werden. Auf die nähere Untersuchung solcher Äquivalenzrelationen, die in normale und ideale zerfallen, und zu einer klaren Übersicht aller bestehenden Möglichkeiten führen, kann hier nicht mehr eingegangen werden. *H. Brandt.*

Croisot, R.: Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes. Bull. Soc. math. France **80**, 217—223 (1952).

L'A. complète certains résultats des deux mémoires de P. Dubreil, ce Zbl. **26**, 196 et **45**, 8, en démontrant que le groupoïde quotient F d'un demi-groupe D par l'équivalence principale R attachée à un complexe H fort, symétrique et net, est un groupe, et le complexe $D^2 \cap H$ est parfait et saturé dans D^2 pour R (Th. 1, p. 220). Si H est non net, mais fort et symétrique, le noyau N , supposé non vide, de D/R , est un groupe, et le complexe $D^2 \cap H$ est encore parfait et saturé dans D^2 pour R (Th. 2, p. 221). A signaler quelques autres propriétés et corollaires intéressants, par exemple: si H est fort et symétrique dans D , supposé strict, D/R est un groupe. *L. Lesieur.*

Schwarz, Stefan: On semigroups having a kernel. Czechosl. math. J. **1** (76), 229—264 (1952).

Dans un travail précédent (ce Zbl. **45**, 156), il s'agissait d'un demi-groupe D sans zéro. Mais un demi-groupe D sans zéro ou non peut avoir un noyau de Suškevič N , qui est l'intersection de tous les idéaux bilatères de D . C'est toujours le cas pour un demi-groupe avec zéro, pour lequel on a $N = \{0\}$. C'est aussi le cas pour un demi-groupe simple sans zéro lorsqu'il existe au moins un idéal à gauche minimal; le noyau est alors constitué par la réunion de tous les idéaux à gauche minimaux. Le travail actuel concerne un demi-groupe D avec noyau N . L'A. est amené à donner de nouvelles définitions de la „simplicité“, en fonction de ce noyau N . Un idéal à gauche simple est un idéal à gauche minimal parmi ceux qui contiennent N ; on définit de même un idéal à droite simple, ainsi qu'un idéal bilatère simple. Leur existence n'est assurée que moyennant des conditions supplémentaires, condition (A): existence d'au moins un idéal à gauche simple, condition (B): existence d'au moins un idéal à gauche simple + existence d'au moins un idéal à droite simple. La réunion de tous les idéaux à gauche simples est un idéal bilatère $J \subseteq D$; l'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour que $J = D$: la relation $a = xb$, $a \notin N$, $b \notin N$ entraîne $b = \bar{x}a$, $\bar{x} \notin N$. Il donne une condition analogue exprimant que D est la réunion de tous ses idéaux à droite simples, ou de ses idéaux bilatères simples. Lorsque $J = D$ on a aussi la propriété suivante: si $a \notin N \cdot D$, il existe $e \notin N \cdot D$ tel que $a = ea$, $N \cdot D$ désignant l'idéal N , des éléments x qui vérifient $Dx \subseteq N$, et $N \cdot D$ l'idéal N , des éléments x tels que $xD \subseteq N$. L'A. considère ensuite les idéaux N -potents, qui sont tels qu'une de leurs puissances est contenue dans N , et il renforce les conditions (A) ou (B) par (A₁): D contient au moins un idéal à gauche simple non N -potent, ou (B₁) = (A₁) + D contient au moins un idéal à droite simple non N -potent. Puis il étudie les demi-groupes simples satisfaisant à la condition (A₁), c. à d. les demi-groupes n'ayant aucun autre idéal bilatère que N et D . Un tel demi-groupe D est la réunion de ses idéaux à gauche simples, qui sont tous non N -potents. Si D satisfait de plus à la condition (B₁), il est complètement simple au sens de Rees, c. à d. 1. Pour tout $a \notin N$, il existe e et f , idempotents, tels que $a = ea = af$. 2. Tout élément e idempotent est primitif (la seule solution idempotente $x \notin N$ de l'équation

$xe = ex = x$ est $x = e$). Au § 6 est donnée la structure d'un idéal à gauche L simple, dans un demi-groupe quelconque D ayant un noyau N ; si L contient au moins un idempotent $\notin N$, L est la réunion de groupes disjoints isomorphes, avec un demi-groupe P tel que $P^2 = N$. Au § 7, l'A. revient sur les demi-groupes simples satisfaisant à la condition (A) pour montrer qu'un tel demi-groupe est complètement simple lorsqu'il possède un élément idempotent $e \notin N$. Au § 8, on montre qu'un idéal bilatère M d'un demi-groupe possédant un noyau N , a aussi, en tant que demi-groupe, un noyau égal à N ; de plus, si M est simple et vérifie $M^2 \neq N$, M est un demi-groupe simple. Aux deux derniers paragraphes, l'A. introduit le radical R de D , qui est la réunion des idéaux N -potents de D . Au § 9, on suppose $R = N$. Au § 10, l'A. suppose $R > N$, avec la condition (C) supplémentaire: R est N -potent. [Remarquons que (C) est vérifiée dans un demi-groupe satisfaisant à la condition de chaîne descendante (voir par exemple L. Lesieur, ce Zbl. 42, 27).] L. Lesieur.

Zavalo, S. T.: Freie Gruppen mit Operatoren. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 5 (51), 199—200 (1952) [Russisch].

Kemchadze, Š. S.: Eindeutigkeitsbasen in unendlichen regulären p -Gruppen. Ukrain. mat. Žurn. 4, 57—64 (1952) [Russisch].

Resultate von P. Hall (dies. Zbl. 7, 291) über die Existenz von Eindeutigkeitsbasen in endlichen regulären p -Gruppen werden auf gewisse unendliche p -Gruppen verallgemeinert. Es sei G eine reguläre p -Gruppe und $G^{(1)}$ die Untergruppe der p -ten Potenzen. Unter einer L -Reihe von G verstehe man eine (i. a. unendliche) von $G^{(1)}$ nach G aufsteigende Normalreihe $G^{(1)} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_\nu = G$ mit zyklischen Faktorgruppen der Ordnung p . Aus jeder Menge $L_{\beta+1} - L_\beta$ wähle man ein Element θ_β möglichst niedriger Ordnung. Die Menge $\{\theta_\beta\}$ heißt ein kanonisches Elementensystem. Eine Folge ξ_1, ξ_2, \dots von Elementen aus G heißt Eindeutigkeitsbasis, wenn sich jedes von 1 verschiedene Element x aus G auf genau eine Weise in der Form $x = \xi_{\alpha_1}^{k_1} \xi_{\alpha_2}^{k_2} \dots \xi_{\alpha_r}^{k_r}$ mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r$ darstellen läßt. Der Hauptsatz lautet dann: Sind in einer regulären p -Gruppe folgende Bedingungen erfüllt: 1. die Ordnungen der Elemente sind beschränkt; 2. jede aus zwei Elementen erzeugte Untergruppe ist endlich; 3. es existiert eine L -Reihe, dann ist jedes kanonische Elementensystem eine Eindeutigkeitsbasis. Hieraus folgt insbesondere der entsprechende Satz von Hall für endliche p -Gruppen sowie ein Satz von Prüfer über die direkte Zerlegbarkeit primärer abelscher Gruppen in zyklische.

R. Kochendörffer.

McLean, David: Cubic equations in groups. Amer. math. Monthly 59, 624—626 (1952).

Verf. betrachtet als Analogon in Gruppen zur Gleichung n -ten Grades die Gleichung $U A_{n-1} U A_{n-2} \dots U A_1 U = E$ ($=$ Einselement) und stellt die Frage: Kann man allgemein einen Ausdruck für U durch die Gruppenelemente A_1, \dots, A_{n-1} so bestimmen, daß die obige Gleichung eine Identität wird? Als Operationen sind nur zugelassen: Multiplikation, Division und Wurzelziehen, soweit dies einen Sinn hat. Für den Fall $n = 2$ ergibt sich als Lösung $U = \sqrt{A_1^{-1}}$; in Gruppen also, in denen jedes Element sich als Quadrat eines Elementes darstellen läßt, und nur in solchen, hat die obige Gleichung für $n = 2$ eine allgemeine Lösung durch ein Gruppenelement U . Verf. zeigt, daß schon für $n = 3$ die obige Gleichung keine allgemeine Lösung mehr besitzt.

O. Grün.

Szép, Jenő: Über endliche einfache Gruppen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 451—452, russische und deutsche Zusammenfassgn. 452, 453 (1952) [Ungarisch].

\mathfrak{G} sei eine endliche Gruppe, \mathfrak{H} und \mathfrak{K} seien eigentliche Untergruppen von \mathfrak{G} und $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \mathfrak{K}$. \mathfrak{H} sei einfach und nicht zyklisch, \mathfrak{K} sei abelsch, aber nicht vom Typ (p, p, \dots, p) , $p =$ Primzahl. Die Ordnungen von \mathfrak{H} und \mathfrak{K} seien prim zueinander. \mathfrak{G} ist dann und nur dann einfach, wenn \mathfrak{H} größte Untergruppe ist. Ohne Beweis.

O. Grün.

Szép, J.: Zur Theorie der einfachen Gruppen. Acta Sci. math. 14, 246 (1952).

Verf. beweist: Ist die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \mathfrak{P}$ einfach, \mathfrak{H} und \mathfrak{P} eigentliche Unter-

gruppen von \mathfrak{G} , $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{P} = 1$ und die Ordnung von \mathfrak{P} eine Primzahl p , so hat \mathfrak{G} eine Ordnung $p \cdot d(1 + k p)$, wobei $d|p-1$, $d > 1$, k eine natürliche Zahl ist.

O. Grün.

Rédei, László und Jenő Szép: Endliche nilpotente Gruppen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 225—231 und russische Zusammenfassg. 232 (1952) [Ungarisch].

Dieudonné, Jean: Sur les groupes de Lie algébriques sur un corps de caractéristique $p > 0$. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 380—402 (1952).

The author studies algebraic Lie groups and their Lie algebras in the case where the ground-field is algebraically closed and of characteristic $p \neq 0$ (cf. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie II: Groupes algébriques*, Paris 1951). He is chiefly concerned here with finding an analogue of one-parameter subgroups. — Under the above conditions the Lie algebra \mathfrak{g} of an algebraic Lie group \mathfrak{G} is a restricted Lie algebra of characteristic p , say a p -Lie algebra for short. If $X \in \mathfrak{g}$, let $\{X\}$ be the p -Lie subalgebra of \mathfrak{g} generated by X . A basis of $\{X\}$ is given in terms of the semisimple and nilpotent components of X and this is used to give a proof of the proposition: „If $X \in \mathfrak{g}$, then $\{X\}$ is the Lie algebra of an algebraic subgroup of \mathfrak{G} “ in the case i) where \mathfrak{G} is an irreducible algebraic group (of positive dimension) of diagonal matrices, and ii) where \mathfrak{G} is an irreducible algebraic group all of whose elements are polynomials in a fixed nilpotent matrix N and $X = N$. The author conjectures that the proposition holds generally but points out some difficulties in the way of a general proof.

P. M. Cohn.

Gleason, A. M.: One-parameter subgroups and Hilbert's fifth problem. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 451—452 (1952).

Murnaghan, F. D.: On the invariant theory of the classical groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 966—973 (1952).

Verf. hat zwei für den Plethysmen-Kalkül bedeutsame Fortschritte erzielt: 1. Es ist möglich, die Plethysmen $\{m\} \otimes \{j\}$ und $\{m\} \otimes \{1^j\}$ der linearen Gruppe durch ein rekursives Verfahren zu erhalten, es erfordert zur Gewinnung von $\{m\} \otimes \{j\}$ die Kenntnis von $\{m\} \otimes \{1^{j-1}\}$ und $\{m\} \otimes \{k\}$ für alle $k < j$; für $\{m\} \otimes \{1^j\}$ entsprechend $\{m\} \otimes \{j-1\}$ und $\{m\} \otimes \{1^k\}$, liefert also in Verschränkung beide Plethysmen gleichzeitig. Zur Durchführung ist die Bildung des direkten Produktes von Darstellungen erforderlich, die Analyse wird in ganzen Trupps [die j -gliedrigen, $(j-1)$ -gliedrigen usw. Bestandteile jeweils auf einen Schlag] erhalten. 2. Wenn eine Darstellung $[\lambda]$ der orthogonalen Gruppe bzw. $\langle \lambda \rangle$ der symplektischen Gruppe als verallgemeinerte Darstellung der linearen Gruppe, $[\lambda]$ bzw. $\langle \lambda \rangle = \{\lambda\} - \{\dots\} \pm \dots$ geschrieben wird und wenn mit $[\lambda]^*$ bzw. $\langle \lambda \rangle^*$ die Bildung der dualen Tableaus gliedweise an den einzelnen Darstellungen der linearen Gruppe bezeichnet wird, mit $[\lambda]^*$, $\langle \lambda \rangle^*$ dagegen die ganz gewöhnlichen Darstellungen zum dualen Tableau, so gilt $[\lambda]^* = \langle \lambda \rangle^*$ und natürlich auch $\langle \lambda \rangle^* = [\lambda]^*$. — Zum Beispiel ist $[2] = \{2\} - \{0\}$, also $[2]^* = \{11\} - \{0\}$, dies ist tatsächlich $= \{11\}$ nach Definition der symplektischen Gruppe. — Eine große Anzahl von expliziten Analysen einschließlich der Plethysmen von $[m]$, $\langle m \rangle$ und $\langle 1^m \rangle$ werden mitgeteilt. Beweise für die verwendeten Theoreme sind nicht ausgeführt.

F. L. Bauer.

Dietz, Helmut: Zur Darstellungstheorie der binären projektiven Gruppe über einem Galoisfeld. Math. Nachr. 7, 219—256 (1952). Berichtigung. Math. Nachr. 9, 384 (1953).

Als die Hauptaufgabe der Darstellungstheorie endlicher Gruppen bei Charakteristik 0 ist nach wie vor die explizite Angabe eines vollen Satzes inäquivalenter absolut-irreduzibler Darstellungen zu vorgegebener Gruppe anzusehen; bekanntlich ist sie im allgemeinen Falle bisher noch nicht gelöst. Sie läßt sich etwas schärfer formulieren als die Aufgabe, die zugehörige Gruppenalgebra (über dem komplexen Zahlkörper) vollständig zu zerfallen. Wohl im Hinblick auf dieses allgemeine Problem setzt sich Verf. hier zum Ziel, die entsprechende Aufgabe für die im Titel genannten speziellen endlichen Gruppen \mathfrak{S}_s wirklich zu lösen; dabei ist s eine beliebige Primzahlpotenz, und \mathfrak{S}_s bedeutet die Gruppe aller linear gebrochenen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, deren Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im Galoisfeld mit s Elementen liegen [in der Dickson'schen Terminologie handelt es sich also um die Gruppe $LF(2, s)$]. Es wird allerdings nicht eigentlich eine Zerfällung der Gruppenalgebra \mathfrak{R}_s von \mathfrak{S}_s angegeben, sondern lediglich für die in einer solchen Zerfällung auftretenden unzerlegbaren Linksideale je ein erzeugendes Element.

— Der leitende Gedanke bei den Ausführungen des Verf. ist der, die entsprechende Konstruktion zunächst für die Untergruppe \mathfrak{G}_s der ganzen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \neq 0$) durchzuführen und diese dann mit Hilfe des Frobeniusschen darstellungstheoretischen Induktionsprozesses für die gesuchte Konstruktion in der Gruppe \mathfrak{H}_s nutzbar zu machen. Das erweist sich aus zweierlei Gründen als durchführbar: Erstens ist nämlich die Gruppe \mathfrak{G}_s von so einfacher Struktur, daß eine Zerfällung der zugehörigen Gruppenalgebra ohne Schwierigkeit durchgeführt werden kann. Zweitens aber zeigt es sich, daß eine irreduzible Darstellung D von \mathfrak{H}_s in der Induzierten C^* einer irreduziblen Darstellung C von \mathfrak{G}_s höchstens einmal vorkommt; daher wird ein zu C^* gehöriger Darstellungsmodul \mathfrak{E}^* von dem zu D gehörigen Zentrumsidempotent e aus \mathfrak{H}_s entweder annulliert, oder aber er fällt aus \mathfrak{E}^* gerade einen zu D gehörenden Darstellungsmodul aus. Da man e bekanntlich mit Hilfe des Charakters von D berechnen kann und da ferner die Charaktertabelle von \mathfrak{H}_s seit Schur bekannt ist [J. reine angew. Math. **132**, 85—137 (1907)], so ergibt sich daraus leicht die gesuchte Konstruktion von Erzeugenden der minimalen Linksideale in einer Zerfällung von \mathfrak{H}_s . — Demnach spielt bei den Konstruktionen des Verf. der Begriff der induzierten Darstellung eine hervorragende Rolle. Das ist deshalb interessant, weil auch bei der Berechnung der Charaktere einer endlichen Gruppe die Theorie der induzierten Charaktere ein außerordentlich wichtiges Hilfsmittel darstellt (vgl. R. Brauer, dies. Zbl. **34**, 161). Ref. möchte glauben, daß sich die Bestimmung der Darstellungen auch im Allgemeinen in ähnlicher Weise auf den zyklischen Fall zurückführen läßt, wie das bei den Charakteren durch R. Brauer geschehen ist. Auf jeden Fall ist die vorliegende Arbeit wegen ihrer Zielsetzung und wegen der ihr zugrunde liegenden Gedanken höchst beachtenswert. — Bezüglich Einzelheiten in der Durchführung der Beweise sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Vgl. auch die inzwischen erschienene Berichtigung.

P. Roquette.

Pavlov, P. P.: Die Sylowschen p -Untergruppen der vollen linearen Gruppe über dem Primkörper der Charakteristik p . Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 437—458 (1952) [Russisch].

Eine eingehende Untersuchung der in der Überschrift genannten Gruppen. Eine solche Gruppe \mathfrak{G} läßt sich bekanntlich darstellen als die Gruppe aller Matrizen n -ten Grades, in denen die Hauptdiagonale aus Einsen besteht und alle Elemente unter der Hauptdiagonale gleich Null sind. Folgende Fragen werden näher behandelt:

1. Die Angabe eines ausgezeichneten minimalen Erzeugendensystems und dazugehöriger definierender Relationen. (Es handelt sich um das System der Matrizen $\varepsilon_{i, i+1} = E + e_{i, i+1}$, wo E die Einheitsmatrix und $e_{i, i+1}$ diejenige Matrix bedeutet, die in der i -ten Zeile und $i+1$ -ten Spalte eine Eins und sonst Nullen enthält.)
2. Das Studium der Klassen konjugierter Elemente. Aufbauend auf den hier erzielten Resultaten wird die Wirkung von Automorphismen auf die $\varepsilon_{i, i+1}$ näher untersucht.
3. Fünf ausgezeichnete Automorphismengruppen von \mathfrak{G} werden angegeben. Diese erzeugen zusammen die volle Automorphismengruppe von \mathfrak{G} .
4. Die Struktur der vollen Automorphismengruppe von \mathfrak{G} wird näher beschrieben. — In der Einleitung weist Verf. darauf hin, daß Resultate von Dubisch und Perlis (dies. Zbl. **42**, 265) über die Automorphismengruppe der Algebra der Dreiecksmatrizen n -ten Grades aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit leicht gewonnen werden können.

L. Kaloujnine.

Dieudonné, Jean: On the orthogonal groups over an algebraic number field. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 245—256 (1952).

Ist \mathfrak{V}^n der n -dimensionale Vektorraum über einem beliebigen Körper \mathfrak{K} , weiter $f(x, x)$ eine nichtsinguläre quadratische Form über \mathfrak{V}^n , so bezeichne $O_n(\mathfrak{K}, f)$ die orthogonale Gruppe, $O_n^+(\mathfrak{K}, f)$ die Untergruppe der Drehungen (Determinante $+1$), $\Omega_n(\mathfrak{K}, f)$ den Kommutator von $O_n(\mathfrak{K}, f)$, der für $n > 2$ mit dem Kommutator von $O_n^+(\mathfrak{K}, f)$ übereinstimmt. Die projektive orthogonale Gruppe $P\Omega_n(\mathfrak{K}, f)$ ist dann die Faktorgruppe von $\Omega_n(\mathfrak{K}, f)$ nach dem Zentrum dieser Gruppe. Ist \mathfrak{K} ein beliebiger algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, so ist für Formen $f(x, x)$ von einem Index $\nu \geq 1$ die projektive orthogonale Gruppe $P\Omega_n(\mathfrak{K}, f)$ für $n > 4$ stets einfach. Die Voraussetzung $\nu \geq 1$ ist stets erfüllt für rein imaginäre Körper \mathfrak{K} . Es bleibt daher noch der Fall zu behandeln, daß der Index $\nu = 0$ und die Anzahl r_1 der reellen konjugierten Körper zu \mathfrak{K} (einschließlich \mathfrak{K}) von Null verschieden ist. Verf. zeigt: Für jeden reellen algebraischen Zahlkörper \mathfrak{K} und jede Form $f(x, x)$ vom Index $\nu = 0$ über \mathfrak{V}^n ist die projektive orthogonale Gruppe $P\Omega_n(\mathfrak{K}, f)$ einfach, sobald $n \geq 3 \cdot 2^r$. Es geht dies aus einem stärkeren Satze als Sonderfall hervor: Die Isomorphismen der r_1 reellen konjugierten Körper zu \mathfrak{K} induzieren Isomorphismen des Vektorraumes \mathfrak{V}^n auf isomorphe Vektorräume und führen zu Transformierten

der Form $f(x, x)$. Die Form heißt totalpositiv, wenn ihre Transformierten sämtlich den Trägheitsindex 0 besitzen; gleichwertig damit ist, daß $f(x, x)$ in \mathfrak{B}^n für alle $x \neq 0$ totalpositive Werte annimmt. Dann gilt: Ist für $n > 5$ die Form $f(x, x)$ totalpositiv, so ist die Gruppe $P\Omega_n(\mathfrak{R}, f)$ einfach. Das gleiche gilt aber bereits dann, wenn die Form $f(x, x)$ in einem mindestens 6-dimensionalen Teilraum von \mathfrak{B}^n totalpositive Werte annimmt. Hieraus ergibt sich auch eine Aussage über die unitäre Gruppe in einer quadratischen Erweiterung von \mathfrak{R} : Es sei ϱ eine totalpositive Zahl aus \mathfrak{R} und \mathfrak{R}^* die quadratische Erweiterung $\mathfrak{R}(\sqrt{-\varrho})$. Dann ist für jede totalpositive Hermitesche Form f^* in einem n -dimensionalen Raum \mathfrak{B}^{*n} über \mathfrak{R}^* die Kommutatorgruppe $PY_n(\mathfrak{R}^*, f^*)$ der projektiven unitären Gruppe $PU_n(\mathfrak{R}^*, f^*)$ für $n > 4$ einfach. W. Specht.

Hua, L. K. and I. Reiner: Automorphisms of the projective unimodular group. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 467—473 (1952).

Ist \mathfrak{M}_{2n} die unimodulare Gruppe der $2n$ -reihigen ganzzahligen Matrizen, ferner \mathfrak{M}_{2n}^+ die Untergruppe der Determinante $+1$, so bezeichnet man als projektive unimodulare Gruppen \mathfrak{P}_{2n} bzw. \mathfrak{P}_{2n}^+ die Faktorgruppen der Gruppen \mathfrak{M}_{2n} bzw. \mathfrak{M}_{2n}^+ nach ihren Zentren. Verf. bestimmen die Automorphismengruppen \mathfrak{B}_{2n} von \mathfrak{P}_{2n} und \mathfrak{B}_{2n}^+ von \mathfrak{P}_{2n}^+ . Die Untergruppe \mathfrak{P}_{2n}^+ ist charakteristisch in \mathfrak{P}_{2n} ; die Automorphismengruppe \mathfrak{B}_{2n}^+ wird durch \mathfrak{B}_{2n} in \mathfrak{P}_{2n}^+ induziert. Die Gruppe \mathfrak{B}_{2n} wird erzeugt von den Automorphismen: (1) $X \rightarrow A^{-1}XA$ mit $A \in \mathfrak{M}_{2n}$, (2) $X \rightarrow X'^{-1}$ (nur für $n > 1$), wenn X' die Transponierte zu X bezeichnet. W. Specht.

Tits, J.: Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés de transitivité. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, **27**, Nr. 2, 115 p. (1952).

Un groupe G est appelé à peu près n -uplement transitif, s'il y a des n -uples de points, dont le groupe d'invariance est trivial, et si G échange ces n -uples transitivement. Tous les autres n -uples sont appelés singuliers. Un k -uple, qui n'est contenu que dans des n -uples singuliers, est singulier par définition. Un k -uple non singulier produit un „espace singulier de rang k “, qui consiste de tous les points, qui forment un $(k+1)$ -uple singulier avec le k -uple donné. Un tel espace est appelé homogène, s'il est déterminé par un k -uple non singulier quelconque qu'il contient. H est appelé impropre, s'il ne consiste que de k points, et trivial, s'il est la réunion des espaces déterminés par un $(k-1)$ -uple partiel. L'A. démontre des théorèmes généraux par rapport à ces notions. Quant aux groupes triplement transitifs, qui sont traités au 2ème chapitre, nous renvoyons à des recherches ultérieures de l'A. (ce Zb. **42**, 25). Au 3ème chapitre l'A. étudie les groupes appelés „du type projectif“ définis par la demande que les espaces de rang 1 soient des points isolés, que les espaces de rang n soient triviaux et que tous les autres soient homogènes propres. Les groupes du type hyperprojectif qui généralisent les précédents sont étudiés au 5ème chapitre, tandis que le 4ème contient l'énumération complète des groupes quadruplement transitifs. Au 6ème chapitre l'A. esquisse des méthodes générales d'étude de la transitivité. — Un bref résumé ne peut pas donner une impression de la foule de résultats auxquels l'A. est parvenu.

H. Freudenthal.

Rådström, Hans: Convexity and norm in topological groups. Ark. Mat. **2**, 99—137 (1952).

This paper is devoted to the investigation of certain families of subsets of a topological group, which generalize the family of all sets of the form λK , where $\lambda \geq 0$ and K is a convex set in some Euclidean space. — By an one-parameter semigroup of subsets of a topological group is meant a mapping $\Phi: \delta \rightarrow A_\delta$ of the non-negative reals into the set of subsets of the group G , satisfying the conditions: (i) $A_\gamma A_\delta = A_{\gamma+\delta}$; (ii) there exists $\alpha > 0$ such that A_δ is closed if $0 \leq \delta \leq \alpha$ and such that the restriction of Φ to the intervall $0 \leq \delta \leq \alpha$ is continuous in the Hausdorff topology for the set of subsets of a uniform space. Main theorems: 1. To any one-parameter semigroup Φ with $\Phi(0) = \{0\}$ in Euclidean space, there exists a compact convex set A such that $\Phi(\delta) = \delta A$. Conversely, if A is a compact convex set in Euclidean space, then the mapping $\Phi: \delta \rightarrow \delta A$ is a one-parameter semigroup with $\Phi(0) = \{0\}$. 2. Let G be a Lie group, let g be the corresponding Lie algebra and let f be the exponential mapping. Then: (i) every compact subset of g generates a one-parameter semigroup which satisfies $\Phi(0) = \{e\}$; (ii) every compact subset of g generates the same semigroup as its convex hull; (iii) every one-parameter semigroup Φ in G which satisfies $\Phi(0) = \{e\}$ is generated by a unique compact convex set in g ; (iv) the compact convex set K which generates a given Φ is determined by $K = \lim_{\delta \rightarrow 0} f^{-1}\Phi(\delta)$. A set

$K \subset g$ is said to generate Φ if for every $\gamma \geq 0$, $\Phi(\gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [f(\delta K)]^{[\gamma/\delta]}$ holds; an elaborate

argument is used to give the right member a meaning. — The concept of a normed group is finally considered. A metric on a group is a norm if it is left invariant and if the spheres S_δ of radius δ around the identity of the group constitute an one-parameter semigroup. The author

proves that a locally compact normed group is separable, metric, connected and locally connected. Some theorems on normability are given, which support the conjecture that the above conditions are also sufficient in order that it be possible to remetrize the locally compact group so as to make it a normed group.

T. Ganea.

Hu, Sze-tsen: Cohomology rings of compact connected groups and their homogeneous spaces. Ann. of Math., II. Ser. 55, 391—419 (1952).

Es werden Verallgemeinerungen des klassischen Ergebnisses von E. Cartan [Ann. Soc. Polon. Math. 8, 181—225 (1929)] bewiesen, nach dem die Bettischen Zahlen einer kompakten, zusammenhängenden Lieschen Gruppe unmittelbar aus ihrer Lieschen Algebra ableitbar sind. Dazu bedient sich Verf. der Alexanderschen Cohomologietheorie und ersetzt die Betrachtung der Lieschen Algebra durch die der Gruppenkeime. Die Rolle des de Rham'schen Satzes, der von Chevalley und Eilenberg in solchen Erörterungen (Chevalley und Eilenberg, dies. Zbl. 31, 248) stark benützt wurde, wird hier vom verallgemeinerten Homotopieaxiom übernommen. — Hauptergebnisse: Es sei G eine kompakte, zusammenhängende Gruppe, die auf einem Hausdorffschen Raum X transitiv wirkt; es sei G_x die Isotopiegruppe im Punkte x von X , d. h. die Untergruppe von G , bestehend aus denjenigen Elementen von G , die x fest lassen. Der Alexander-Wallace-Cohomologiering mit reellen Koeffizienten $H(X)$ des homogenen Raumes X hängt nur von irgendeiner Umgebung U von x in X ab und von der Wirkung, auf U , der Elemente von G_x und der irgendeiner Umgebung V der Einheit e in G . Ist noch G_x zusammenhängend, ist V irgendeine Umgebung von e in G und ist $V_* = V \cap G_x$, so ist der Alexander-Wallace-Cohomologiering mit reellen Koeffizienten $H(X)$ von X mit dem Cohomologiering $H(V, V_*)$ der lokalen Gruppe V modulo der lokalen Untergruppe V_* isomorph. Daraus folgt: der Alexander-Wallace-Cohomologiering mit reellen Koeffizienten $H(G)$ einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G hängt nur von irgendeinem Gruppenkeim von G ab. Insbesondere haben im kleinen isomorphe, kompakte, zusammenhängende Gruppen isomorphe Alexander-Wallace-Cohomologieringe.

T. Ganea.

Hu, Sze-tsen: Cohomology theory in topological groups. Michigan math. J. 1, 11—59 (1952).

This is an account of material given in a series of lectures at the University of Michigan in 1951. — Let Q be a topological group which operates on an Abelian coefficient group G . Using methods analogous to those of Eilenberg and MacLane (see e. g. S. Eilenberg, this Zbl. 31, 342) the author defines and studies the various cohomology theories of Q over G . He defines: 1. Ordinary cohomology groups (which reduce to the Eilenberg and MacLane groups when Q is discrete); 2. Cohomology groups from co-chains with empty supports; 3. Reduced cohomology groups from co-chains which are reduced modulo those with empty supports. — The groups in dimensions 0, 1 and 2 are given their respective interpretations in terms of (a) the elements of G invariant under Q , (b) the group of continuous crossed homomorphisms of Q into G and (c) the group of topological group extensions of Q by G (cf. this Zbl. loc. cit.). If Q is compact and connected, and if G is a finite dimensional vector group on which Q operates simply, then the reduced cohomology groups are proved isomorphic with the Čech groups of Q regarded as a topological space, over the abstract group G . Finally local cohomology groups are defined for a local group and thus for Q . Conditions are given under which the local groups of Q are isomorphic with the reduced cohomology groups for $\dim. > 1$. An application is given in the theory of compact connected groups with Lie centres.

W. H. Cockcroft.

Takahashi, Shuichi: Cohomology groups of finite Abelian groups. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 294—302 (1952).

It is well known that the cohomology groups $H^n(Z_p)$ of a cyclic group Z_p , with generator z of order p , can be calculated by considering the incidence matrices associated with the exact sequence (or Z_p -complex) of groups

$$\{C_i\} = 0 \leftarrow Z_\infty \xleftarrow{\varepsilon} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \cdots,$$

where $C_i \approx A$ (the group ring of Z_p), $d_{2n} c_{2n} = (1 + z + \cdots + z^{p-1}) c_{2n}$, $d_{2n-1} c_{2n-1} = (1 - z) c_{2n-1}$, ($c_i \in C_i$), $\varepsilon 1 = 1$. By considering the incidence matrices of the tensor product complex of a Z_p -complex and a Z_q -complex: $\left\{ \sum_{r=0}^i C_r \otimes C'_{i-r} \right\}$, with $d(C_r \otimes C'_s) = dC_r \otimes C'_s + (-1)^r C_r \otimes dC'_s$, one can obtain the cohomology groups of $Z_p \times Z_q$. By this means the author gives an alternative method of computing the cohomology groups of a finite Abelian group (see R. Lyndon, this Zbl. 31, 198, for the original method). Another application is given in Galois cohomology theory. The author proves that if K/k is an Abelian extension with Galois group G having two generators z_1, z_2 , then $H^{2n+1}(G, K^*)$ contains $H^3(G, K^*)$, where K^* is the multi-

plicative group of non-zero elements of K . Also $H^3(G, K^*)$ is calculated in terms of the invariant subfields K_1 of z_1 and K_2 of z_2 . W. H. Cockcroft.

Finzi, Arrigo: Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 371—430 (1952).

Verf. setzt seine in einer früheren Arbeit gleichen Titels (dies. Zbl. 40, 153) begonnenen Untersuchungen fort. Er gibt jetzt die folgende zweite Lösung seines früher gestellten Problems an. — Sei eine Familie von ∞^1 regulären Transformationen $T(\vartheta)$ (abhängig vom Parameter ϑ) gegeben, welche eine geschlossene Kurve in sich überführen, ohne daß ein Kurvenpunkt in Ruhe bleibt. $T(\vartheta)$ werde analytisch dargestellt durch eine Gleichung $x_1 = g(x, \vartheta)$, wo g in bezug auf x die Periode 1 hat. Es sollen dabei die Ableitungen $\partial g(x, \vartheta)/\partial x > 0$, $\partial^2 g(x, \vartheta)/\partial x^2$, $\partial g(x, \vartheta)/\partial \vartheta > 0$, $\partial^2 g(x, \vartheta)/\partial x \partial \vartheta$ existieren und die Lipschitzbedingung hinsichtlich x und ϑ erfüllen. Dann existiert eine Familie von ∞^1 infinitesimalen Transformationen $(*) \xi(x, \vartheta) df/dx$ derart, daß, unter $x_1 = g(x, t, \vartheta)$ die endlichen Gleichungen der von $(*)$ erzeugten Transformationsgruppe mit dem Parameter t verstanden, die Relation $g(x, \vartheta) = g(x, 1, \vartheta)$ besteht. Dabei ist $\xi(x, \vartheta)$ stetig in x und ϑ (sogar zugleich). (Regulär heißt eine Transformation T der vorausgesetzten Art, wenn sie vom Typus 1 oder 3 ist; vgl. obiges Ref.) — Der Beweis dieses Satzes ist wieder sehr kompliziert, wenn auch völlig elementar, und wird mit erstaunlicher Energie durch eine Fülle ausgedehnter Zwischenbetrachtungen gesteuert. Der Grundgedanke läßt sich in Kürze folgendermaßen skizzieren. Der Modul $k(\vartheta)$ (s. obiges Ref.) der Transformation $T(\vartheta)$ ist eine monoton wachsende Funktion von ϑ . Sei α ein irrationaler Wert dieser Funktion und $\alpha = k(\vartheta)$. Unter m_α/n_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, sei der α te Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von α verstanden und es sei $m_\alpha/n_\alpha = k(\vartheta_\alpha)$. Die Transformation $T(\vartheta_\alpha)$ ist regulär mit einem rationalen Modul. Daher gibt es (wie in der früheren Arbeit des Verf. gezeigt wurde und wofür Verf. in der vorliegenden Arbeit einen neuen, einfacheren Beweis bringt) für jedes α unendlich viele infinitesimale Transformationen, die $T(\vartheta_\alpha)$ erzeugen und von welchen man auf allgemeine Weise eine bestimmte namhaft machen kann, die mit $\xi(x, \vartheta_\alpha) df/dx$ bezeichnet werde. Dann läßt sich zeigen, daß die Folge der $\xi(x, \vartheta_\alpha)$ gleichmäßig gegen eine stetige positive Funktion $\xi(x, \vartheta)$ von x konvergiert. Dieser Nachweis bildet den bei weitem umfangreichsten Teil der Untersuchung; er endet mit der Feststellung, daß Relationen der Form bestehen: $\xi(x, \vartheta_\alpha) \cdot (1 - \eta_\alpha) < \xi(x, \vartheta_{\alpha+1}) < \xi(x, \vartheta_\alpha) \cdot (1 + \eta_\alpha)$, wo die η_α positive, nur von α abhängige Zahlen sind, deren Summe konvergiert. — Hierauf wird bewiesen, daß $\xi(x, \vartheta) df/dx$ die Transformation $T(\vartheta)$ erzeugt. Zugleich hat sich damit gezeigt, daß die so definierte Funktion $\xi(x, \vartheta)$ der beiden Variablen x, ϑ für solche Werte von ϑ stetig ist, denen irrationale Modulwerte $k(\vartheta)$ entsprechen; der Nachweis, daß sie auch für die übrigen Werte von ϑ stetig ist, beschließt die Abhandlung. W. Neumer.

Verbände. Ringe. Körper:

Andreoli, Giulio: Spazi algoritmici proiettivi (su algebre di Boole). Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 42—69 (1952).

B sei eine Boolesche Algebra, $x, y, p, q, \xi, \eta \in B$; im übrigen werden im Referat die üblichen Bezeichnungen der Verbandstheorie gebraucht. Für die Transformationen von Elementepaaren (x, y) $\xi = px + qx'$, $\eta = ly + my'$ gelten die Kompositionsregeln der Matrizen. Im Zentrum der Matrizenhalbgruppe Γ liegt die Gruppe Δ der (involutorischen) Matrizen $\begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix}$. Durch Δ ineinander übergeführte Elementepaare heißen äquivalent und bestimmen einen „Punkt“. Jeder Punkt (x, y) gestattet genau eine Normalform $(1, xy + x'y')$. Die Faktorhalbgruppe Γ/Δ besteht aus den „Projektivitäten“. Eine Klassifikation der Projektivitäten bzw. ihrer Fixpunkte zeigt weitgehende Analogie mit den Projektivitäten der geraden Linie. Zahlreiche Druckfehler in den Formeln erschweren die Lektüre der Arbeit. F. W. Levi.

Hashimoto, Junji: Ideal theory for lattices. Math. Japonicae 2, 149—186 (1952).

Theory of ideals in lattices is developed systematically. Firstly, an ideal J of a lattice L is an intersection of prime ideals if and only if J is the set of antecedents of the null set under some representation of L . For L to be distributive, it is necessary and sufficient that every (principal) ideal of L should be an intersection of prime ideals, and so is that every (principal) ideal should be the set of antecedents of 0 under some homomorphism. The last condition is

generalized to one which concerns with intervals; the intersection of an ideal and a dual ideal is called an interval. Let F be the perfect representation of L ; thus $F(x)$ ($x \in L$) is the set of all dual prime ideals containing x . For a subset S of L , set $F(S) = \bigcap_{x \in S} F(x)$, $G(S) = \bigcup_{x \in S} F(x)$.

In the set Ω_0 of all dual prime ideals of L a topology is introduced by defining the closure of A ($A \subset \Omega_0$) to be $FF^{-1}(A)$. Another topology is defined in Ω_0 by defining the open kernel of A to be $GG^{-1}(A)$. Study of these topologies leads to a topological characterization of the complete distributive lattice formed by all those ideals in L which are factorizable into prime ones; the result generalizes earlier works by Stone and Wallman. An ideal of L is called neutral if it is neutral, in the sense of Birkhoff, as an element of the lattice of all ideals of L . A neutral ideal J gives rise to a congruence in L , and the corresponding quotient lattice is denoted by L/J . If X, Y are neutral ideals, $X \cup Y/X$ and $Y/X \cap Y$ are isomorphic; if here $X \subset Y$ then $(L/X)/(Y/X)$ and L/Y are isomorphic. The correspondence between congruences and (neutral) ideals is studied, to yield partial solutions of Birkhoff's (Lattice Theory, rev. ed., New York 1948, this. Zbl. 33, 101) problems 72, 73. Finally, maximal proper sublattices of a distributive lattice are studied, and are determined, in connection of a problem of Birkhoff and an example of Takeuchi (this. Zbl. 43, 35).

T. Nakayama.

Mal'cev, A. I.: Über eine Darstellung der nichtassoziativen Ringe. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 181—185 (1952) [Russisch].

Sia A un anello associativo con un campo Ω di operatori. Introduciamo per ogni coppia x, y di elementi di A una nuova operazione di prodotto (simbolo: $^\circ$) nel seguente modo: (1) $x^\circ y = a_i x b_i y c_i + f_i y g_i x h_i$, (a_i, \dots, h_i sono elementi fissi di A ; $i = 1, 2, \dots, r$). — Allora gli elementi di A rispetto alla vecchia addizione e alla nuova moltiplicazione $x^\circ y$ formeranno ancora un anello con lo stesso campo di operatori Ω , in generale però non-associativo. [Esempi: l'anello di Lie e quello di Jordan: $x^\circ y = xy - yx$; $x^\circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.] — Viceversa: il più generale anello non-associativo si può immaginare ottenuto da un anello associativo A quando in esso si introduca una nuova moltiplicazione con una formula del tipo (1). L'A. dimostra, più precisamente, che ogni anello non-associativo con operatori è isomorfo a un $^\circ$ -subanello di un anello associativo con il medesimo campo di operatori. Inoltre fa vedere che, invece di $^\circ$ -operazioni bilineari generali, è sufficiente prendere in considerazione operazioni del tipo: $x^\circ y = axy$.

L. Lombardo-Radice.

Schöneborn, Heinz: Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. I. Primäre, kompakte Linearformenmoduln. J. reine angew. Math. 189, 168—185 (1951).

Schöneborn, Heinz: Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. II. Nichtarchimedisch perfekt bewertete, operatorreduzierte Linearformenmoduln. J. reine angew. Math. 189, 193—203 (1952).

Es sei M ein Linearformenmodul mit abzählbar vielen Unbestimmten u_i über dem Ring P der ganzen p -adischen Zahlen; auch unendlich viele der Koeffizienten der u_i dürfen von Null verschieden sein. Mittels der in P erklärten Bewertung und des üblichen p -adischen Limes wird eine Bewertung und ein Limesbegriff in M eingeführt, so daß alle naheliegenden Kompatibilitätsrelationen erfüllt sind. Dann wird M zu einem kompakten topologischen Raum. Die erwähnten Begriffe dienen als Hilfsmittel zu einer ausführlichen Untersuchung verschiedener Eigenschaften von M , so z. B. werden Erzeugendensysteme, Basen, lineare Transformationen, Untermoduln, sog. Grundmoduln betrachtet und diejenigen Untermoduln charakterisiert, die eine aus Vielfachen der Elemente einer Basis von M bestehende Basis besitzen. (Für die Untermoduln ist natürlich auch Abgeschlossenheit gegenüber der Limesbildung zu fordern.) — Im ersten Teil des zweiten Artikels zeigt Verf., daß der Linearformenmodul M eine Reihe von ähnlichen Eigenschaften besitzt, wenn man statt P einen beliebigen Körper K zugrunde legt, der auf triviale Weise topologisiert wird (d. h. eine Folge genau dann den Limes α hat, wenn fast alle ihrer Glieder gleich α sind). Im zweiten Teil wird angenommen, daß K mit dem Körper der p -adischen Zahlen übereinstimmt, und gleichzeitig wird sowohl der

Multiplikatorenbereich von M auf P eingeschränkt, als auch die in M eingeführte Topologie im üblichen Sinne genommen. Die Konvergenzeigenschaften in dem so entstehenden (P, K) -Modul R , sowie die Untermoduln von R werden untersucht.

L. Fuchs.

Waddell, Mathews C.: Properties of regular rings. Duke math. J. **19**, 623—627 (1952).

Die Analoga von verschiedenen wohlbekannten Eigenschaften der halbeinfachen Ringe werden für die folgenden drei Arten der regulären Ringe untersucht: 1. reguläre Ringe (von Neumann, dies. Zbl. **15**, 388), d. h. Ringe R , in denen es zu jedem $a \in R$ ein $x \in R$ mit $axa = a$ gibt; 2. stark-reguläre Ringe, in denen dasselbe mit $a^2 \in a$ gilt; schließlich: 3. bireguläre Ringe (beide von Arens und Kaplansky, dies. Zbl. **32**, 7), in denen jedes (zweiseitige) Ideal durch ein im Zentrum liegendes idempotentes Element erzeugt werden kann. Von den zahlreichen, sich hauptsächlich auf die Eigenschaften der Ideale der drei Ringtypen beziehenden Behauptungen sei nur die folgende erwähnt: Besitzt jedes maximale Ideal in einem biregulären Ring ein von Null verschiedenes annullierendes Ideal, so bilden die Ideale eine Boolesche Algebra, und der Ring ist als direkte Summe seiner minimalen Ideale darstellbar.

L. Fuchs.

Hua, Loo-Keng: A note on the total matrix ring over a non-commutative field. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 188—198 (1952).

Let R be any ring. Then the module (= additive subgroup) generated by the commutators $[a, b] = ab - ba$ ($a, b \in R$) is called the derived Lie module of R . A submodule M of R is called normal, if it admits all the automorphisms $x \rightarrow a^{-1}xa$, where a is any invertible element of R . The author considers the derived Lie module of K_n , the ring of all $n \times n$ matrices over a (not necessarily commutative) field K . Denote this module by L_n , and denote the derived Lie module of K itself by L . Then (Theorem 2) a normal submodule of K_n is either in the centre of K_n , or it contains L_n with one exception when $n = 2$ and K has only 2 elements (in the statement and proof of this Theorem read K_n for K in several places). As a corollary the author shows (Th. 3) that K_n has no proper normal subring not contained in the centre (with one exception as before), and (Th. 4) that every element of K_n can be written as a finite sum of terms $\pm ab a^{-1} b^{-1}$ ($a, b \in K_n$) (with the same exception). The proofs are direct and use the Theorem [Hua, J. Chinese math. Soc. **1**, 109—163 (1952)] that any matrix of K_n is in L_n if and only if its trace is in L . — Next the author considers the Jordan multiplication $\{a, b\} = ab + ba$ in K_n ; he proves the analogue of Th. 3 for normal Jordan subrings (if K has characteristic $\neq 2$) and states such an analogue for Lie subrings (with an exceptional case) and Lie triple systems. — The author then defines a subset of a ring R to be weakly normal in R , if it admits the mapping $x \rightarrow axa^{-1} + a^{-1}xa$ for every invertible $a \in R$ and generalises Th. 2 by proving that every weakly normal submodule of K_n is contained in the centre of K_n or contains L_n , where K has now a characteristic $\neq 2$. This has similar consequences as Th. 2. If K_n is regarded as a Lie ring, every ideal of K_n not contained in the centre of K_n contains L_n , and the Lie ring L_n has no proper ideal not contained in the centre of K_n . Regarded as a Jordan ring, K_n is simple, i. e. it has no proper non-zero ideal.

P. M. Cohn.

Kasch, Friedrich: Ein Satz über den Endomorphismenring eines Vektorraums. Arch. der Math. **3**, 434—435 (1952).

Ω sei ein endlich- oder unendlichdimensionaler Linksvektorraum über dem nicht notwendig kommutativen Körper H , und \mathfrak{E} sei der Endomorphismenring von Ω über H . Verf. beweist dann folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Jacobson: Ist $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{E}$ ein einfach-transitiver Modul mit einem zweifach-transitiven Ring $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ als Rechtsoperatorenbereich, so ist \mathfrak{R} für jede natürliche Zahl n auch n -fach transitiv, also dicht. In einfacher Weise folgt: Jeder in \mathfrak{E} enthaltene Modul mit einem einfach-transitiven Ring als Links- und einem zweifach-transitiven Ring als Rechtsoperatorenbereich ist dicht. Im Falle endlicher Dimension von Ω folgt hieraus: Ist \mathfrak{A} ein einfach-transitiver Unterring von \mathfrak{E} , so ist \mathfrak{E} , aufgefaßt als \mathfrak{A} -Links- und \mathfrak{E} -Rechtsmodul, irreduzibel. Ist schließlich K ein Oberkörper endlichen Ranges über H , so folgt für den Endomorphismenring \mathfrak{E} des H -Linksvektorraumes K : \mathfrak{E} ist als K_r -Links- und \mathfrak{E} -Rechtsmodul irreduzibel. K_r bedeutet dabei denjenigen Unterring von \mathfrak{E} , der aus den als Rechtsmultiplikatoren aufgefaßten Elementen von K besteht.

H.-J. Kowalsky.

Ikeda, Masatoshi: On a theorem of Kaplansky. Osaka math. J. 4, 235—240 (1952).

The author establishes in the paper the following theorem: Let D be a division ring with center Z and let C_i ($i = 0, 1, \dots, r$) be $r + 1$ fixed non-zero elements in the prime subfield of D . If, for every element x in D , there are integers $n_0(x) > n_1(x) > \dots > n_r(x) > 0$ such that 1. $\sum_{i=0}^r C_i x^{n_i(x)}$ is in Z and 2. $n_1(x)$ is uniformly bounded, then D is commutative.

L. K. Hua.

Rédei, L.: Über die Determinantenteiler. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 143—150 (1952).

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und M sei eine (m, n) -reihige Matrix mit Elementen aus R . \mathfrak{D}_k bedeute den k -ten Determinantenteiler von M , d. h. das durch alle Unterdeterminanten k -ter Ordnung von M erzeugte Ideal in R , ferner sei $\mathfrak{D}_0 = 1$, $\mathfrak{D}_k = 0$, falls $k > m$ oder $k > n$. Für die Dedekindschen Ringe gilt bekanntlich $\mathfrak{D}_k^2 \mid \mathfrak{D}_{k-1} \mathfrak{D}_{k+1}$ ($k \geq 1$). Im allgemeinen Fall trifft dies nicht zu, wie Verf. durch ein Beispiel zeigt. Verf. beweist, daß $\mathfrak{D}_k^2 \mid \bar{k} \mathfrak{D}_{k-1} \mathfrak{D}_{k+1}$ ($k \geq 1$) allgemein gilt, wobei \bar{k} das k. g. V. von $1, \dots, k$ bezeichnet. *K. Asano.*

Murdoch, D. C.: Contributions to noncommutative ideal theory. Canadian J. Math. 4, 43—57 (1952).

Anschließend an N. H. McCoy (dies. Zbl. 35, 18) untersucht Verf., wie weit sich die bekannten Sätze über Primärkomponentenzerlegung in kommutativen Ringen mit Maximalbedingung auf das Nichtkommutative übertragen lassen. Ist zunächst R ein ganz beliebiger Ring, so versteht Verf. nach McCoy unter einem m -System eine Untermenge M von R , bei der es zu jedem Elementepaar a, b aus M ein $x \in R$ gibt, derart daß $a x b \in R$. Wie McCoy bezeichnet er als das Radikal $\mathfrak{r}(a)$ des (zweiseitigen) R -Ideals a das Ideal aller der x , die die Eigenschaft besitzen, daß kein x enthaltendes m -System zu a elementfremd ist. Ist ferner M ein nicht nur aus 0 allein bestehendes m -System, N eine Obermenge von M , so nennt Verf. N ein rechts- M - n -System, wenn zu jedem Elementepaar $m \in M$, $n \in N$ ein $x \in R$ mit $n x m \in N$ existiert. Er zeigt nun (unter konventioneller Bevorzugung der rechten Seiten), daß sich jedem Ideal a und jedem m -System M zwei Oberideale $\mathfrak{l}_r(a, M)$ bzw. $\mathfrak{u}_r(a, M)$ zuordnen lassen, die beide im kommutativen Fall in das durch M erzeugte i. K. I. (isoliertes Komponentenideal) von a übergehen. $\mathfrak{l}_r(a, M)$ wird in unmittelbarer Analogie zum Kommutativen definiert als die Menge aller der x , zu denen es ein $m \in M$ gibt, derart daß $x R m \subseteq a$; die Idealeigenschaft von $\mathfrak{l}_r(a, M)$ ist fast selbstverständlich. $\mathfrak{u}_r(a, M)$ besteht aus allen und nur den x , bei denen jedes x enthaltende rechts- M - n -System mit a einen nichtleeren Durchschnitt hat; der Beweis der Idealeigenschaft von $\mathfrak{u}_r(a, M)$ erfordert eine Reihe von Hilfssätzen. Es ist stets $\mathfrak{l}_r(a, M) \subseteq \mathfrak{u}_r(a, M)$. Bildet man $\mathfrak{l}_r^{(2)}(a, M) = \mathfrak{l}_r(\mathfrak{l}_r(a, M))$, $\mathfrak{l}_r^{(3)}(a, M) = \mathfrak{l}_r(\mathfrak{l}_r^{(2)}(a, M))$, \dots , so wird für eine eventuell transfinite — Ordnungszahl α : $\mathfrak{u}_r(a, M) = \mathfrak{l}_r^{(\alpha)}(a, M)$. — Beschränkt man sich auf nichtkommutative Ringe mit Maximalbedingung, so erhält man zunächst ganz analog wie im Kommutativen: Jedes Ideal hat nur endlich viele minimale Primoberideale, und es ist kein minimales Primoberideal von a zu a rechtsprim. Nennt man ferner ein Ideal q rechtsprimär, wenn jedes nicht zu $\mathfrak{r}(q)$ gehörige Element x zu q rechtsprim ist, so ergibt sich auf Grund der Maximalbedingung: $\mathfrak{r}(q)$ ist das einzige minimale Primoberideal von q . Ist $\mathfrak{r}(q_1) \neq \mathfrak{r}(q_2)$, so ist der Durchschnitt $q_1 \cap q_2$ der Rechtsprimärideale q_1, q_2 niemals rechtsprimär; ist dagegen $\mathfrak{r}(q_1) = \mathfrak{r}(q_2)$, so ist auch $q_3 = q_1 \cap q_2$ rechtsprimär, und man hat $\mathfrak{r}(q_3) = \mathfrak{r}(q_1) = \mathfrak{r}(q_2)$. Besitzt a eine Komponentenzerlegung in Rechtsprimärideale: $a = q_1 \cap \dots \cap q_n$, und normiert man, was stets möglich, die Zerlegung so, daß keine Komponente überflüssig ist, und daß $\mathfrak{r}(q_i) \neq \mathfrak{r}(q_k)$ ($i \neq k$), so ist n und die Menge der $\mathfrak{r}(q_i)$ ($i = 1, \dots, n$) durch a allein eindeutig bestimmt. Die Primideale $\mathfrak{r}(q_i)$, zu denen kein $\mathfrak{r}(q_k) \supset \mathfrak{r}(q_i)$ existiert, sind gerade die sämtlichen minimalen Primoberideale von a . Ist \mathfrak{p} ein beliebiges Primideal aus R , das bei passender Numerierung zwar $\mathfrak{r}(q_1), \dots, \mathfrak{r}(q_r)$, aber nicht $\mathfrak{r}(q_{r+1}), \dots, \mathfrak{r}(q_n)$ enthält, so wird $q_1 \cap \dots \cap q_r = \mathfrak{u}_r(a, R - \mathfrak{p})$. Für diejenigen Ideale, die eine Komponentenzerlegung in endlich viele Rechtsprimärideale zulassen, gelten also im Nichtkommutativen ganz entsprechende Sätze wie im Kommutativen. Während aber in einem kommutativen Ring mit Maximalbedingung jedes Ideal eine solche Zerlegung besitzt, sind, wie Verf. zeigt, schon in dem ganz einfachen Ring $K_0[x, y]$ der Polynome zweier nichtkommutativer Variabler x, y mit rationalen Koeffizienten die Ideale (x, y) , $(x^2, x y)$ nicht Durchschnitte von endlich vielen Rechtsprimäridealen. Die für Zerlegungen in endlich viele Rechtsprimärideale geltenden Sätze besitzen also leider im Nichtkommutativen eine viel stärker begrenzte Anwendungsmöglichkeit als im Kommutativen.

W. Krull.

Witt, Ernst: Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper. *J. reine angew. Math.* **190**, 231—245 (1952).

Es seien \mathfrak{G} eine endliche Gruppe mit der Regel $x^q = 1$, χ ein absolut irreduzibler Charakter von \mathfrak{G} , K ein algebraischer Zahlkörper und \mathfrak{A} der einfache Bestandteil der Wedderburnschen Zerlegung des Gruppenrings $K\mathfrak{G}$ von \mathfrak{G} mit $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0$. In dieser Arbeit löst Verf. die Aufgabe, das von Hasse angegebene volle Invariantensystem von \mathfrak{A} aus der Gruppentafel von \mathfrak{G} und den Werten des Charakters χ zu bestimmen. Insbesondere bekommt er so den Schurschen Index $[\mathfrak{A}]$. — Zunächst beweist Verf. in einfacher Weise, daß jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ einer primzahlstufigen Hauptreihe besitzenden Gruppe \mathfrak{G} durch Matrizen aus einem Schiefkörper \mathfrak{S} endlichen Ranges über K die Induzierte einer metabelschen Darstellung $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ einer Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{G} ist. Dabei ist $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ eine irreduzible primitive Darstellung und kann als treue Darstellung der Faktorgruppe $\mathfrak{h} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ aufgefaßt werden. Ein maximaler abelscher Normalteiler von \mathfrak{h} ist eine zyklische Gruppe (b) mit $Nb = (b)$, und $\mathfrak{h}/(b)$ ist abelsch. Die b entsprechende Matrix B in $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ genügt der in K irreduziblen Gleichung $f(B) = 0$, und der Quotientenring $K \mathfrak{h}/f(b)$ ist eine einfache Algebra, die Verf. elementar nennt. Ist $\mathfrak{S} = K$ und enthält H die g -ten Einheitswurzeln, so ist $\mathfrak{h} = (b)$, und \mathfrak{d}/K ist einreihig. In diesem Fall reduziert sich dieser Satz im wesentlichen auf den Satz von Blichfeld [Trans. Amer. math. Soc. **4**, 387—397 (1903), **5**, 310—325 (1904)]. Verf. überträgt dann die ganze Charakterentheorie allgemeiner auf Darstellungen durch Matrizen aus \mathfrak{S} . Insbesondere wird der Brauersche Induktionssatz (R. Brauer, dies. Zbl. **29**, 15; insbesondere S. 503 dieser Arbeit) in dieser Allgemeinheit formuliert und im folgenden als wesentliches Hilfsmittel gebraucht. Die engen Beziehungen zur Brauerschen Theorie über den modularen Gruppenring werden auch gestreift. — Verf. untersucht dann die Bestimmung der Struktur von \mathfrak{A} durch die Werte von χ . Es sei ψ ein absolut irreduzibler Charakter einer Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{G} und \mathfrak{B} sei der einfache Bestandteil von $K\mathfrak{H}$ mit $\psi(\mathfrak{B}) \neq 0$. Die Werte von χ, ψ mögen in K liegen, d. h. die Algebren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind normal. χ komme im induzierten Charakter $\hat{\psi}$ genau (χ, ψ) -mal vor. Geht die Primzahl p nicht in (χ, ψ) auf, so sind die p -Bestandteile der zugeordneten Algebren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ einander ähnlich. Da eine Algebrenklasse Produkt ihrer p -Bestandteile ist und da eine p -reguläre Erweiterung von K niemals den p -Bestandteil zerstört, darf für die Untersuchung angenommen werden, daß der Grad $(K(\sqrt[p]{1}) : K)$ eine p -Potenz ist. Dann gibt es nach dem Induktionssatz zu einem absolut irreduziblen Charakter χ von \mathfrak{G} mit Werten aus K einen elementaren (d. h. einer elementaren Algebra $\mathfrak{B} = K \mathfrak{h}/f(b)$ entsprechenden) absolut irreduziblen Untergruppencharakter ψ mit Werten aus K mit $(\psi, \chi) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Die zugeordneten Algebren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind dann ähnlich. Damit ist die Struktur von \mathfrak{A} auf die Struktur der elementaren Algebra \mathfrak{B} zurückgeführt. Die q -adische Hasse-Invariante kann nun unter Benutzung der Verlagerungstheorie des Verf. für Algebren direkt aus der Gruppentafel von \mathfrak{H} numerisch bestimmt werden. Insbesondere ist diese Invariante gleich Null, wenn K die $(q-1)$ -ten Einheitswurzeln enthält (bzw. $\sqrt[q-1]{-1}$ für $q = 2$).

^a K. Asano.

Fuchs, L. and T. Szele: Contribution to the theory of semisimple rings. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **3**, 233—239 (1952).

Die Arbeit ist eine interessante Studie zum Wedderburnschen Hauptsatz über Algebren. Bekanntlich ist bei dessen Beweis wesentlich, daß die Linksideale der halbeinfachen Ringe mit Minimalbedingung von idempotenten Elementen erzeugt werden. — Verf. stellt sich zunächst die Frage, ob es noch andere Ringe mit dieser Eigenschaft gibt, und beantwortet sie verneinend. Dabei wird verwendet, daß die Existenz eines idempotenten erzeugenden Elementes für ein Linksideal L eines beliebigen Ringes mit der Existenz einer Rechtseins in L gleichbedeutend ist. Hiermit lassen sich auch leicht die Ringe charakterisieren, in denen jedes Linksideal eine Linkseins besitzt: Es sind die direkten Summen von Schiefkörpern. Daraus folgt schließlich mit einem Satz von N. Jacobson, daß ein Ring, in dem jeder Teilring eine Linkseins besitzt, direkte Summe von solchen (kommutativen) Körpern ist, die algebraisch über einem endlichen Körper sind. Umgekehrt haben alle diese Summen die vorausgesetzte Eigenschaft.

W. Gaschütz.

Hattori, Akira: On the multiplicative group of simple algebras and orthogonal groups of three dimensions. *J. math. Soc. Japan* **4**, 205—217 (1952).

A sei eine zentrale, einfache Algebra von endlichem Rang n über dem Körper F . Ist B eine einfache Teilalgebra von A , so wird bekanntlich die Menge $[B]$ aller mit B isomorphen Teilalgebren von A unter der inneren Automorphismengruppe $J(A)$ von A transitiv permutiert. Verf. beweist in Verallgemeinerung eines Satzes von H. Cartan (R. Brauer, dies. Zbl. **37**, 24), daß die Permutationsgruppendarstellung über $[B]$, die $J(A)$ hierdurch erfährt, stets treu ist, wenn $B \neq A, F$. Ist $\text{Char } F \neq 2$, so läßt sich dieses Ergebnis geometrisch in der folgenden Weise

interpretieren: M sei eine symmetrische Matrix, die die reguläre Linksdarstellung von A in die reguläre Rechtsdarstellung transformiert, $J(s)$ die zu der linearen Transformation $t \rightarrow st s^{-1}$, $s, t \in A$, gehörige Matrix. Man bestätigt leicht, daß $J(s) \in O_n^+(F, f)$ ist, wobei f die zu der Matrix M gehörige quadratische Form ist. Der A zugrunde liegende Vektorraum wird damit zu einem n -dimensionalen metrischen Raum F^n . Für $t_0 \in A$, $t_0 \notin F$ sei $G(t_0) = 0$ die irreduzible Gleichung in F . Die Punkte $t \in A$ mit $G(t) = 0$ bilden eine algebraische Mannigfaltigkeit in F^n . Das obige Resultat besagt dann, daß ihre Punkte durch $J(A)$ transitiv permutiert werden. — Als Spezialfälle untersucht Verf. die verallgemeinerten Quaternionenalgebren $A = (a, b) = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, $u_0 = 1$, $u_3 = u_1 u_2 = -u_2 u_1$, $u_1^2 = a$, $u_2^2 = b$, $a, b \in F$. Es besteht hier die Isomorphie $(J) J(A) \cong O_3^+(J, f)$, $f(t) = a t_1^2 + b t_2^2 - a b t_3^2$, wie man nach Abspaltung des Zentrums $\{u_0\}$ einsehen kann. Ist umgekehrt $f(t) = p t_1^2 + q t_2^2 + r t_3^2$ nicht ausgeartet, so ist $J((-q r, -p r)) \cong O_3^+(F, f)$. Einem Gedanken J. Dieudonné's folgend, erschließt Verf. hieraus für den Fall, daß F ein algebraischer Zahlkörper ist, der höchstens eine reelle unendliche Primstelle hat, und f die 0 nur trivial darstellt, die Existenz einer Normalkette $O_3^+(F, f) \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots; \bigcap_i N_i = 1; O_3^+/N_i, N_i/N_{i+1} (i = 1, 2, \dots)$ abelsch. Das ist ein neues Beispiel da-

für, daß die Strukturen der eigentlichen orthogonalen Gruppen im nichtisotropen Falle wesentlich von den in isotropen Räumen gültigen Verhältnissen abweichen können. Schließlich stellt sich Verf. die Frage, ob die bei verallgemeinerten Quaternionenalgebren bestehende Isomorphie (J) auch in anderen Fällen eintritt, und verneint sie im wesentlichen: A sei eine nichtkommutative Algebra vom Range n über F mit Einselement und Zentrum Z vom Range l . Gibt es dann eine nichtausgeartete quadratische Form f über dem A zugrunde liegenden Vektorraum, für die der durch Z gegebene Teilraum nicht isotrop ist, und ist Z^* das orthogonale Komplement zu Z , f^* die Verkürzung von f auf Z^* , so werden nur dann alle Elemente aus $O_{n-2}^+(F, f^*)$ durch innere Automorphismen von A induziert, wenn A direkte Summe einer verallgemeinerten Quaternionenalgebra und einer kommutativen Algebra über F ist.

W. Gaschütz.

Kawada, Yukiyo: On the derivations in simple algebras. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 2, 1—8 (1952).

Es seien \mathfrak{D} ein Ring mit Einheitsselement 1, \mathfrak{o} ein Teilring von \mathfrak{D} und \mathfrak{M} ein zweiseitiger \mathfrak{D} -Modul mit $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ ($m \in \mathfrak{M}, 1 \in \mathfrak{D}$). Der Faktormodul $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{M})$ aller Ableitungen von \mathfrak{D} über \mathfrak{o} in \mathfrak{M} nach dem Modul aller inneren Ableitungen D_m (definiert durch $D_m a = a m - m a$; $a \in \mathfrak{D}, m \in \mathfrak{M}$) heiße erste relative Kohomologiegruppe von \mathfrak{D} über \mathfrak{o} in \mathfrak{M} . Verf. macht Aussagen über $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\mathfrak{Z})$ für Hauptordnungen \mathfrak{D} zentraler einfacher Algebren über Zahlkörpern mit Ganzzahligkeitsbereich \mathfrak{o} , wobei \mathfrak{Z} ein zweiseitiges Ideal in \mathfrak{D} ist. — Es seien zunächst \mathfrak{A} eine zentrale Divisionsalgebra über einem p -adischen Zahlkörper k_p mit Ganzzahligkeitsbereich \mathfrak{o} und zugehörigem Primideal \mathfrak{p} , \mathfrak{D} ihre eindeutige Maximalordnung mit zugehörigem Primideal \mathfrak{P} , und $[\mathfrak{A} : k_p] = n^2$. Dann ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^r)$ dem Galoisfeld $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ additiv isomorph, falls $r \not\equiv 1 \pmod{n}$, sonst $\cong (0)$. — Der Fall einer zentralen einfachen Algebra \mathfrak{A} läßt sich unter Benutzung Hassescher Methoden (Hasse, dies. Zbl. 1, 198) auf den vorhergehenden zurückführen: Wird \mathfrak{A} in der Form $\mathfrak{A} \times k_s$ (\mathfrak{A} zentrale Divisionsalgebra, k_s voller Matrizenring) dargestellt sowie mit \mathfrak{D} die Maximalordnung von \mathfrak{A} und mit \mathfrak{P} ihr zugehöriges Primideal bezeichnet, so folgt $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^r) \cong \mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^r)$. Ähnlich wie im Falle der Zahlkörper (Y. Kawada, dies. Zbl. 44, 267) wird schließlich der Übergang zum Großen und zu allgemeinerem \mathfrak{D} -Modul durch den Isomorphismus $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\Pi \mathfrak{P}_i^{e_i}) \cong \sum \mathfrak{S}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_i}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{P}_i^{e_i})$ vollzogen, wobei nun \mathfrak{D} eine Maximalordnung einer zentralen einfachen Algebra über einem endlich-algebraischen Zahlkörper bedeutet und die Suffixe wie üblich die entsprechenden Begriffe bei den p_i -adischen Hüllen anzeigen. — Zum Schluß wird im Verlauf einer Abschätzung der Elementanzahl von $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\Pi \mathfrak{P}_i^{e_i})$ eine Beziehung zur Differente von \mathfrak{D} hergestellt.

A. Jaeger.

Jacobson, N.: Operator commutativity in Jordan algebras. Proc. Amer. math. Soc. 3, 973—976 (1952).

Zwei Elemente a, b einer Jordanschen Algebra \mathfrak{A} heißen operatorvertauschbar, wenn die ihnen durch $x \cdot a = R_a x$, $x \cdot b = R_b x$ zugeordneten linearen Transformationen R_a, R_b von \mathfrak{A} vertauschbar sind. Ist \mathfrak{B} eine Teilmenge von \mathfrak{A} , so wird mit $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$ die Menge der mit \mathfrak{B} operatorvertauschbaren Elemente aus \mathfrak{A} bezeichnet. Ist \mathfrak{A} eine spezielle Jordansche Algebra, d. h. in eine assoziative Algebra \mathfrak{A}^* so eingebettet, daß das Jordansche Produkt $a \cdot b$ aus dem assoziativen Produkt ab in der Form $a \cdot b = ab + ba$ entsteht, so sind a, b dann und nur dann operatorvertauschbar in \mathfrak{A} , wenn $ab - ba$ im Zentrum von \mathfrak{A}^* liegt. Hieraus konstruiert

Verf. ein Beispiel, wo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$ keine Teilalgebra ist. — Im Anschluß an zwei vorangehende Arbeiten (dies. Zbl. 43, 268; 44, 25) beweist aber Verf. folgende drei Sätze. 1. Ist \mathfrak{A} speziell, von Char. 0, von endl. Rang, halbeinfach, so ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$ Teilalgebra für jede Teilmenge \mathfrak{B} . — 2. Ist \mathfrak{A} von Char. 0 und \mathfrak{B} Teilalgebra von endl. Rang, halbeinfach, so ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$ Teilalgebra. — 3. Ist \mathfrak{A} von Char. 0, von endl. Rang, halbeinfach und \mathfrak{B} halbeinfache Teilalgebra, so ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$ halbeinfache Teilalgebra.

H. Hasse.

Tornheim, Leonard: On the definition of Clifford algebras. Michigan math. J. 1, 194—197 (1952).

Ref. hatte eine Cliffordsche Algebra C über einem Körper k der Charakteristik $\neq 2$ als den Restklassenring des durch n Elemente u_i erzeugten freien assoziativen Ringes \mathfrak{R} über k nach dem durch die „Regeln“ $(u_i u_k + u_k u_i - \delta_{ik} a_i)$ erzeugten gleichseitigen Ideal \mathfrak{I} definiert; dabei sei $0 \neq a_i \in k$. (M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin 1952, S. 22). Verzichtet man darauf, die Übereinstimmung dieser Definition mit der üblichen (vgl. C. Chevalley, Theory of Lie groups, vol. 1, New York 1946, p. 61) zu zeigen (was keine Schwierigkeit macht), so muß man zeigen, daß die Elemente $1, u_{(i_1, \dots, i_m)} = u_{i_1} \cdots u_{i_m}$ ($i_1 < \dots < i_m; 1 \leq m \leq n$) modulo \mathfrak{I} linear unabhängig sind. Verf. versucht dies durch die Abbildung $u_{v_1} \cdots u_{v_n} \rightarrow (-1)^\mu x_{v_1} \cdots x_{v_n}$, wobei μ die Anzahl der Inversionen von v_1, \dots, v_n gegenüber der natürlichen Anordnung ist. Er nimmt irrtümlicherweise an, daß diese Abbildung ein Homomorphismus von \mathfrak{R} auf den kommutativen Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ sei. — Die fragliche lineare Unabhängigkeit ergibt sich aber direkt aus der Tatsache, daß jedes Monom $u_{v_1} \cdots u_{v_n}$ auf Grund der Regeln lediglich durch Vertauschung verschiedener und Zusammenfassung gleicher Faktoren in die normierte Gestalt $c \cdot u_{(i_1, \dots, i_m)}$, $c \in k$, gebracht werden kann; bei Verwendung des geschilderten Normierungsverfahrens ist sie eindeutig bestimmt. Eine in \mathfrak{R} bestehende Relation $F = 0$ liefert verschwindende Koeffizienten dieser $u_{(i_1, \dots, i_m)}$, wenn man sie in Monome auflöst und diese normiert. Würde nun mit gewissen A_{jk}, B_{jk} in \mathfrak{R} eine Gleichung $\sum c_{i_1, \dots, i_m} u_{(i_1, \dots, i_m)} = \sum A_{jk} (u_i u_k + u_k u_j - \delta_{jk} a_j) B_{jk} = \sum (A_{jk} u_j u_k B_{jk} + A_{jk} u_k u_j B_{jk} - \delta_{jk} a_{kj} A_{jk} B_{jk})$ bestehen, so würde die Auflösung der rechten Seite in Monome und deren anschließende Normierung diese zum Verschwinden bringen. Mithin müßten auch die $c_{i_1, \dots, i_m} = 0$ sein. — Ref. bedauert, diesen einfachen Schluß in seinem Buch nicht ausgeführt zu haben. M. Eichler.

Papy, Georges: Sur l'arithmétique dans les algèbres de Grassmann. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, 26, Nr. 8, 108 p. (1952).

Soit un A -module, de dimension paire $2n$, défini sur un anneau d'intégrité A , de caractéristique quelconque. On considère l'algèbre extérieure sur cet A -module et la forme quadratique extérieure $H = x_1 \wedge y_1 + \dots + x_n \wedge y_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, où $\{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n\}$ désigne une base du A -module, dont les puissances réduites successives sont $H^1 = H$, $H^2 = \sum_{i < j} \alpha_i \wedge \alpha_j, \dots, H^n = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$. Tout élément homogène de degré p (forme extérieure de degré p) supérieur à n : $p = n + k$, $k > 0$, appartient à l'idéal engendré par H^k, H^{k+1}, \dots ; cet idéal est principal lorsque la caractéristique de A est nulle ou est supérieur à n et l'on a alors la factorisation unique $F_{n+k} = L_{n-k} \wedge H^k$. L'A. détermine tous les cas où, quelle que soit la caractéristique de A , F_{n+k} possède encore une telle factorisation. Il faut et il suffit que $\binom{k+i}{k}$, $i = 1, 2, \dots$, divise le produit extérieur $F \wedge H^i$. Ce problème se réduit à celui de la discussion d'un système d'équations diophantiennes sur l'anneau A .

Th. Lepage.

Burger, E.: Über die Einzigkeit der Cayley-Zahlen. Bemerkung zu einer Arbeit von L. A. Skorniakov. Arch. der Math. 3, 298—302 (1952).

Der von Skorniakov (dies. Zbl. 41, 365) gegebene Beweis für die Einzigkeit der Cayley-Dickson-Algebren benützt neben elementaren Rechnungen aus der Theorie der Algebren einen Satz von Schafer über einfache zentrale alternative Algebren endlichen Ranges und einen Satz von Tichomirov aus der Theorie der einfachen Ringe. Diese Hilfsmittel erweisen sich als entbehrlich. Verf. ersetzt sie durch elementare Rechnungen, so daß der ganze Beweis elementaren Charakter erhält. Die Vereinfachung beginnt, nachdem für jedes Element eines echten Alternativkörpers K eine Darstellung gewonnen wurde $t = \sum \alpha_i e_i$, wo die e_i aus einem speziellen Tripel a, b, c erzeugt sind und Basis einer Cayley-Dickson-Algebra C über $P(a^2, b^2, c^2)$ sind; dabei ist P das Zentrum von K , und die α_i gehören zur Gesamtheit der mit jedem Element von C vertauschbaren Elemente von K . Diese

Gesamtheit erweist sich als ein Alternativkörper, der keine Cayley-Dickson-Algebra enthalten kann, mithin assoziativ ist und weiterhin in P enthalten ist, so daß $K = C$ folgt.

R. Moufang.

Kähler, Erich: *Sur la théorie des corps purement algébriques.* Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 69—82 (1952).

In diesem Vortrag bringt Verf. eine sehr interessante und heuristisch wertvolle, wenn auch manchmal schwer verständliche philosophische Deutung seiner Theorie der „rein algebraischen Körper“ (dies. Zbl. 43, 39); das sind Körper, die durch endlich viele algebraische und transzendente Adjunktionen zu einem Primkörper erzeugt werden können. Ausgehend von einem kommutativen Körper K wird ein Ring i , dessen Quotientenring K ist, ein „Bild“ von K genannt; ein Restklassenring i/a nach einem Ideal a heißt ein „Aspekt des Bildes i vom Ursprung a aus“. Der Aspekt heißt insbesondere „zentral“, wenn $i = \mathfrak{A}$ ein Stellenring und $a = \mathfrak{p}$ sein maximales Primideal ist. Dann heißt der Stellenring \mathfrak{A} eine „Erscheinung“ von K , „erzeugt durch eine Perspektive, deren Zentrum der zentrale Aspekt der Erscheinung \mathfrak{A} ist“; damit ist das maximale Primideal \mathfrak{p} von \mathfrak{A} gemeint. Zu den Perspektiven gehören demnach alle (nicht archimedischen) Bewertungen des Körpers; die zugehörigen Bewertungsringe sind „Erscheinungen“ des Körpers, gesehen von einer Perspektive, deren Zentrum im Primideal \mathfrak{p} liegt. Die Perspektive heißt „von endlicher Tiefe“, wenn das Primideal \mathfrak{p} eine endliche Basis besitzt. — Um den Körper K kennen zu lernen, muß man alle seine „Züge“ ermitteln, und zwar alle „ewigen Züge“, die nämlich in allen seinen Erscheinungen auftreten, wenigstens in allen „vollendeten“ Erscheinungen. Damit kommt man aber nur auf den zugrunde liegenden Zahlkörper, nämlich die größte algebraische Erweiterung des Primkörpers, die noch in K enthalten ist. Um hier mehr zu erreichen, betrachtet Verf. die „infinitesimalen Verschiebungen“ des Körpers K , das ist der Ring der alternierenden Differentialformen über i . Auf diese Weise kommt Verf. zum Begriff der „ m -fachen Polarisation des Bildes i “, und zur „ m -fachen Polarisierung“ des Körpers K . Sucht man nun die „ewigen Züge“ der Polarisierungen von K auf, so erhält man die Begriffe Irregularität, Geschlecht, Mehrgeschlechter, die in der algebraischen Geometrie seit langem studiert werden. — Die „Mannigfaltigkeit“ eines Körpers K ist die Menge seiner Perspektiven. Etwas umständlich definiert ist der Begriff des „Gebildes“ auf einer Mannigfaltigkeit, dem anschaulich wohl eine Untermannigfaltigkeit entsprechen dürfte. Verf. definiert ferner die charakteristische Funktion eines Gebildes und die zugehörigen ζ -Funktionen, deren Theorie besonders folgenreich sein dürfte.

W. Gröbner.

Krull, Wolfgang: *Über unendliche algebraische Erweiterungen bewerteter Körper.* Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 164—169 (1952).

Unter Vermeidung spezifisch topologischer Begriffe beweist Verf., daß bei abzählbar unendlichen algebraischen Erweiterungen der Quotient von Trägheits- nach Verzweigungsgruppe der Krull-Deuringschen Theorie (vgl. z. B. Krull, dies. Zbl. 41, 366, und die dort angegebene Literatur), der im endlichen Falle einer gewissen Hauptidealfaktorgruppe isomorph ist, sich der Charakterengruppe dieser Faktorgruppe isomorph zeigt (was natürlich im endlichen Falle von selbst gilt). — Es seien in der Körperkette $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \dots$ jedes \mathfrak{K}_i separabler Normalkörper über \mathfrak{K}_0 , $\mathfrak{K} = \bigcup_i \mathfrak{K}_i$ ein bewerteter Körper mit Bewertungsring \mathfrak{Q} ; $\mathfrak{K}_i, \mathfrak{K}_v$ bzw. $\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_v$ Trägheits- und Verzweigungskörper bzw. -gruppe über \mathfrak{K}_0 ; \mathfrak{H}_i bzw. \mathfrak{H}_v die Multiplikativgruppe aller von (0) verschiedenen \mathfrak{Q} -Hauptideale aus \mathfrak{K} mit zu \mathfrak{K}_i bzw. \mathfrak{K}_v gehöriger Basis; und \mathfrak{G}_i die Galoisgruppe von \mathfrak{K} über \mathfrak{K}_i . Bedeute $X(\mathfrak{F})$ die Charakterengruppe einer Gruppe \mathfrak{F} , so wird gezeigt: $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_v \cong X(\mathfrak{H}_v/\mathfrak{H}_i)$. Der Unterschied zum endlichen Falle ergibt sich wesentlich daraus, daß sich zwar nicht die Isomorphismen $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_0$, jedoch die Isomorphismen $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_i \cong X(\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_0)$ von i auf $i+1$ fortsetzen lassen.

A. Jaeger.

Krull, Wolfgang: *Über geschlossene Bewertungssysteme.* J. reine angew. Math. 190, 75—92 (1952).

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Bemerkung, daß in einem endlichen algebraischen Oberkörper \mathfrak{Q} einer einfach transzendenten Erweiterung $\mathfrak{K}_0(x)$ irgendeines Grundkörpers \mathfrak{K}_0 das System S^* aller möglichen Bewertungen B_τ von \mathfrak{Q} über \mathfrak{K}_0 vier wichtige Eigenschaften besitzt, nämlich (1) Endlichkeitsbedingung: für festes $a \in \mathfrak{Q}$ ist $w_\tau(a) \neq 0$ nur für endlich viele Bewertungen $B_\tau \in S^*$, (2) Geschlossenheitsbedingung: jeder Bewertung B_τ ist ein natürlicher Grad f_τ zugeordnet, so

daß $\sum_{B_\tau \in S^*} f_\tau w_\tau(a) = 0$ für alle $a \in \mathfrak{Q}$; sowie zwei weitere, die als Unabhängigkeitsbedingung im Kleinen bzw. im Großen bezeichnet werden. Verf. zeigt, daß man eine übliche Bewertungstheorie in algebraischen Funktionenkörpern mit $n > 1$ Variablen aufstellen kann, falls einige der erwähnten Eigenschaften etwas modifiziert werden und man sich gleichzeitig auf ein passend gewähltes Untersystem S^+ aller Bewertungen beschränkt. Die Konstruktion eines solchen Systems S^+ wird durch mit einem Kunstgriff eingeführte Graddefinition, eine ausführliche Untersuchung mit verschiedenen Eigenschaften versehener Bewertungssysteme, sowie eine passende Verallgemeinerung der für den Fall $n = 1$ zur Abschließung des Bewertungssystems benutzten Methode erzielt.

L. Fuchs.

Dürbaum, Hansjürgen: Über die Ganzheitsbereiche bewerteter Körper. Math. Z. 57, 86—93 (1952).

Ist φ eine Bewertung eines Körpers \mathfrak{K} , so ist der Ganzheitsbereich von φ [d. h. die Menge aller Elemente $a \in \mathfrak{K}$ mit $\varphi(a) \leq 1$] nur im nicht-archimedischen Fall eine Ordnung von \mathfrak{K} . Um eine einheitliche Kennzeichnung der Ganzheitsbereiche archimedischer und nicht-archimedischer Bewertungen zu erreichen, führt Verf. den Begriff des Halbringes ein; so nennt er eine Untermenge \mathfrak{o} eines Schiefkörpers \mathfrak{K} , wenn (1) $0, \pm 1 \in \mathfrak{o}$, (2) $a b \in \mathfrak{o}$, falls $a, b \in \mathfrak{o}$, (3) $z(\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) \subseteq \mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) z' \subseteq \mathfrak{o}$ für passende Elemente $z, z' (\neq 0)$ in \mathfrak{o} . Gilt außerdem (4) $a b a^{-1} \in \mathfrak{o}$ für $b \in \mathfrak{o}, a \in \mathfrak{K}$, so heißt \mathfrak{o} ein invarianter Halbring, und falls \mathfrak{K} der Quotientenkörper von \mathfrak{o} ist, eine Fastordnung (oder Halbordnung). [Z. B. bilden die rationalen Zahlen a mit $|a| \leq 1$, wie Verf. zeigt, die einzige maximale Fastordnung des rationalen Zahlkörpers, die keine Ordnung ist.] Es gilt: 1. die Ganzheitsbereiche der Bewertungen eines Körpers sind genau die maximalen Fastordnungen; 2. eine invariante Fastordnung eines Schiefkörpers ist genau dann der Ganzheitsbereich einer (nicht notwendig kommutativen) Bewertung, wenn sie maximale Fastordnung ist. Ein Beispiel zeigt, daß Behauptung 2. i. a. nicht gilt, wenn man sich auf kommutative Bewertungen beschränkt.

L. Fuchs.

Kustaanheimo, Paul and Bertil Qvist: On differentiation in Galois fields. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 137, 12 p. (1952).

Questa ricerca fa parte di una serie di lavori di un gruppo di matematici scandinavi miranti a utilizzare le geometrie finite sopra un campo di Galois GF_p come strumento matematico per una „fisica finita“ che abbia come limite la fisica ordinaria, „euclidea“ (v. ades. G. Järnefelte e P. Kustaanheimo, questo Zbl. 48, 371). Scelto un numero primo p tale che -1 non sia residuo quadratico in GF_p , gli AA. chiamano „reali“ i numeri di GF_p , „complessi“ quelli del suo ampliamento quadratico GF_{p^2} ; „funzione“ una corrispondenza biunivoca $Z = f(z)$ tra gli elementi di GF_{p^2} , „funzione reale“ una tale corrispondenza tra gli elementi di GF_p . Data la finitezza, ogni funzione può essere rappresentata sotto forma di polinomio. Gli AA. definiscono poi la „derivata“ della funzione $f(z)$ in GF_{p^2} come la media aritmetica di tutti i quozienti $[f(z+h) - f(z)]/h$, quando h assume tutti i valori di GF_{p^2} , escluso lo 0. Si tratta della estensione di una delle possibili definizioni della derivata ordinaria, sotto opportune condizioni di regolarità della funzione. La „derivata“ così definita per un polinomio rappresentante una funzione in GF_{p^2} ha la stessa forma della ordinaria derivata degli ordinari polinomi, e sono soddisfatte le ordinarie regole di differenziazione [Fino a questi risultati — § 1 — si può pervenire con un'altra generalizzazione — v. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I, 2 ed., Berlin, 1937 (questo Zbl. 16, 339), pag. 67]. Gli AA. definiscono poi (§ 2) la „derivata di $f(z)$ nella direzione u “ in GF_{p^2} come il valore medio di tutti i quozienti $[f(z + \lambda u) - f(z)]/\lambda u$ per tutti i valori „reali“ di λ diversi da 0 (u costante $\neq 0$ di GF_{p^2}). Le funzioni le cui derivate sono sempre (cioè per ogni valore di z) indipendenti dalla direzione vengono chiamate „funzioni analitiche“: esse sono tutte e sole le funzioni della forma: $f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$ (le a_k in GF_{p^2}) e perciò le „funzioni reali“ sono una particolare classe di funzioni analitiche. Scritta la $f(z)$ nella forma $f(z) = f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ (i unità immaginaria di GF_{p^2} , cioè $i^2 = -1$) viene dimostrato che le equazioni di Cauchy-Riemann sono ancora condizioni necessarie e sufficienti perchè $f(z)$ sia analitica (§ 3). Infine viene fatto vedere che la derivazione così introdotta in campi di Galois può essere definita implicitamente mediante 5 postulati, esprimenti talune regole della derivazione ordinaria (§ 4).

L. Lombardo-Radice.

Järnefelt, G.: On finite approximation of solutions of two ordinary differential equations belonging to the classical quantum mechanics. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 138, 23 p. (1952).

Welchen Sinn haben die Differentialgleichungen der Physik in einer Welt, die nur aus endlich vielen Objekten besteht und entsprechend durch eine endliche Geometrie dargestellt wird? Diese Frage wird an Hand der Differentialgleichungen $y' = \lambda y$ und $-y'' + x^2 y = \lambda y$ erörtert. Die allgemeine Lösung $y = \mu e^{\lambda x}$ der ersten Gleichung hat offenbar keinen Sinn in GF_p , wohl aber ist das Polynom $y(x, \lambda, \mu, k) = \mu(1 + \lambda x + \dots + \lambda^k x^k/k!)$ sinnvoll für Werte x, λ, μ, k , die ganzzahlig oder rational mit Nennern $\not\equiv 0 \pmod{p}$ sind. Damit aber diese Polynome als Näherungspolynome angesprochen werden können, ist nötig, daß die beobachtbaren GF_p -Werte von x, λ, μ, k, y in der Nähe des Bezugspunktes eine Anordnung besitzen, die mit der Anordnung der entsprechenden reellen Zahlen isomorph ist. P. Kustaanheimo (dies. Zbl. 39, 156—157) hat ein zahlentheoretisches Prinzip angegeben, um die Elemente von GF_p partiell-assoziativ zu ordnen, und gezeigt, daß es zu jeder (endlichen) Menge M absolut echter Brüche solche Primzahlen p gibt, daß die Elemente von M in GF_p in derselben Weise geordnet sind, wie die entsprechenden reellen Zahlenwerte. Mit Hilfe dieses Prinzips werden die Lösungen von $y' = \lambda y$ durch $y(x, \lambda, \mu, k)$ über einer endlichen Argumentmenge in GF_p angenähert; ähnlich für die 2. Differentialgleichung. Verf. macht weiter auf die einfache Form aufmerksam, welche die Diracfunktion in GF_p annimmt ($\delta(x) = 1 - x^{p-1}$), doch ist er selbst etwas skeptisch, ob das „dürftige Skelett“ eines Galois-Körpers zu einer zufriedenstellenden Darstellung der ganzen Quantenmechanik ausreichen kann.

F. W. Levi.

Jaeger, Arno: Partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik. Monatsh. Math. 56, 265—287 (1952).

Die Untersuchungen des Verf. über gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik (dies. Zbl. 47, 36) werden verallgemeinert und auf den Fall partieller Differentialgleichungen übertragen. Die hierzu erforderlichen Sätze über Multidifferentiationen sowie eine den Bedürfnissen angepaßte Vektorsymbolik wurden in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 46, 37) bereitgestellt. Ebenso wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen spielen auch hier gewisse Basissätze die entscheidende Rolle. Die Beweismethoden schließen sich eng an die vorangehenden Untersuchungen an und erfordern häufig nur eine formale Umschreibung in die Vektorsymbolik. Eingehendere Ergebnisse werden für spezielle Typen von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere für die linearen, am Schluß der Arbeit hergeleitet.

H.-J. Kowalsky.

Waelbroeck, L.: Sur les surcorps du corps des nombres réels. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 1026—1029 (1952).

Beweis des folgenden Satzes: Über einem topologischen Körper K mit dem Körper R aller reellen Zahlen als topologischem Unterkörper sei eine nicht-triviale (n. t.) reellwertige stetige lineare Form φ definiert (d. h. K ist der Definitionsbereich von φ). Dann ist K entweder mit R oder mit C (Körper aller komplexen Zahlen) oder mit Q (Körper aller Quaternionen) isomorph. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $\varphi(1) \neq 0$ annehmen. Ist zunächst K kommutativ und $K \ni i$, so ist $R(i)$ mit C identifiziert, und K wird eine Algebra über C . Verf. beweist mit Hilfe von φ die Existenz einer konvexen Kreisumgebung von 0, welche von K verschieden ist. Nach dem Hahn-Banachschen Satz existiert dann eine n. t. komplexwertige stetige lineare Form f über K . Ist K von C verschieden, so existiert ein Element y aus K mit $y \notin C$, für das $f(y^{-1}) \neq 0$ ist. Man beweist dann, daß $f((y-z)^{-1})$ eine reguläre Funktion von z ist, wenn z alle Elemente aus C durchläuft; ferner ist $f((y-z)^{-1}) \rightarrow 0$ für $z^{-1} \rightarrow 0$. Nach einem Satz von Liouville muß also $f(y^{-1}) = 0$ sein; dies ist aber ein Widerspruch. Also ist K mit C isomorph. Ist aber i im kommutativen Körper K nicht enthalten, so bildet man den Körper $K(i)$. Dann läßt sich die Topologie von K auf $K(i)$ fortsetzen, und man kann mit Hilfe von φ eine n. t. komplexwertige stetige lineare Form über $K(i)$ konstruieren. Ebenso wie oben kann man zeigen, daß $K(i)$ mit C isomorph ist; d. h. K ist mit R isomorph. Ist K nicht kommutativ, so ist jedes Element aus R mit einem beliebigen Element aus K multiplikativ vertauschbar. Ist also x

ein beliebiges Element aus K , so ist $R(x)$ ein kommutativer, topologischer Unterkörper von K . Da $\varphi(1) \neq 0$ ist, so induziert φ in $R(x)$ eine n. t. stetige lineare Form über $R(x)$. Man beweist dann wie oben, daß $R(x)$ entweder mit R oder mit C isomorph ist; d. h. jedes Element aus K ist über R algebraisch. Nach einem bekannten Satz von Frobenius ist daher K mit Q isomorph.
M. Moriya.

Tornheim, Leonard: Normed fields over the real and complex fields. Michigan math. J. 1, 61—68 (1952).

L'A. démontre le théorème de Gelfand-Mazur sans utiliser la théorie des fonctions de variable complexe, en remplaçant l'intégrale de Cauchy par des moyennes. Sa méthode est très voisine de celle de S. Kametani (ce Zbl. 47, 114). Il l'adapte ensuite pour montrer directement qu'une algèbre normée réelle commutative qui est un corps est le corps réel ou le corps complexe.
J. Dixmier.

Kaplansky, I.: Topological algebra. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 112—113 (1952).

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Cohen, Eckford: Sur les congruences du deuxième degré dans les corps algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1358—1360 (1952).

The author obtains the number of solutions of the congruence $\varrho \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \dots + \alpha_s \xi_s^2 \pmod{A}$, where A is an odd ideal and $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ are integers over an algebraic number field. The method seems to be known.
L. K. Hua.

Pipping, Nils: Verallgemeinerungen des Euklidischen Algorithmus. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 18, Nr. 5, 17 S. (1952).

Für positive reelle a, b läßt sich der gewöhnliche Divisionsalgorithmus in der Gestalt $a = \left[\frac{a}{b}\right]b + r$, $0 \leq r < b$ übernehmen. Wendet man den resultierenden Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen $1, \omega (> 0)$ an, so bricht er dann und nur dann ab, wenn ω rational, d. h. algebraisch von erstem Grad ist. Erstrebenswert ist ein Algorithmus zur Kennzeichnung algebraischer Zahlen n -ten Grades. Für $n = 2$ gehen Verallgemeinerungen auf Jacobi, V. Brun, Törnquist und den Verf. zurück. In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. die Schwierigkeiten, die sich bei den Algorithmen der genannten Autoren im Fall $n = 3$ einstellen. Zahlreiche numerische Beispiele dienen zur Erläuterung.
H.-H. Ostmann.

Hasse, Helmut: Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern. (Vorläufige Mitteilung.) Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1952, Nr. 1, 19 S. (1952).

Verf. untersucht die konstanten Faktoren in der Funktionalgleichung der Artinschen L -Funktionen zu Charakteren χ der Galoisgruppe \mathfrak{G} eines festen Normalkörpers N über einem endlich-algebraischen Zahlkörper K und zeigt, daß sie ein Größensystem von analoger gruppentheoretischer Struktur wie die Artinschen Führer und L -Funktionen bilden. Diese Faktoren $\tau(\chi, N/K)$ werden galoissche Gaußsche Summen (gal. G. S.) genannt, da sie im abelschen Spezialfall mit den Heckeschen G. S. übereinstimmen.

Bei obiger Bedeutung von K, N, \mathfrak{G} und χ werden die nach Artin als Produkte der Komponenten der endlichen Primstellen erklärten Führer $f(\chi, N/K)$, L -Funktionen $L(s|\chi, N/K)$ Diskriminanten $\mathfrak{d}(N/K)$ und Differenten $\mathfrak{D}(N/K)$ durch Hinzunahme von Beiträgen der unendlichen Primstellen von K ergänzt [Bezeichnung der so ergänzten Bildungen: $\tilde{f}(\chi, N/K)$, $\tilde{L}(s|\chi, N/K)$, $\tilde{\mathfrak{d}}(N/K)$, $\tilde{\mathfrak{D}}(N/K)$]. $\tilde{f}(\chi, N/K)$ und $\tilde{L}(s|\chi, N/K)$ sind lineare Charakterfunktionen [d. h. der Modul der Charaktere χ von \mathfrak{G} wird homomorph in die multiplikative Gruppe der Divisoren von K bzw. in die der meromorphen für $\Re(s) > 1$ regulären und nullstellenfreien Funktionen abgebildet]. Die Normen der erweiterten Führer $\tilde{\mathfrak{F}}(\chi, N/K) = \tilde{\mathfrak{D}}(K)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(\chi, N/K)$ und die erweiterten L -Funktionen $\tilde{M}(s|\chi, N/K) = \Re_K(\tilde{\mathfrak{F}}(\chi, N/K))^{s/2} \tilde{L}(s|\chi, N/K)$ sind invariante Charakterfunktionen, d. h. sie genügen den Induktionsregeln $\Re_K(\tilde{\mathfrak{F}}(\psi^*, N/K)) = \Re_\Lambda(\tilde{\mathfrak{F}}(\psi, N/\Lambda))$ bzw. $\tilde{M}(s|\psi^*, N/K) = \tilde{M}(s|\psi, N/\Lambda)$ (wo ψ Charakter einer Untergruppe \mathfrak{H} von

\mathfrak{G} , Λ der Invariantenkörper von \mathfrak{H} und ψ^* der durch ψ in \mathfrak{G} induzierte Charakter ist) und den Faktorgruppenregeln $\mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{H}}(\chi_0, N/K)) = \mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{H}}(\chi_0, N_0/K))$ bzw. $M(s|\chi_0, N/K) = M(s|\chi_0, N_0/K)$ (wo χ_0 Charakter einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ und N_0 der Invariantenkörper von \mathfrak{D} über K ist); diese Beziehungen werden über die p -Komponenten bewiesen. — Im abelschen Spezialfall ist χ ein Kongruenzcharakter von K und die erweiterte abelsche L -Reihe genügt der Heckschen Funktionalgleichung

$$\frac{M_K(s|\chi)}{M_K(1-s|\bar{\chi})} = \frac{\tau_K(\chi)}{\sqrt{\mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{f}}_K(\chi))}} = -\frac{T_K(\chi)}{\sqrt{\mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{f}}_K(\chi))}}$$

mit der (normierten eigentlichen) abelschen G. S. $\tau_K(\chi) = \sum \chi(\mathfrak{x}) e^{2\pi i S_K(\mathfrak{x})}$, wobei S_K die absolute Spur in K ist und über ein Vertretersystem $x \bmod^+ 1/\mathfrak{D}(K)$ mit $x \equiv 0 \bmod^+ 1/[\mathfrak{D}(K)\tilde{\mathfrak{f}}_K(\chi)]$ $x \bmod^+ 1/[\mathfrak{D}(K)\tilde{\mathfrak{f}}_K(\chi)]$, \mathfrak{x} prim zu $\tilde{\mathfrak{f}}_K(\chi)$, $x \equiv 1 \bmod \tilde{\mathfrak{f}}_K(\chi)$ summiert wird, bzw. der erweiterten abelschen G. S. $T_K(\chi) = \sqrt{\tilde{\mathfrak{d}}(K)}^{\chi(1)} \tau_K(\chi)$. — Im galoisschen, nichtabelschen Fall besitzt jeder Charakter χ von \mathfrak{G} (mindestens) eine R. Brauersche Darstellung $\chi = \sum_{\psi} g_{\psi} \psi^*$ (g_{ψ} ganzrational)

mit durch abelsche Charaktere ψ von Untergruppen \mathfrak{H} in \mathfrak{G} induzierten Charakteren ψ^* (vgl. R. Brauer, dies. Zbl. 29, 15). Die Funktionalgleichung der erweiterten galoisschen L -Funktionen lautet

$$\frac{M(s|\chi, N/K)}{M(1-s|\chi, N/K)} = \frac{T(\chi, N/K)}{\sqrt{\mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{f}}(\chi, N/K))}} = \frac{\tau(\chi, N/K)}{\sqrt{\mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{f}}(\chi, N/K))}},$$

und die erweiterten galoisschen G. S. $T(\chi, N/K)$ errechnen sich nach dem Schema $T(\chi, N/K) = \prod_{\psi} T_{\Lambda}(\psi)^{g_{\psi}}$ aus den erweiterten abelschen G. S. $T_{\Lambda}(\psi)$; durch $T(\chi, N/K) =$

$\sqrt{\tilde{\mathfrak{d}}(K)}^{\chi(1)} \tau(\chi, N/K)$ ist die gal. G. S. $\tau(\chi, N/K)$ definiert. $T(\chi, N/K)$ ist eine invariante, $\tau(\chi, N/K)$ eine kovariante lineare Charakterfunktion mit der Induktionsregel $\tau(\psi^*, N/K) = \sqrt{\mathfrak{N}_K(\tilde{\mathfrak{d}}(\Lambda/K))}^{\psi(1)} \tau(\psi, N/\Lambda)$. (Die gal. G. S. verallgemeinern somit die Heckschen G. S. in ihrer Eigenschaft als lineare Charakterfunktionen; dagegen liefert die Definition keine Summendarstellung der gal. G. S., analog wie sich die Dirichletsche Reihendarstellung nicht in einfacher Weise von den abelschen auf die Artinschen L -Funktionen überträgt.) — Ungeklärt ist noch, ob diese $\tau(\chi, K/N)$ ganzzahlige Zahlen sind und wie sie sich arithmetisch charakterisieren lassen (vgl. hierzu H. Davenport-H. Hasse (D. H.), dies. Zbl. 10, 338). Im abelschen Spezialfall werden diese Fragen durch die Komponentenzersetzung $\tau_K(\chi) = \prod_p \tau_p(\chi_p)$ in G. S. im Kleinen

$\tau_p(\chi_p)$ [über p -adischen Zahlkörpern K_p ; diese Zerlegung der G. S. folgt aus der Zerlegung des durch χ gelieferten Idelklassencharakters in lokale Komponenten χ_p vom Führer $\mathfrak{f}(\chi_p) = \mathfrak{f}_K^p(\chi)$; vgl. auch Verf. (H), dies. Zbl. 44, 28] und Reduktion der $\tau_p(\chi_p)$ auf G. S. im Minimalen (über endlichen Körpern) beantwortet. Die Reduktion der $\tau_p(\chi_p)$ auf G. S. im Minimalen zeigte Verf.

im Fall $\mathfrak{f}(\chi_p) = p$ (regulär-verzweigter Fall) schon früher (vgl. (H)), im Fall $\mathfrak{f}(\chi_p) = p^n$ ($n > 1$) erfolgt diese Reduktion gemäß Ref. (dies. Zbl. 50, 44); falls p unendliche Primstelle bzw. $\mathfrak{f}(\chi_p) = p^0$ ist, ist $\tau_p(\chi_p) = 1$ bzw. eine Einheitswurzel. Im galoisschen (nichtabelschen) Fall folgt die Zerlegung von $\tau(\chi, N/K)$ in Komponenten $\tau_p(\chi, N/K)$ auf dem Umweg über die abelschen G. S.; jedoch hängt diese Zerlegung noch von der zugrunde gelegten R. Brauerschen Darstellung von χ ab. — Sei speziell N/K abelsch mit der Gruppe \mathfrak{G} , ψ Charakter einer Untergruppe \mathfrak{H} (mit dem Invariantenkörper Λ), so folgt aus der Darstellung $\psi^* = \sum \chi \psi$ (χ nach \mathfrak{H}) für den in \mathfrak{G} durch ψ induzierten Charakter ψ^* und der Induktionsregel die Produktrelation

$\prod_{\chi \text{ nach } \mathfrak{H}} \tau_K(\chi \psi) = \tau_{\Lambda}(\psi)$ entsprechend der klassenkörpertheoretischen Produktrelation der

L -Reihen $\prod_{\chi \text{ nach } \mathfrak{H}} \frac{L_K(s|\chi \psi)}{L_K(s|\chi)} = \frac{L_{\Lambda}(s|\psi)}{\zeta_{\Lambda}(s)}$. Diese Produktrelation ist vom gleichen Typus

wie eine von Davenport-Hasse (vgl. D. H.) hergeleitete Relation für G. S. im Minimalen. — Verf. spricht anschließend einige Fragen und Vermutungen über weitere Struktureigenschaften dieser gal. G. S. und ihrer Komponenten aus; diese sind beim gegenwärtigen Stand der Kenntnisse über relativ-galoissche Erweiterungen von Interesse, da die $\tau(\chi, N/K)$ dem relativ-galoisschen Körper N über K gruppentheoretisch invariant zugeordnete Kreisteilungszahlen sind.

E. Lamprecht.

Weil, André: Jacobi sums as „Größencharaktere“. Trans. Amer. math. Soc. 73, 487–495 (1952).

Ein mod m erklärbarer Heckscher Größencharakter (H. G.) $\lambda(a)$ in einem endlich-

algebraischen Zahlkörper K ist eine komplexwertige Funktion der ganzen zu m primen endlichen Divisoren α von K mit den Eigenschaften 1. $\lambda(\alpha\beta) = \lambda(\alpha)\lambda(\beta)$, falls α, β zu m prim sind, 2. $\lambda((\alpha)) = \prod_{v=1}^n \alpha_v^{e_v} \prod_{v=1}^n |\alpha_v|^{c_v}$, falls $\alpha \equiv 1 \pmod{m}$, wobei die e_v ganzrationale und die c_v komplexe Zahlen sind und mit α_v die Konjugierten der Zahl $\alpha \in K$ bezeichnet werden. — Ist $Q(\zeta)$ der Körper der m -ten Einheitswurzeln ($m > 1$) über dem rationalen Zahlkörper Q , $a = (a_\varrho)_{1 \leq \varrho \leq r}$ ein System ganzrationaler Zahlen mod m , p ein zu m primier Primdivisor von $Q(\zeta)$ mit $N(p) = q$ und $\chi_p(x)$ gemäß

$$\chi_p(x) \begin{cases} \equiv x^{(q-1)/m} \pmod{p}, & \text{falls } x \in Q(\zeta) \text{ ganz und prim zu } p, \\ = 0, & \text{falls } x \equiv 0 \pmod{p}, \end{cases}$$

ein Multiplikativcharakter der Ordnung m des Restklassenkörpers von $Q(\zeta)$ mod p , so heißt die Charaktersumme

$$(1) \quad J_a(p) = (-1)^{r+1} \Sigma \chi_p(x_1)^{a_1} \cdots \chi_p(x_r)^{a_r},$$

wobei über ein Vertretersystem $x_1, \dots, x_r \pmod{p}$ mit $x_1 + \dots + x_r \equiv -1 \pmod{p}$ summiert wird, eine r -gliedrige Jacobische Summe (J. S.). Die durch (1) und die Festsetzung (2) $J_a(\alpha\beta) = J_a(\alpha)J_a(\beta)$, falls $a \not\equiv (0)$ und α, β ganze zu m prime Divisoren von $Q(\zeta)$ sind, definierte Funktion $J_a(\alpha)$ ist ein mod m^2 erklärbarer H. G. in $Q(\zeta)$. Zum Beweis benutzt Verf., daß jede J. S. $J_a(p)$ als Produkt von Gaußschen Summen (G. S.) im Galoisfeld $Q(\zeta)$ mod p darstellbar ist (vgl. A. Weil, dies. Zbl. 32, 394), und folgert aus der arithmetischen Charakterisierung dieser G. S. die Divisordarstellung $J_a(\alpha) \cong \alpha^{\omega(a)}$, wobei $\omega(a)$ ein nur von $a = (a_\varrho)$ abhängiges Element des Gruppenringes der Galoisgruppe von $Q(\zeta)$ über Q mit ganzrationalen Koeffizienten ist; speziell für alle $\alpha \in Q(\zeta)$ mit $\alpha \equiv 1 \pmod{m^r}$ ist $J_a((\alpha)) = \alpha^{\omega(a)}$, d. h. $J_a(\alpha)$ ist ein mod m^r erklärbarer H. G. (hier sind alle $c_v = 0$). Da $J_a(p)$ sich als Produkt 2-gliedriger J. S. darstellen läßt, ist $J_a(\alpha)$ schon mod m^2 erklärbar (m^2 ist jedoch i. a. nicht der genaue Führer) und nach Angabe des absoluten Betrages kann $J_a(\alpha)$ leicht auf den absoluten Betrag 1 normiert werden. — Im Fall der algebraischen Kurve (3) $Y^e = \gamma X^r + \delta$ über einem endlich-algebraischen Zahlkörper k besagt eine Vermutung von Hasse, daß das unendliche Produkt $Z(s) = \prod Z_p(N(p)^{-s})$ über alle zu $e\gamma\delta$ primen Primdivisoren p von k , wobei $Z_p(U)$ die Kongruenzzetafunktion der Kurve (3) über dem Restklassenkörper von k mod p ist, eine meromorphe Funktion liefert, die einer Funktionalgleichung des bekannten Typus genügt. Verf. beweist diese Behauptung für die Kurve (3), indem er noch weitergehend zeigt, daß unendliche Produkte von gewissen algebraischen L -Reihen, wie sie als Bausteine in den $Z_p(U)$ auftreten, jeweils L -Reihen von k mit H. G. des durch (1) und (2) definierten Typus sind.

E. Lamprecht.

Iwasaki, Koziro: Simple proof of a theorem of Ankeny on Dirichlet series. Proc. Japan Acad. 28, 555—557 (1952).

N. C. Ankeny bewies den Satz (dies. Zbl. 48, 31): Unter den n eigentlichen Dirichletschen Charakteren χ_1, \dots, χ_n gebe es höchstens einen Hauptcharakter. Wenn alsdann alle Koeffizienten der Dirichletschen Reihe des Produktes der n Dirichletschen L -Reihen $L(s; \chi_i)$

$$Z(s) = \prod_{i=1}^n L(s; \chi_i)$$

nicht-negativ sind, so ist $Z(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion eines gewissen absolut abelschen Zahlkörpers. Verf. beweist nun diesen Satz sehr kurz und elegant ohne den Ankenyschen Hilfssatz (Theorem 2), was in der von Ankeny angegebenen Form im allgemeinen leider nicht richtig ist.

Z. Suetuna.

Nagell, Trygve: Recherches sur l'arithmétique des cubiques planes du premier genre dans un domaine de rationalité quelconque. Nova Acta Soc. Sci. Upsal., Ser. IV. 15, Nr. 6, 66 p. (1952).

Let Ω be a given field. A number which belongs to Ω is said to be rational. A point in the plane with rational coordinates is said to be a rational point. The coordinates of the curve (1) $y^2 = x^3 - Ax - B$, where A and B are rational and $4A^3 - 27B^2 \neq 0$, can be represented by Weierstrass's \wp -function with the invariants $4A$ and $4B$: $x = \wp(u)$, $y = \frac{1}{2}\wp'(u)$. A point (x, y) on (1) is exceptional if the corresponding argument u is commensurable with a period of the function $\wp(u)$. The arguments of the rational points in (1) constitute an (infinite or finite) Abelian group G when the composition is addition. If G_1 is a finite sub-group of G , the ele-

ments of G_1 are exceptional points. In a first part of this paper the author tries to determine all the really existing finite sub-groups G_1 in Ω . He gives the necessary and sufficient conditions for the existence of sub-groups of order $m = 3, 4, 5, 6, 7, 9$ and 15, expressing A and B as binary forms with integer coefficients if $m \neq 15$. If $\Omega = K(1)$, the case $m = 15$ is impossible. A second part of the paper begins with a study of the resolvent fields and the rational triplets of a cubic curve of genus one. For definitions and some of the results consult an earlier paper of the author (this Zbl. 48, 27, first rev.). The paper concludes with theorems concerning birational and linear equivalence by means of Aronhold-invariants. We mention that the problem of equivalence is completely solved for cubics of the form $x^3 + y^3 + \gamma z^3 - 3\alpha x y z = 0$. At last the author completes the demonstration of an earlier theorem, now giving all details (this Zbl. 26, 294). *W. Ljunggren.*

Segre, Beniamino: Sui corpi risolvibili delle equazioni algebriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 335—340 (1952).

Let R be a commutative number field of characteristic zero and let further Γ be an irreducible algebraic curve in a projective space over R of dimension ≥ 2 . A group of n points is defined to be rational if and only if any symmetric function of the coordinates (non-homogeneous) of these points belongs to R . In the investigation of such groups one may assume, without restriction, that Γ is a plane curve. Studying the rational groups of n points on Γ , the author generalizes classical arithmetical results of Hilbert-Hurwitz and Poincaré and recent results due to Nagell (this Zbl. 27, 12; 48, 27). He emphasizes the importance of considering the groups of p points in the study of the arithmetical properties of curves Γ of genus $p \geq 1$. In the proofs use is made of the general theory of linear series. Many interesting results are found, among which the following one is mentioned: If (1) $f(x, y, z) = 0$ is an homogeneous algebraic equation with coefficients in R , representing an irreducible curve of genus $p \geq 3$ without any rational group of p points, so that (1) is solvable only by $x = y = z = 0$ in R , then (1) cannot be solved in a field obtained by adjoining to R an algebraic number whose degree, relative to R , is prime to $p - 1$. *W. Ljunggren.*

Zahlentheorie:

● **Khinchin, A. Y.:** Three pearls of number theory. Transl. from the second (1948), revised russian ed. by F. Bagemihl, H. Komm and W. Seidel. Rochester, N. Y.: Graylock Press 1952. 64 p.

Zu dieser englischen Übersetzung vgl. die Besprechung des Originals zugleich mit der deutschen Übersetzung dies. Zbl. 42, 40.

Chang, Fu-Hwa: On a series whose general term is given by $w_n = \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots$. Sci. Record 5, 45—49 und chines. Zusammenfassg. 45 (1952).

It is proved for $n = 1, 2, \dots$ that $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n + 1$, $\sum_{i=1}^n w_i = w_{n+2} - (n+2)$, $w_n = \sum_{i=1}^n u_i$ and $w_{3n} \equiv 0 \pmod{4}$, $w_{3n+1} \equiv 1 \pmod{2}$, $w_{3n+2} \equiv 0 \pmod{2}$. Hereby is $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (Fibonacci's series).

W. Verdenius.

Brun, Viggo, J. O. Stubban, J. E. Fjelstad, R. Tambs Lyche, K. E. Aubert, W. Ljunggren and E. Jacobsthal: On the divisibility of the difference between two binomial coefficients. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 42—54 (1952).

The theorem: $\binom{2^{n+1}}{2^n} - \binom{2^n}{2^{n-1}}$ is for $n = 1, 2, \dots$ divisible by 2^{2^n} of Viggo Brun (1934)

is the starting point of the authors. They collect here some generalizations and sharper results on this theme, which are partly also published in the Norwegian mathematical periodicals. Stubban gives a simple proof that it is divisible by 2^{2n+1} and Fjeldstad proves the conjecture of Jacobstahl that the difference contains exactly $3n$ factors 2 when $n > 1$. His proof is somewhat complicated and makes besides the formulas of Stubban use of special expressions for the Legendre polynomials. Tambs Lyche gives two relations between the number of factors 2 in a binomial coefficient and those in the elementary symmetric function of degree k of the

first n odd integers. The proof is omitted. Aubert remarks, that $\binom{2^m}{2^m-1}^k - \binom{2^n}{2^n-1}^k = 2^{3n+k+\lambda-1} H$, where $m > n > 1$, $k \geq 1$ and H is still an odd integer, while 2^λ is the highest power of 2 dividing k . The proof is unexpectedly simple. Ljunggren proves that $\binom{p^{n+1}}{p^n} - \binom{p^n}{p^{n-1}}$ for $n = 2, 3, \dots$ is divisible by $p^{3n+\varepsilon}$, where $\varepsilon = 0$ if $p = 2$, $\varepsilon = 1$ if $p = 3$ and $\varepsilon = 2$ if $p > 3$. The proof is due to $\binom{p^{n+1}}{p^n} = \binom{p^n}{p^{n-1}} \frac{F(p^{n+1})}{F(p^n)}$, where $F(y) = \prod_{\substack{\lambda=1 \\ (\lambda, p)=1}}^{p^n} (y - \lambda)$. The number

of factors p of $F(p^{n+1}) - F(p^n)$ is computed with the help of the theorem of Leudsdorf, and then the proof is easily completed. Jacobsthal considers the difference $\binom{p^m}{p^n} - \binom{m}{n}$, where m and n are positive integers ($m \geq n$) and p is prime. He gives a very complicated congruence in terms of Bernoullian numbers while the modulus is a power of p . There is only an outline of the proof. W. Verdenius.

Carlitz, L.: Some problems involving primitive roots in a finite field. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 314—318 (1952). **Correction.** Ibidem 618.

Verf. kündigt eine Reihe von Sätzen über primitive Wurzeln in endlichen Körpern an. Ein Teil derselben ist inzwischen mit Beweisen erschienen (s. nachsteh. Referat). Die übrigen betreffen 1. die Anzahl primitiver Wurzeln, wobei Ergebnisse von Davenport (dies. Zbl. 18, 109) verbessert werden, und 2. die Lösungsanzahl gewisser diophantischer Gleichungen in $GF(p^n)$. H.-E. Richert.

Carlitz, L.: Primitive roots in a finite field. Trans. Amer. math. Soc. 73, 373—382 (1952).

Ist für $0 \neq \beta \in GF(p^{nm})$ e die kleinste natürliche Zahl mit $\beta^e = 1$, so heißt β zu e gehörig. Ist (1) $a(x) = \sum_{r=0}^k a_r x^{p^{nr}}$, $a_r \in GF(p^n)$ das Polynom kleinsten Grades mit $a(\beta) = 0$, so heißt β zu $a(x)$ gehörig (vgl. Ø. Ore, dies. Zbl. 9, 100). $N(e, a(x))$ sei die Anzahl der Elemente aus $GF(p^{nm})$, die sowohl zu e als auch zu $a(x)$ gehören. Verf. beweist u. a. für $p^{nm} \rightarrow \infty$ $N(e, a(x)) = \varphi(e) \frac{\Phi(A)}{p^{nm}} + O(p^{nm(1/2+\varepsilon)})$ und insbesondere für $e|A| > p^{cmn}$, $c > 3/2$ und hinreichend großes p^{nm} , daß $N(e, a(x))$ positiv ist. Dabei bezeichnet φ die Eulersche Funktion, Φ die entsprechende Funktion in $GF[p^n, x]$, und mit den in (1) eingeführten Koeffizienten ist $A = \sum_{r=0}^k a_r x^r$. Für $e = p^{nm} - 1$, $a(x) = x^{p^{nm}} - x$ liefert dies eine Aussage über die Anzahl der Elemente von $GF(p^{nm})$, die sowohl primitive Wurzeln im gewöhnlichen als auch solche im Sinne von Ore sind. Weiter werden Ergebnisse über $N_r(e, a(x))$, die Anzahl der Polynome vom Grade $e < r$, die mod P (P irreduzibles Polynom vom Grade m aus $GF[p^n, x]$) gleichzeitig zu e und $a(x)$ gehören, ausgesprochen. Bezeichnet noch $N_r(\hat{a}(x))$ die Anzahl der im letzten Sinne zu $a(x)$ gehörigen Polynome, so wird bei $p^{nm} \rightarrow \infty$ $N_r(e, a(x)) = \frac{\varphi(e)}{p^{nm}-1} N_r(\hat{a}(x)) + O(p^{nm(1/2+\varepsilon)})$ bewiesen. Die Beweise beruhen auf Abschätzungen gewisser Charaktersummen nach dem Vorbild von Vinogradov [vgl. auch vorangehendes Ref.]. H.-E. Richert.

Brandt, Heinrich: Über das quadratische Reziprozitätsgesetz im Körper der dritten Einheitswurzeln. Nova Acta Leopoldina, n. F. 15, 165—188 (1952).

Anschließend an die Theorien des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (dies. Zbl. 46, 268), und der binären quadratischen Formen (dies. Zbl. 46, 273), welche vom Verf. im Gaußschen Zahlkörper unter einem neuen Gesichtspunkt entwickelt worden sind, versucht Verf. weiter die angemessenste Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes im Körper K der dritten Einheitswurzeln zu finden. Eine ganze Zahl α aus K ist bekanntlich von der Form $\alpha = a_1 + a_2 \varrho$ (ϱ ist eine primitive sechste Einheitswurzel) mit den eindeutig bestimmten ganzrationalen Koeffizienten a_1, a_2 . a_1 bzw. a_2 heißt die erste bzw. zweite Komponente von α . α heißt ungerade, wenn die Norm von α ungerade ist; sonst heißt α gerade. Unter den sämtlichen (also 6) assoziierten Zahlen einer ungeraden Zahl α gibt es eine einzige, deren erste Komponente kongruent 1 (4) ist und deren zweite Komponente gerade ist, sie wird primär genannt und mit α^* bezeichnet. Eine ganze Zahl α aus K heißt antiprimär, wenn die zu α konjugiert-komplexe Zahl primär ist. Für eine ungerade Primzahl π und eine beliebige, zu π prime ganze Zahl α aus K setze man

$$\left[\frac{\alpha}{\pi}\right] = 1 \text{ oder } \left[\frac{\alpha}{\pi}\right] = -1, \text{ je nachdem } \alpha \text{ quadratischer Rest oder Nichtrest nach } \pi \text{ ist. Es}$$

seien κ, λ zueinander prime ungerade Primzahlen, und außerdem sei κ antiprimär. Verf. beweist dann das quadratische Reziprozitätsgesetz: $\left[\frac{\kappa}{\lambda}\right] = \left[\frac{\kappa}{\lambda^*}\right] - \left[\frac{\lambda^*}{\kappa}\right]$. Die letzte Formel gilt

auch für $\kappa = -1, 2, -2$, wenn man dabei $\left[\frac{\lambda^*}{\kappa}\right]$ passend definiert. Dazu muß man die sämtlichen quadratischen Charaktere der primen Restklassengruppe nach 8 in Betracht ziehen. Ist λ eine ungerade Primzahl und κ eine nicht mit λ assoziierte Primzahl oder eine Einheit, so kann man eine einzige Einheit ϱ^v so bestimmen, daß $\kappa = \varrho^v \kappa_0$ ist, wo κ_0 antiprimär für ungerade

Primzahl κ , $\kappa_0 = 2$ für gerade Primzahl κ und $\kappa_0 = -1$ für eine Einheit κ gesetzt ist. Dann gilt:

$$\left[\frac{\kappa}{\lambda}\right] = \left[\frac{\lambda^*}{\varrho^v}\right] \left[\frac{\lambda^*}{\kappa_0}\right], \text{ wo } \left[\frac{\lambda^*}{\varrho^v}\right] \text{ als } \left[\frac{\lambda^*}{-1}\right]^v \text{ definiert ist (erste Fassung des quadratischen Rezi-}$$

prozitätsgesetzes). Weiter entwickelt Verf. die Theorie der binären quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten aus K . Es sei $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ eine beliebige binäre quadratische Form in ξ, η mit ganzzahligen Koeffizienten aus K und Δ die Diskriminante von φ . Eine zu Δ prime ungerade Primzahl π (und damit auch jede mit π assoziierte Zahl) ist dann und nur dann durch φ

eigentlich darstellbar [d. h. $\varphi(\xi_0, \eta_0) = \pi$ mit $(\xi_0, \eta_0) = 1$], wenn $\left[\frac{\Delta}{\pi}\right] = 1$ ist. Dabei sagt man,

daß π durch Δ darstellbar ist. Δ ist aus endlich vielen eigentlichen oder uneigentlichen Primdiskriminanten (P. D.) und einem quadratischen Zahlfaktor zusammengesetzt. Jede P. D. besitzt nur einen einzigen Primteiler; zu einer eigentlichen P. D. δ existiert eine ganzzahlige binäre quadratische Form mit δ als Diskriminante, aber es gibt keine binäre quadratische Form mit einer uneigentlichen P. D. als Diskriminante. Zu jeder P. D. δ gehört ein Charakter,

der für eine beliebige zu δ prime Zahl μ durch $\left[\frac{\mu}{\delta}\right]$ bezeichnet wird. Ist dabei δ eine ungerade

P. D. mit dem Primteiler π , so ist $\left[\frac{\mu}{\delta}\right] = \left[\frac{\mu}{\pi}\right]$ gesetzt. Für eine gerade P. D. δ ist $\left[\frac{\mu}{\delta}\right]$ gleich

einem quadratischen Charakter der primen Restklassengruppe mod 8. Verf. beweist für eine

P. D. δ und für eine zu δ prime Primzahl oder eine Einheit κ das Reziprozitätsgesetz: $\left[\frac{\delta}{\kappa}\right] = \left[\frac{\kappa}{\delta}\right]$

(zweite Fassung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes). Die letzte Formel besagt für eine

eigentliche P. D. δ , daß dann und nur dann der Charakter $\left[\frac{\kappa}{\delta}\right] = 1$ ist, wenn κ durch δ darstellbar

ist. Verf. verallgemeinert ferner das Reziprozitätsgesetz im Jacobischen Sinne. *M. Moriya.*

● **Hägmark, Per:** On a class of quintic Diophantine equations in two unknowns. (Diss.) Uppsala: Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB 1952. 91 p.

The following theorem is proved: If M is any rational integer, the diophantine equation (1) $u^5 + M v^5 = 1$ has at most two solutions in rational integers u, v with $v \neq 0$. An important lemma is: If (1) has two solutions u_1, v_1 and u_2, v_2 ($v_1 v_2 \neq 0$), then $u_1 + v_1 \theta$ and $u_2 + v_2 \theta$ form a system of independent units in $P(\theta)$, θ denoting the real fifth root of M . Using this lemma, the author then proves that (1) cannot have three integral solutions. In the proofs which are long and quite complicated, use is made of the p -adic method, developed by Th. Skolem in a series of papers (for instance this Zbl. 12, 13). If $|M| \geq 2060$ (1) has at most one solution in rational integers u, v with $v \neq 0$. This is a special case of a theorem due to C. L. Siegel (this Zbl. 15, 389), which has not been proved hitherto by the exclusive use of methods of the theory of numbers.

W. Ljunggren.

Morgantini, E.: Sulla ricerca delle soluzioni intere di un tipo notevole di equazioni diofantee. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 44—57 (1952).

Während sich der Verf. bisher auf diophantische Gleichungen $\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 = \sum_{i=1}^r a_i y_i^{2m_i}$ beschränkte (dies. Zbl. **47**, 40), betrachtet er nun diophantische Gleichungen (1) $\sum_{i=1}^r a_i x_i^{m_i} = \sum_{j=1}^s b_j y_j^{n_j}$ ($m_i \geq 1$, $n_j \geq 1$, a_i, b_j ganz). Er gibt mit Hilfe von geometrischen Überlegungen den Weg an, der zur Darstellung der Lösungen in Parameterform führt. Dabei spielt die Auflösung der multiplikativen Gleichungen $u^{m'} A_\alpha = v^{n'} B_\beta$ in den ganzzahligen Variablen u, v eine große Rolle. Zu diesen Gleichungen kommt man aus (1) durch $x_i = \alpha_i u^{\mu_i}$, $y_j = \beta_j v^{\nu_j}$, $A_\alpha = \sum \alpha_i \alpha_i^{m_i}$, $B_\beta = \sum \beta_j \beta_j^{n_j}$.
N. Hofreiter.

Aigner, Alexander: Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl. Monatsh. Math. **56**, 335—338 (1952).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **47**, 274) bewies Verf. die Unmöglichkeit der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ im Körper $R(\sqrt[m]{m})$ für $m = 2n + 1 > 0$, wenn die Klassenzahl von $R(\sqrt[-3]{m})$ nicht durch 3 teilbar ist. In derselben Arbeit zeigte Verf.: Enthält m nur Primfaktoren der Art $3n + 1$, nach denen 2 nicht-kubischer Rest ist, so ist die obige Gleichung in $R(\sqrt[m]{m})$, $R(\sqrt[-m]{m})$ unmöglich. Nun wird gezeigt: Enthält m den Faktor 2, ferner eine Primzahl der Art $6n + 5$, nach welcher $\sqrt[3]{2} - 1$ (Grundeinheit von $R(\sqrt[3]{2})$) nicht quadratischer Rest ist, und sonst allenfalls nur noch Primzahlen der Art $6n + 1$, nach denen 2 nicht kubischer Rest ist, so ist die obige Gleichung in $R(\sqrt[m]{m})$, $R(\sqrt[-m]{m})$ unmöglich. Interessant ist beim Beweis, daß die Möglichkeit der Gleichung in $R(\sqrt[m]{m})$ mit der Zerlegung der Primfaktoren von m in $R(\sqrt[3]{2})$ bzw. $R(\sqrt[-3]{2})$ bzw. $R(\sqrt[3]{2} - 1)$ zusammenhängt, wobei ρ die dritte Einheitswurzel bedeutet.
Z. Suetuna.

Dénes, Peter: Über die diophantische Gleichung $x^l + y^l = c z^l$. Acta math. **88**, 241—251 (1952).

Verf. gibt in einer Reihe von Sätzen solche hinreichenden Kriterien für die Unmöglichkeit der ganzzahligen Lösbarkeit von $x^l + y^l = c z^l$ an, die den häufiger auftretenden Fall $c = 2$ mitumfassen. Allgemeiner wird — wie beim Fermatproblem ($c = 1$) — gleich nach den ganzalgebraischen Lösungen von (1) $\xi^l + \eta^l = a \zeta^l$ im Körper $k(\zeta)$ der l -ten Einheitswurzeln gefragt. Die Voraussetzungen „ $l > 3$ sei eine reguläre Primzahl, ξ, η seien reelle Zahlen aus $k(\zeta)$; a, ζ reelle Ideale in $k(\zeta)$; ξ, η, a, ζ teilerfremd“ sind dabei die Bedingungen, die Verf. generell zugrunde legt. Die Beweismethoden sind denen des Fermatproblems verwandt und einige klassische Resultate werden mit herangezogen. Folgende Sätze seien hervorgehoben. a sei nur durch reelle und zwar durch höchstens $(l-3)/2$ verschiedene Primideale von $k(\zeta)$ teilbar. Dann ist (1) mit $(\xi)(\eta)\zeta \neq 1$ und ξ, η, a, ζ prim zu l unmöglich. — Von den Zahlen ξ, η sei eine durch l teilbar, und a besitze nur reelle Primidealteiler; dann ist für die Lösbarkeit von (1) notwendig, daß der l -te Potenzcharakter $\{\zeta/q\} = 1$ für einen Primidealteiler q von a ist. — Es sei a teilerfremd zu l und besitze nur reelle, und zwar höchstens $(l-3)/2$ Primidealteiler, von denen mindestens einer einen Teiler q mit $\{\zeta/q\} \neq 1$ besitzt. Dann ist (1) mit $(\xi)(\eta)\zeta \neq 1$ unmöglich. — Einige weitere Kriterien werden lediglich bezüglich ganzzahliger x, y, z, c ausgesprochen, und l sei wieder reguläre Primzahl: Unter den Zahlen x, y sei eine durch l teilbar, c besitze keinen Primteiler der Form $kl + 1$; dann ist notwendig für die Lösbarkeit von (1), daß $q^{l-1} \equiv 1 (l^2)$ ist, wobei $q|c$ und x, y, c, z teilerfremd sind. — Spezialisierung weiterer Sätze auf den Fall $c = 2$ ergibt noch: Es sei $2^{l-1} \not\equiv 1 (l^2)$ und die Ordnung von 2 mod l sei gerade oder gleich $(l-1)/2$; dann ist (1) höchstens trivial lösbar.
H.-H. Ostmann.

Walfisz (Wal'fiš), A. Z.: Über die Darstellung von Zahlen als Summen von Quadraten. Asymptotische Formeln. Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 6 (52), 97—178 (1952) [Russisch].

Let $r_k(m)$ be the number of representations of an integer m as a sum of k squares, and let $r_k(m, n)$ be the number of solutions of the system of Diophantine equations $x_1 + \dots + x_k = m$ and $x_1^2 + \dots + x_k^2 = n$. The author establishes an asymptotic formula that for $r_k(m)$ holds for $k \geq 5$ and that for $r_k(m, n)$ holds for $k \geq 7$. The paper is comprehensive and is of expository nature. Particular attention is paid to the singular series. Besides he expresses $r_8(m, n)$ in terms of $r_7(m)$. *L. K. Hua.*

Prachar, K.: Über einen Satz der additiven Zahlentheorie. Monatsh. Math. 56, 101—104 (1952).

In Verallgemeinerung eines Satzes von N. Romanoff wird gezeigt: Ist $0 \leq k_0 < k_1 < \dots$ eine monoton wachsende Folge ganzer Zahlen, $k(x)$ bei festem ganzzahligem $a > 1$ die Anzahl der verschiedenen $a^{k_i} \leq x$ und p in der Menge der Primzahlen veränderlich, so gilt für die Anzahl $R(x)$ der verschiedenen $p + a^{k_i} < x$ die Abschätzung $R(x) > c x k(x)/\log x$ [$c = c(a) > 0$]. Im besonderen hat also die Menge der $p + a^{k_i}$ eine positive Dichte. Für $k_i = i$ ist das im wesentlichen ein Satz von Romanoff (dies. Zbl. 8, 389). Der Beweis schließt sich an die Darstellung an, die E. Landau dem Romanoffschen Beweis gegeben hat (dies. Zbl. 16, 202).

H. Rohrbach.

Zulauf, Achim: Zur additiven Zerfällung natürlicher Zahlen in Primzahlen und Quadrate. Arch. der Math. 3, 327—333 (1952).

In seiner Einleitung formuliert Verf. ganz allgemein eines der hauptsächlichsten Darstellungsprobleme der additiven Zahlentheorie: Anzahl der Kompositionen von n mit Summanden aus vorgegebenen s Mengen, und gibt eine kurze Kennzeichnung der beiden wichtigsten Behandlungsmethoden (Hardy-Littlewood bzw. Vinogradov). Verf. greift die durch Linnik zum Erfolg geführte Hardy-Littlewood-Methode auf und kündigt die Beweise von drei Sätzen an, die sich mit der Kompositionsanzahl von

$$n = \sum_{\sigma=1}^s p_{\sigma} + \sum_{\tau=1}^t b_{\tau} g_{\tau}^2 \quad (p_{\sigma} \equiv a_{\sigma} \pmod{K})$$

befassen; die p_{σ} sind Primzahlen > 2 , die a_{σ} und b_{σ} , $(a_{\sigma}, K) = 1$, sind beliebig gegeben, desgl. s und t .

H.-H. Ostmann.

Zulauf, Achim: Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov. J. reine angew. Math. 190, 169—198 (1952).

Bekanntlich lassen sich nach Vinogradov alle hinreichend großen ungeraden natürlichen Zahlen als Summen dreier Primzahlen $p \geq 3$ darstellen. Für Beweise dieses Satzes sowie einiger Verallgemeinerungen hiervon sind zwei Beweismethoden erfolgreich gewesen (vgl. hierzu auch Zulauf, vorsteh. Ref.); einmal die von Vinogradov entwickelte Methode, die sich auf Abschätzungen Weylscher Summen (d. h. endlicher trigonometrischer Summen) stützt, zum andern der durch Linnik [Mat. Sbornik, n. Ser. 19, 3—8 (1946)] zum Erfolg geführte Ausbau der klassischen Hardy-Littlewoodschen Methode (s. etwa Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1927). Unter Verwendung einer von Čudakov (dies. Zbl. 31, 347) gegebenen Vereinfachung hinsichtlich der letztgenannten Methode beweist Verf. durch Verallgemeinerung eines Čudakovschen Hilfssatzes: Es seien $a_i \pmod{K}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $m \geq 3$) beliebige teilerfremde Restklassen mod K ($K \geq 1$). Weiter sei $n \equiv m(2)$, $n \equiv a_1 + \dots + a_m(K)$. Bezeichnet man mit $N_{K, a_1, \dots, a_m}(n)$ die Anzahl der Darstellungen (Kompositionen) von n in der Form $n = p_1 + p_2 + \dots + p_m$, $3 \leq p_i \equiv a_i(K)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), so gilt

$$(1) \quad N_{K, a_1, \dots, a_m}(n) = \left(\frac{n^{m-1}}{(m-1)! \varphi^m(K) \log^m n} \right) S_{K, m}(n) + o\left(\frac{n^{m-1}}{\log^m n} \right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

worin $\varphi(K)$ die Eulersche Funktion und

$$S_{K, m}(n) = \Omega K \prod_{\substack{p \nmid K \\ p > 2, p \nmid n}} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1} \right)^{m-1} \right) \cdot \prod_{\substack{p \nmid K \\ p > 2, p \nmid n}} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1} \right)^m \right), \quad \Omega = \begin{cases} 1, K \equiv 0(2), \\ 2, K \equiv 1(2), \end{cases}$$

ist. — Die Notwendigkeit der Kongruenzbedingungen für n ist für die Darstellbarkeit von n evident, und aus (1) folgt leicht, daß alle hinreichend großen in Frage kommenden n auch darstellbar sind; während diese Tatsache auch unmittelbar aus einem Ergebnis von v. d. Corput (dies. Zbl. 19, 196) ableitbar ist, ist (1) neu.

H. Ostmann.

Földes, István: On the Goldbach hypothesis concerning the prime numbers of an arithmetical progression. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 473—490, russische und engl. Zusammenfassgn. 491, 492 (1952) [Ungarisch].

In this article I give the proof of two results, generalizing the theorem of Goldbach-Vinogradov for the prime numbers of arithmetical progressions. However, I succeeded to prove this generalization only for those two special cases, when every pair of the differences of the three given progressions are relative prime numbers, resp. the three differences coincide. In both cases every sufficiently great odd number n , satisfying certain trivial conditions of congruence, is representable as a sum of three primes, each of which belongs to three given arithmetical progressions respectively, the number of representations having the asymptotic order $n^2/\log^3 n$. The fact of the mere existence of representations of the indicated type is included in the results of one of van de Corput's memoirs, but his method is in principle unable to provide asymptotic formulae. The proof of the assertions of this paper consists essentially in a slight modification of Vinogradov's proof of the theorem of Goldbach-Vinogradov; the factorization of the relevant singular series, of extremely complex structure in this case, however, yields great difficulties of arithmetical character. Autoreferat.

Rényi, Kató: Über die Verteilung der Zahlen, die durch keine k -te Potenz einer ganzen Zahl größer als Eins teilbar sind, in der Menge der Werte eines Polynoms mit rationalen Wurzeln. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 493—503 und russische Zusammenfassg. 504—506 (1952) [Ungarisch].

Das Hauptresultat ist folgendes: Sei $P(x)$ ein ganzzahliges Polynom mit rationalen Wurzeln; nicht alle $P(n)$, $n = 1, 2, \dots$, seien durch eine k -te Potenz > 1 ($k \geq 2$) teilbar [dies ist der Fall, wenn die Wurzeln von $P(x)$ eine Vielfachheit $< k$ haben und für kein p gilt: $p^k | P(n)$ für alle $n = 1, 2, \dots$]. $Q(N)$ sei die Anzahl der k -freien $P(n)$ mit $n \leq N$. Dann ist

$$Q(N) = N \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{T(p^k)}{p^k}\right) + O\left(\frac{N}{\log N \log_2 N}\right),$$

wobei $T(m)$ die Anzahl der Lösungen von $P(n) \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet. Bem. d. Ref.: Die Annahme rationaler Wurzeln scheint unnötig zu sein. K. Prachar.

Horváth, J.: Primzahlen. II. Revista Mat. element. 1, 70—78 (1952) [Spanisch].

Ricci, Giovanni: La differenza di numeri primi consecutivi. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 149—200 (1952).

Verf. gibt eine zusammenfassende Darstellung über die bisher erzielten Resultate für $d_n = p_{n+1} - p_n$.

$$A_{2h}(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p+2h = p'}} 1, \quad B_{2k}(x) = \sum_{\substack{p_n \leq x \\ p_{n+1} \leq p_n + 2k}} 1 \quad (p_n = n\text{-te Primzahl})$$

(z. B. Satz von G. Hoheisel und seine Verschärfungen, Brunsche Methode, Satz von Erdős u. a.). Beigefügt ist eine Tabelle für $1 \leq n \leq 170$, $1 \leq h \leq 7$, $1 \leq k \leq 5$ und graphische Darstellungen dieser Funktionen. E. Hlawka.

Rodosskij, K. A.: Zur Theorie der ζ -Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 1069—1070 (1952) [Russisch].

Let T be a sufficiently large number and $1/2 \leq \Delta \leq 1 - (\log \log T)^2 / \log T$. Let $R^{(n)}$ denote the rectangles: $T + n - 1 \leq t < T + n$; $\Delta \leq \sigma \leq 1$, $n = 1, 2, \dots, T$. The number of rectangles $R^{(n)}$ in which there is a point $\xi^{(n)}$ such that $|\zeta(\xi^{(n)})| \leq (6 T^{(2\Delta-1)(1-\Delta)/(2-3\Delta+2\Delta^2)})^{-1}$ is $\ll \exp c_1 (\log \log T)^2 \cdot T^{(1+2\Delta)(1-\Delta)/(2-3\Delta+2\Delta^2)}$, where c_1 is an absolute constant. The author mentions that the result can be improved by the method of estimation of trigonometrical sums provided that Δ is sufficiently near to 1. L. K. Hua.

Rodosskij, K. A.: Über einige Abschätzungen der Größen $L(1, \chi)$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 889—891 (1952) [Russisch].

Let $\chi(n)$ be a non-principal character, mod D , and $L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-1}$. The author proves that as D large enough, and $\eta \in [4 \log \log D / \log D; 0, 1]$, the

number of characters, mod D , such that $|L(1, \chi)|^{\pm 1} > c_1 \eta^{-1} \log \log D$ is $\leq c_2 \log^8 D \cdot D^{8\eta}$. Two further theorems are concerning the quadratic character $\chi^{(2)}$ and the primitive biquadratic character $\chi^{(4)}$: $L(1, \chi_D^{(2)}) \cdot L(1, \chi_{dD}^{(2)}) \leq c_1 \log dD \cdot \log d$, and $|L(1, \chi_D^{(2)} \chi_d^{(4)})|^2 \leq c_1 \log dD \cdot \log d$, and for $3 \leq d < D^{1/\log \log D}$, $(d, D) = 1$ holds $L(1, \chi_D^{(2)}) + L(1, \chi_{dD}^{(2)}) > c/\log D$, where c_1 and c_2 are positive absolute constants.

L. K. Hua.

Inkeri, K.: Non-homogeneous binary quadratic forms. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 216—224 (1952).

M sei die untere Grenze aller Schranken C^2 , für die zu jedem Punkt (x_0, y_0) ein homologer Punkt (x, y) , $x = x_0, y = y_0 \pmod{1}$, existiert, so daß $|ax^2 + bxy + cy^2| \leq C^2$ ist. Falls die untere Grenze M von den C^2 angenommen wird, bezeichnen wir sie mit M_1 , anderenfalls mit M_2 (Heinhold, dies. Zbl. 20, 6). Verf. zeigt, daß die untere Grenze M der Quadratform $x^2 + xy - 3y^2$ gleich $M_2 = 1/3$ ist.

J. Heinhold.

Apfelbeck, Alois: A contribution to Khintchine's principle of transfer. Czechosl. math. J. 1 (76), 119—147 (1952).

Verf. verallgemeinert die bekannten Untersuchungen von V. Jarník (dies. Zbl. 19, 106) auf allgemeine Systeme. Es seien m, n natürliche Zahlen, $(\vartheta_{ij}) = \mathfrak{D}^{(n, m)}$ eine Matrix von $m \cdot n$ reellen Zahlen ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$). Dann werden die Systeme von Linearformen betrachtet (vektoriell zusammengefaßt):

$$(1) \quad \mathfrak{s}^{(n)} = \mathfrak{D}^{(n, m)} \mathfrak{x}^{(m)} + \mathfrak{u}^{(n)} \text{ in } \mathfrak{x}, \mathfrak{u}; \quad (2) \quad \mathfrak{y}^{(m)} = \mathfrak{D}^{(n, m)} \mathfrak{v}^{(n)} + \mathfrak{v}^{(m)} \text{ in } \mathfrak{v}, \mathfrak{v};$$

\mathfrak{D}' transponierte Matrix zu \mathfrak{D} ; $\|\mathfrak{x}\|$ bedeute stets das Maximum der Absolutbeträge der Komponenten von \mathfrak{x} . Jarník betrachtet den Fall $n = 1$. Im weiteren sollen $\mathfrak{x}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ stets Gittervektoren im R_m bzw. R_n sein. (1) heißt dann regulär, wenn für jedes $\mathfrak{s} \neq 0$ alle Komponenten von $\mathfrak{s} \neq 0$ sind, eigentlich, wenn aus $\mathfrak{s} = 0$ folgt $\mathfrak{x} = 0, \mathfrak{u} = 0$. Alle anderen Systeme heißen uneigentlich. Die analoge Definition gilt für (2). \mathfrak{D} heißt regulär, wenn (1), (2) regulär. Es wird nun für jedes reelle $t \geq 1$ definiert

$$\psi_1(t) = \min_{0 < \|\mathfrak{x}\| \leq t} \|\mathfrak{s}(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\|, \quad \psi_2(t) = \min_{0 < \|\mathfrak{v}\| \leq t} \|\mathfrak{s}(\mathfrak{v}, \mathfrak{v})\|, \quad \alpha(\mathfrak{D}) = \sup \omega, \quad \beta(\mathfrak{D}) = \sup \omega'$$

$$\text{über alle } \omega, \omega', \text{ für welche } \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi_1(t) t^{(m+\omega)/n} < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi_2(t) t^{(n+\omega')/m} < \infty.$$

Unter Benutzung des Mahlerschen Übertragungssatzes in der Chinčinschen Form, für welchen der Beweis gegeben wird, wird folgender Hauptsatz gezeigt: Satz 5: Es sei $m + n \geq 3$, \mathfrak{s} regulär oder eigentlich, $0 < K < \infty$, $\varphi_1(t)$ eine positive monoton wachsende stetige Funktion im Intervall $[t_0, \infty)$, wo $t_0 > 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) = \infty$. Ist dann $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) \psi_1(t) < K$ (Voraussetzung V), dann gilt: 1. Ist $m = 1$, dann ist $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} s^{n-1} \varphi_1\left(\frac{s^n}{2(n+1)}\right) \psi_2(s) \leq 2(n+1)K$; 2. ist $m > 1$, dann ist $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} (s^n \varphi_2^{-1}(K^{(m-1)/(m+n-1)} s))^{1/m-1} \psi_2(s) \leq (2(m+n))^{1/m-1}$; $\varphi_2(s)$ ist hierbei die inverse Funktion von $(t^m \varphi_1^{-1}(t))^{1/(m+n-1)}$. Wenn $m \geq 2$ und (V) durch eine schärfere Voraussetzung ersetzt wird, dann kann für $m \geq 2$ noch mehr ausgesagt werden. Aus diesem Satz folgt der allgemeine Übertragungssatz (Satz 6) ($r = m + n$)

$$(3) \quad \beta \geq \frac{n\alpha}{m(r-1) + (m-1)\alpha}, \quad \alpha \geq \frac{m\beta}{n(r-1) + (n-1)\beta}$$

$$\text{und für } m \geq 2, \alpha > 2(r-1)(r-3) \text{ schärfer } (3') \quad \beta \geq \frac{n\alpha - 2n(r-3)}{(m-1)\alpha + m - (m-2)(r-3)}.$$

Für $\alpha = \infty$ bzw. $\beta = \infty$ ist die übliche Festsetzung zu treffen. Es wird nun diskutiert, inwiefern Satz 6 scharf ist. Es wird u. a. gezeigt: 1. Für $m \geq 2, n \geq 2$ gibt es reguläre Systeme \mathfrak{D} , für welche $\alpha = \infty, \beta = \infty$. 2. Ist $m \geq 2, n \geq 1$, dann gibt es reguläre \mathfrak{D} , für welche $\alpha = \infty, \beta = n/(m-1)$. — Also in diesen Fällen ist (3), (3') scharf. Daher gibt es für $m + n \geq 4$ keine 1-1 Korrespondenz (für $m, n \geq 2$ nicht einmal eindeutig) zwischen $\alpha(\mathfrak{D})$ und $\beta(\mathfrak{D})$. E. Hlawka.

Kurzweil, Jaroslav: A contribution to the metric theory of Diophantine approximations. Czechosl. math. J. 1 (76), 149—178 (1952).

Nach einem klassischen Satz von Chinčín (vgl. Koksma, dies. Zbl. 12, 396) ist das Lebesguesche Maß der x [im Intervall $(0,1)$], welche bei gegebener Funktion $g(q)$ $[g(q)$

monoton wachsend $\rightarrow \infty$ für $q \rightarrow \infty$] die Approximation $g(q)$ zulassen, Null, wenn $J(g) = \int_0^1 \frac{dx}{xg(x)}$ konvergiert, und gleich Eins, wenn J divergiert. V. Jarník (vgl. das obige Zitat) hat in bekannten

Arbeiten die Menge der x , für welche J konvergent ist, mit Hilfe des Hausdorffschen Maßes untersucht. Der Verf. untersucht nun in gleicher Weise die Menge Q_σ der x , welche die Approximation $g(q)$ nicht zulassen, wenn J divergent ist. (Das Lebesguesche Maß ist ja dann Null.) Der Hauptsatz der Arbeit ist folgender: Es sei $g(q)$ stetig für $q \geq w$, $g(q) \geq 4\sqrt{2}$, $J(g) = \infty$. Für jede Funktion $h(q)$ mit

$$(1) \quad 1 \leq h(q) \leq g(q) + 2 \quad \text{gehe} \quad g(q h(q))/g(q) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad q \rightarrow \infty.$$

Ist weiter $f_1(d) = \exp \left\{ \frac{2}{3} \int_w^{1/\sqrt{d}} \frac{dx}{x g(x)} \right\}$, $f_2(d) = \exp \left\{ 2 \int_w^{1/\sqrt{d}} \frac{dx}{x g(x)} \right\}$, dann ist für $g(q) \geq 10^3$,

$H_m f_1(Q_\sigma) = 0$, $H_m f_2(Q_\sigma) = \infty$ ($H_m f$ = Hausdorffsches Maß in bezug auf die Funktion f). Verf. diskutiert nun, wann die Voraussetzung (1) erfüllt ist. Er stellt u. a. fest, daß dies der Fall ist, wenn $g(x)$ monoton wachsend > 0 ist und wenn es eine ganze Zahl n gibt, so daß $g(x) < \log^n x$ und wenn $g(x \log x)/g(x) \rightarrow 1$, für $x \rightarrow \infty$ (Bedingung A). Verf. zeigt unter der Voraussetzung, daß zwei Funktionen $g_1(q)$, $g_2(q)$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes und die Bedingungen A erfüllen und $g_2(q)/g_1(q) \rightarrow \infty$ für $q \rightarrow \infty$ ist, daß $H_m f(Q_{\sigma 1}) = 0$, $H_m f(Q_{\sigma 2}) = \infty$

für $g_1(q), g_2(q) > 10^3$ ist, wo $f(d) = \exp \left\{ \int_w^{1/\sqrt{d}} \frac{dx}{x \sqrt{g_1(x) g_2(x)}} \right\}$ ist. Die Funktion f gestattet

also die Menge $Q_{\sigma 1}$ und $Q_{\sigma 2}$ zu unterscheiden. Für $g(q) = \log^\alpha q$ ($0 < \alpha \leq 1$) wird in bezug auf die Familie der Funktionen $f_s(d) = \exp \log^{-s} 1/d$ ($-1 < s \leq 0$) die Dimension von Q_σ zu $\alpha - 1$ bestimmt und dies auch auf allgemeine Funktionen g, f ausgedehnt. Für g konstant und $f_s(d) = d^{s-1}$, $0 < s \leq 1$ liegt die Dimension von Q_σ zwischen $1 - 0,99/g$ und $1 - 1/4g$.

E. Hlawka.

Hartman, S.: Über die Abstände von Punkten $n\xi$ auf der Kreisperipherie. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 110—114 (1952).

Es sei ξ eine irrationale Zahl. Es wird nun auf einem Kreis vom Umfang 1 der irrationale Bogen ξ von einem beliebig gewählten Punkt P_0 aus, in einer festen Richtung n mal aufgetragen. Sind P_1, \dots, P_n die so erhaltenen Endpunkte, so sei m_n der kleinste Abstand von zwei benachbarten Punkten P_i ($i = 0, \dots, n$), ebenso \overline{M}_n der größte. H. Steinhaus hat vermutet, daß für fast alle ξ (1) $\liminf n m_n = 0$, $\limsup n m_n = \liminf n \overline{M}_n = 1$, $\limsup n \overline{M}_n = \infty$ gilt. Dies wird hier bewiesen. Es sei $\xi = [b_1, b_2, \dots]$ die Kettenbruchentwicklung von ξ ; p_i, q_i seien die Zähler bzw. die Nenner der Näherungsbrüche. Dann wird zunächst gezeigt: Ist für $n \geq q_1$ i der Index, für den $q_i \leq n < q_{i+1}$ ist, so ist $m_n = |q_i \xi - p_i|$. Weiter wird gezeigt: (1) gilt, wenn ξ unbeschränkte Teilnenner besitzt (dies ist für fast alle ξ der Fall). Weiter bemerkt der Verf. $\liminf q_i m_{q_i} \geq \frac{1}{2}$ und schärfer als (1) $\lim q_i \overline{M}_{q_i} = 1$. Beim Beweis der vierten Beziehung in (1) wird von einem bekannten Satz von Khintchine (vgl. Koksma, dies. Zbl. 12, 396) Gebrauch gemacht.

E. Hlawka.

LeVeque, W. J.: Continued fractions and approximations in $k(i)$. I, II. Indagationes math. 14, 526—535, 536—545 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 526—535, 536—545 (1952).

Cassels, Ledermann and Mahler (this Zbl. 43, 52) considered Farey sets and sections in the Gaussian field $k(i)$ and in the Eisenstein field $k(\rho)$, where $\rho = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. LeVeque (this Zbl. 47, 52) simplified and extended these results for $k(i)$. In the real case it is well known that there is a close connection between Farey sequences and continued fractions and by implication between Farey sequences and certain questions in Diophantine approximations. In the present study, some of the corresponding relations in the case of $k(i)$ are indicated. An algorithm is given which determines a continued fraction expansion of an arbitrary complex number ξ , such that its successive approximants are in a sense „best approximations“ to ξ . Also discussed are some metric theorems on approximations by numbers in $k(i)$.

E. Frank.

LeVeque, W. J.: On n -dimensional uniform distribution modulo 1. Michigan math. J. 1, 139—162 (1952).

Verf. (vgl. dies. Zbl. 37, 172) verallgemeinert hier seine Methode, metrische Sätze über die Gleichverteilung mod 1 mit Hilfe von Sätzen über quasi-orthogonale Funktionen herzuleiten (vgl. dazu die Arbeit von Kac, Salem und Zygmund, dies. Zbl. 32, 274). Im folgenden bedeute (j) ein n -Tupel natürlicher Zahlen (j_1, \dots, j_n) und $(j) \leq (t)$ stets $1 \leq j_k \leq t_k$ ($k = 1, \dots, n$),

$\sum_{(j)} = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{\infty}$, $(x_1, \dots, x_r) = x$ Punkt im R_r , dx das Volumenelement im R_r , $(t) \rightarrow \infty$ bedeute $\min(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \infty$, $e^{2\pi i x} = e(x)$, $S(u_{(j)}) = \left(\sum_{(j)} |u_{(j)}|^2 \right)^{1/2}$. Ist T eine Menge im R_r mit

positivem Lebesgueschen Maß, dann heißt eine Folge $\{O_{(j)}(x)\}$ von komplexwertigen Funktionen in L^2 quasiorthogonal, wenn die Hermitesche Form $Q(u_{(j)}) = \sum_{(j), (k)} a_{(j)(k)} u_{(j)} \bar{u}_{(k)}$ im Hilbertraum beschränkt ist, d. h. wenn es ein M gibt, so daß $|Q(u_{(j)})| \leq MS^2(u_{(j)})$. Dabei ist $a_{(j)(k)} = \int_T O_{(j)} \bar{O}_{(k)} dx$. Dann gilt folgende Verallgemeinerung des Rademacher-Menchoffschen Satzes (Satz 2): Ist $\{O_{(j)}(x)\}$ ein solches System und ist $\{c_{(j)}\}$ eine Folge, so daß

$$(1) \quad \sum_{(j)} |c_{(j)}|^2 (\log(j_1 + 1) \dots \log(j_n + 1))^2 < \infty,$$

dann ist $\sum_{(j)} c_{(j)} O_{(j)}(x)$ in T fast überall konvergent. Um nun diesen Satz anwenden zu können, wird in Verallgemeinerung eines Satzes von Kac, Salem, Zygmund (s. o.) gezeigt: Satz 3: Es gibt ein $M > 0$, so daß

$$(2) \quad \sum_{(j), (k)} A_{(j)(k)} u_{(j)} \bar{v}_{(k)} \leq MS(u_{(j)}) S(v_{(k)}),$$

wenn $A_{(j)(k)}^{-1}$ eine der drei Formen besitzt: 1. $\prod_{v=1}^n (j_v k_v)^{(1-\varepsilon)/2} |j_v - k_v|^\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$),

2. $\prod_{v=1}^n |j_v - k_v| \log^\delta(j_v + 1) \log^\delta(k_v + 1)$ ($\delta > 1$), 3. $\prod_{v=1}^n |j_v - k_v|^{\delta'}$ ($\delta' > 1$). Dabei werden

in (2) sinnlose Terme weggelassen. Daraus folgt dann der wichtige Satz 4: Ist T eine Menge im R_r mit positivem Maß und $\{O_{(j)}(x)\}$ eine Folge aus $L^2(T)$ und gibt es Konstante C, ε , so

daß für die zugehörigen $a_{(j)(k)}$ gilt (4) $|a_{(j)(k)}| \leq C \prod_{r=1}^n \max(1, |j_r - k_r|^\varepsilon)$ für alle $(j), (k)$,

dann folgt aus Satz 3: 1. für $\varepsilon < 1$ ist $\{O_{(j)} / (j_1 \dots j_n)^{(1-\varepsilon)/2}\}$ quasiorthogonal und nach Satz 2 $\sum_{(j)} O_{(j)} / (j_1 \dots j_n)^{1-\delta}$ in T fast überall konvergent, wenn $\delta < \varepsilon/2$; das gleiche gilt, wenn 2. $\varepsilon = 1$,

$\delta > 1$, $\vartheta > 0$, für $\left\{ O_{(j)} / \prod_{r=1}^n \log^\delta(j_r + 1) \right\}$ und die Reihe

$$\sum_{(j)} O_{(j)} / \{\log(j_1 + 1) \dots \log(j_n + 1)\}^{5/2+\vartheta} (j_1 \dots j_n)^{1/2}$$

bzw. wenn 3. $\varepsilon > 1$ für $\{O_{(j)}\}$ und $\sum c_{(j)} O_{(j)}(x)$ mit (1). — Satz 4 wird nun z. B. in folgender Weise angewendet: Sagen wir, eine Funktionenfolge $f(t, j)$ besitze auf $a \leq t \leq b$ ($j = 1, \dots$) die Eigenschaft E , wenn 1. f'_t, f''_t existieren, 2. $f'_t(t, j) - f'_t(t, k)$ monoton ist und $\neq 0$ für $j \neq k$, 3. wenn für $t = a$ und $t = b$ gilt $|f'_t(t, j) - f'_t(t, k)| \geq C_1 |j - k|^\varepsilon$. Dann gilt (Satz 5) mit $r = n$ für die

$$O_{(j)}(k) = e(\beta_1 f_1(x_1, j_1) + \dots + \beta_n f_n(x_n, j_n))$$

auf T die Abschätzung (4), wo C nur von C_1 abhängt. Dabei sind β_1, \dots, β_n ganze Zahlen (jede $\neq 0$), T der Quader $a_r \leq x_r \leq b_r$ ($r = 1, \dots, n$), und die f_r besitzen die Eigenschaft E auf den zugehörigen Intervallen. Dann folgen sofort aus Satz 4 durch partielle Summation in den drei Fällen 1, 2, 3 mit $\varepsilon \leq 1$ unter den dortigen Voraussetzungen fast überall in T die Abschätzungen

für $\sum_{(j) \leq (N)} e(\beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n)$ (Satz 6): (5) 1. $O((N_1 \dots N_n)^{1-\delta})$, 2. $O((N_1 \dots N_n)^{1/2} (\log N_1 \dots \log N_n)^{5/2+\vartheta})$, 3. $O((N_1 \dots N_n)^{1/2} (\log N_1 \dots \log N_n)^{3/2+\vartheta})$ ($\vartheta > 0$). Sind nur

β_1, \dots, β_h von Null verschieden ($h \leq n$), dann ist in 2., 3. n durch h zu ersetzen und der Faktor $N_{h+1} \dots N_n$ hinzuzufügen. Daraus folgt, daß das System $(f_1(x_1, j_1), \dots, f_n(x_n, j_n))$ fast überall in T gleichverteilt ist. Satz 6 läßt sich leicht verallgemeinern und liefert die Gleichverteilung mod 1 des Systems ($k = 1, 2, \dots$) $(f(x_1, k), h(x_2, \dots, x_n, k))$ fast überall, wenn f die Eigenschaft E besitzt und $e(ih)$ auf einem Quader integrabel ist. Beispiele dafür sind $\{x e^k + y e^{2k}\}$ und $(x^k + y^k)$, wenn $\max(x, y) > 1$ ist. Weitere Anwendungen der Methode werden angekündigt.

E. Hlawka.

Szűcs, Péter: Über ein Problem der Gleichverteilung. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 461–470, russische und deutsche Zusammenfassung 471, 472 (1952) [Ungarisch].

Es wird, im Anschluß an eine gemeinsame Arbeit von P. Erdős und P. Turan (dies. Zbl. 32, 16), Folgendes gezeigt: Es sei $\{P_\nu\} = \{(x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \dots, x_\nu^{(p)})\}$ eine Punktfolge im p -dimensionalen euklidischen Raum; J ein Teilintervall des p -dimensionalen Würfels von der Kantenlänge 2π ; $M(J)$ dessen (p -dimensionales) Volumen; $N(n, J)$ die Anzahl derjenigen P_ν mit $\nu \leq n$, welche nach dem p -dimensionalen Würfel mit der Kantenlänge 2π reduziert, J angehören; ferner sei

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \exp [i (k_1 x_\nu^{(1)} + k_2 x_\nu^{(2)} + \dots + k_p x_\nu^{(p)})] \right| < \Psi(k_1, k_2, \dots, k_p)$$

und m eine ganze Zahl. Dann ist

$$\left| N(n, J) - \frac{M(J)}{(2\pi)^p} n \right| < K_p \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{k_1=-m}^m \sum_{k_2=-m}^m \dots \sum_{k_p=-m}^m \frac{\Psi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{(|k_1|+1)(|k_2|+1)\dots(|k_p|+1)} \right),$$

wo K_p eine nur von der Dimensionszahl abhängige Konstante ist, während $\Sigma' \dots \Sigma'$ bedeutet daß bei der Summierung der Fall $k_1 = k_2 = \dots = k_p = 0$ außer Acht zu lassen ist.

Autoreferat.

Korobov, N. M.: Über eine Frage der diophantischen Ungleichungen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 259—262 (1952) [Russisch].

The following result is proved: Let $q \geq 2$ be a fixed integer. Let $\varphi(x)$ be a real-valued function such that for arbitrary integers m_1, m_2, \dots, m_s not all zero the sum $m_1 \varphi(x+1) + \dots + m_s \varphi(x+s)$, where $x = 1, 2, 3, \dots$, is uniformly

distributed (mod 1). Put $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(k)\} q]}{q^k}$, where $[\varphi]$ is the integral part and $\{\varphi\} =$

$\varphi - [\varphi]$ the fractional part of φ . Then the sequence αq^x , $x = 1, 2, 3, \dots$, is likewise uniformly distributed (mod 1). In a second, unproved, theorem, a general class of functions $\varphi(x)$ satisfying the last condition is given. By way of example,

if $q = 2$, then $\varphi(x)$ may be chosen as $\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu^4} x^\nu$. K. Mahler.

Analysis.

●**Marković, Željko:** Einführung in die Höhere Analysis. Zagreb: Školska knjiga 1952. XII, 640 p. [Serbo-kroatisch].

●**Keith, A. and W. J. Donaldson:** Elementary calculus. London: Robert Gibson and Sons 1952. LXXII, 425 p. 16 s. 6 d.

Mendelsohn, N. S.: Representations of positive real numbers by infinite sequences of integers. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 46, 45—55 (1952).

Vorgänge: G. Cantor, Schömilchs Zeitschr. 14, 121—128 (1869); G. Faber, Math. Ann. 60, 196—203 (1905). — Die von Cantor angegebenen hinreichenden Bedingungen für die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Darstellung der positiven Zahlen werden nunmehr als notwendig erkannt, und als Folgerung aus dem Hauptsatz des Verf. (eine offensichtliche Lücke in der Formulierung des Verf. wird nachfolgend geschlossen): „Es sei $1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots \rightarrow \infty$, $0 < \alpha_{-1} < \alpha_{-2} < \dots \rightarrow \infty$, und es seien $\dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots$ natürliche Zahlen. Notwendig und hinreichend dafür, daß jede positive Zahl N sich auf genau eine Weise in der Form $N = a_n \alpha_n + \dots + a_0 \alpha_0 + a_{-1} \alpha_{-1} + a_{-2} \alpha_{-2} + \dots$ mit ganzzahligen a_ν aus $0 \leq a_\nu \leq \lambda_\nu$ (unendlich oft $a_\nu < \lambda_\nu$) darstellen lasse, ist: $\alpha_{k+1} = \lambda_k \alpha_k + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1} + \dots$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).“

Robert Schmidt.

Mengenlehre:

Shepherdson, J. C.: Inner models for set theory. II. J. symbolic Logic 17, 225—237 (1952).

Verf. setzt hiermit die in Teil I dieser Arbeit (dies. Zbl. 43, 53) begonnenen Untersuchungen über innere Modelle der Mengenlehre fort. Es soll hier nur an einigen Beispielen angegeben werden, in welcher Richtung sich die Überlegungen bewegen, während für alle technischen und weiteren Einzelheiten auf die Arbeit selbst verwiesen sei. — Teil II ist ausschließlich dem Studium

der „überevullständigen“ Modelle (super-complete models) gewidmet. Die Definition war schon in Teil I gegeben. Es sind vollständige Modelle, die die Axiome A, B, C , befriedigen und deren wichtigste Eigenschaft ist, daß sie durch die zu ihnen gehörige Universalklasse vollständig bestimmt sind. Falls das mengentheoretische System den Axiomen A, B, C, D, E genügt, gibt es, abgesehen von dem mengentheoretischen System selbst, gerade zu jeder unerreichbaren Ordinalzahl (in der in I festgelegten engeren Fassung des Begriffs) ein überevullständiges System mit dieser Ordinalzahl als Universalklasse, und sonst keine. Die Hypothese, daß keine unerreichbaren Ordinalzahlen existieren (auch nicht in dem üblichen Sinne), kann dann als verträglich mit den mengentheoretischen Axiomen A, B, C nachgewiesen werden, unter der Voraussetzung natürlich, daß diese Axiome für sich ein widerspruchsfreies System definieren. Ähnliche Ergebnisse mit ähnlichen Mitteln erhielt schon E. Zermelo [Fundamenta Math. 16, 29—47 (1930)]. Zermelo ging aber von einer absoluten Bedeutung der mengentheoretischen Begriffe wie Vereinigungsmenge, Potenzmenge, usw. aus und nahm keine Rücksicht auf den besonders durch die Arbeiten von Th. Skolem herausgestellten mengentheoretischen Relativismus.

W. Ackermann.

Stanojević, Časlav V.: On a system of the set equations. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 39—41 u. englisch. Zusammenfassg. 41 (1952) [Serbo-kroatisch].

As generalization of Porecki's set equality equivalence $X = v \Leftrightarrow (X \cap CA) \cup (CX \cap A) = A$ (A, v denoting respectively any given set and the vacuous set), the author considers the system (1) $(X \cap CB) \cup (CY \cap A) = A$, $(Y \cap CA) \cup (CX \cap B) = B$ and proves that the union $X \cup Y$ belongs to the symmetrical difference of the sets A, B i. e. that (2) $X = X_A \cup X_B$, $Y = Y_A \cap Y_B$ with $X_A \subseteq A \cap CB$, $X_B \subseteq B \cap CA$, $Y_A \subseteq A \cap CB$, $Y_B \subseteq B \cap CA$. It is proved also that the relations $X_A \supseteq Y_A$, $Y_B \supseteq X_B$ are necessary and sufficient for the implication (2) \Rightarrow (1). The system (1) augmented by $A = B$, $X = Y$ yields the preceding Porecki's case. It is to be notified that the system (1) gave rise to Četković (this Zbl. 47, 56) to consider an infinite system of set equations. G. Kurepa.

Fodor, G.: Proof of a conjecture of P. Erdős. Acta Sci. math. 14, 219—227 (1952).

Es sei E eine Menge einer Mächtigkeit $m > \aleph_0$. In E sei eine binäre Relation $x R y$ derart definiert, daß für jedes $x \in E$ die Mächtigkeit der Menge $H(x)$ aller $y \in E$ ($y \neq x$) mit $x R y$ kleiner ist als eine (feste) Kardinalzahl n mit $\aleph_0 \leq n < m$. Dann ist E die Vereinigung von n oder weniger freien Mengen (dabei heißt eine Teilmenge F von E frei, wenn für keine zwei Elemente x und y von F gilt $x R y$ oder $y R x$). Hieraus folgt weiter: Ist m nicht darstellbar als Summe von n oder weniger Kardinalzahlen $< m$, so enthält E eine freie Teilmenge der Mächtigkeit m (Vermutung von S. Ruziewicz).

G. Nöbeling.

Erdős, P. and R. Rado: Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 417—439 (1952).

Es sei $\Omega_n(S)$ die Menge aller Teilmengen einer Menge S , die genau n Elemente enthalten. F. P. Ramsey zeigte: Zu irgend drei natürlichen Zahlen k, n, N gibt es eine natürliche Zahl M derart, daß für $S = \{1, 2, \dots, M\}$ und irgendeine Verteilung Δ von $\Omega_n(S)$ in k Klassen stets ein Element S' von $\Omega_n(S)$ existiert mit der Eigenschaft, daß die $\binom{N}{n}$ Elemente von $\Omega_n(S')$ derselben Klasse von Δ angehören. Verff. geben als erstes für das kleinste M dieser Art eine Abschätzung nach oben (Satz 1), die besser ist als die bisherigen und sich vor allem explizit durch algebraische Grundoperationen $[(n-1)\text{-fache Potenzierung}]$ ausdrücken läßt. Weiter untersuchen sie bestimmte, als invariant bzw. kanonisch bezeichnete Verteilungen von $\Omega_n(S)$. In einer früheren Arbeit der Verff. (dies. Zbl. 38, 153) wurde gezeigt, daß für $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ beide Arten von Verteilungen zusammenfallen. Hier ergibt sich, daß dies für endliche S nicht zutrifft, und es werden (Satz 2) notwendige und hinreichende Bedingungen für n und N angegeben, damit jede invariante Verteilung von $\Omega_n(1, 2, \dots, N)$ auch kanonisch ist. Mittels Satz 1 und Satz 2 gelingt (Satz 3) eine finite Fassung des von den Verff. a. a. O. verallgemeinerten Ramseyschen Satzes (Anzahl k der Klassen beliebig bei abzählbar unendlichen S und S'). — Es folgt eine Ausdehnung der Untersuchungen für $k = n = 2$ ins Transfinite. Hier geht es z. B. um die Frage, ob bei vorgeschriebenem Ordnungstypus stets eine Menge X reeller Zahlen von diesem Typus existiert derart, daß eine der Klassen die Menge $\Omega_2(X)$ enthält. Insbesondere ergibt sich (Satz 7), daß dies bei jedem Ordnungstypus $\omega + m$ (m endlich) zutrifft. Andere Sätze deuten daraufhin, daß bei jeder Verteilung jede abzählbare Ordinalzahl in diesem Sinne „verwirklicht“

werden könnte. Weiter wird durch Beispiele gezeigt, daß Ramseys Satz in gewissen Richtungen nicht zu verallgemeinern geht. Hier ergeben sich interessante, noch ungelöste Fragen. — Als letztes wird eine Abschätzung nach unten angegeben für das kleinste (in einem Satz von van der Waerden auftretende) $m = m(k, l)$ mit der Eigenschaft, daß bei jeder Verteilung von $\{1, 2, \dots, m\}$ in k Klassen mindestens eine Klasse eine arithmetische Progression von $l + 1$ Gliedern enthält.

H. Rohrbach.

Surányi, János: Sur la structure des classes finies d'ensembles. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 401—405, russische und französ. Zusammenfassgn. 406, 406—407 (1952) [Ungarisch].

Soit H un ensemble non vide, $H_1, H_2, \dots, H_n \subset H$ certains de ses sous-ensembles, et $\bar{H}_v = H - H_v$ le complément de H_v . v_1, v_2, \dots, v_k ($0 \leq k \leq n$) soit une suite arbitraire choisie parmi les indices $1, 2, \dots, n$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}$ les indices qui restent. Nous appelons les ensembles (vides ou non) définis par $A_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-k}} \equiv H_{v_1} H_{v_2} \dots H_{v_k} \bar{H}_{\mu_1} \bar{H}_{\mu_2} \dots \bar{H}_{\mu_{n-k}}$ les atomes de la classe des ensembles H_1, H_2, \dots, H_n . Nous disons que deux classes sont de la même structure, s'il y a une correspondance biunivoque entre ses ensembles telle que les atomes correspondants sont ou bien à la fois vides ou bien à la fois non vides. — L'A. démontre que le nombre maximum $N(n)$ des classes chacune contenant n ensembles au plus et ayant différentes structures deux à deux a la valeur asymptotique $2^{2^n}/n!$. $N(n)$ est aussi le nombre des polynômes multilinéaires de n variables au plus du corps premier de caractéristique 2, si deux polynômes qui ne se distinguent que dans une permutation des variables sont considérés comme identiques. Des polynômes analogues ont certain intérêt dans la théorie des circuits électriques. [Voir par exemple le travail de M. Shannon, Bell. Syst. techn. J. 28, 59—98 (1949).] — L'évaluation $(2^{2^n} - 1)/n! \leq N(n)$ pour $N(n)$ est trivial, de même que $C_0 \leq (2^{2^n} - 1)/n!$ pour le nombre C_0 des familles contenant chacune $n!$ polynômes équivalents deux à deux. Chaque famille du reste contient au plus un polynôme admettant un groupe cyclique d'ordre premier, ayant une permutation génératrice de la forme $P_{kp} = (1 \dots p)(p+1 \dots 2p) \dots ((k-1)p+1 \dots kp)$ (représentée à l'aide des cycles). Nous désignons par C_{kp} le nombre des polynômes invariants par rapport à P_{kp} et ses itérations. Pour ce nombre, nous trouvons la valeur $C_{kp} = 2^{2^n - (1-1/p)(2^n - 2^{n-(p-1)k})} - 1$.

Ainsi, en vertu de $N(n) \leq C_0 + \sum_p \sum_{k=1}^{[n/p]} C_{kp} \leq C_0 + \sum_p \sum_{k=1}^{[n/p]} \max_{kp \leq n} C_{kp} \leq C_0 + n^2 \max_{kp \leq n} C_{kp}$

et de l'inégalité $C_{kp} \leq 2^{2^n - 2^{n-2}} - 1 = 2^{3 \cdot 2^{n-2}} - 1$, on obtient l'évaluation $\frac{2^{2^n} - 1}{n!} \leq N(n) <$

$\frac{2^{2^n}}{n!} + n^2 \cdot 2^{3 \cdot 2^{n-2}} = \frac{2^{2^n}}{n!} \left(1 + \frac{n^2 \cdot n!}{2^{2^n - 2}} \right)$, ce qui complète la démonstration. Autoreferat.

Sierpiński, Waclaw: Sur les diviseurs de types ordinaux. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 397—399 (1952).

Verf. beweist in Verschärfung eines Ergebnisses aus seiner Arbeit dies. Zbl. 32, 52, daß es eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums von abzählbaren Ordnungstypen gibt, die zu je zweien rechte Teiler voneinander sind. G. H. Müller.

Davis, Anne C.: Sur l'équation $\xi^n = \alpha$ pour les types d'ordre. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 924—926 (1952).

Quel que soit le cardinal $m \in \{0, 1, \dots, n, n+1, \dots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$, il existe 2^{\aleph_0} types d'ordre dénombrables α tels que pour chaque entier $n \geq 2$ l'équation $\xi^n = \alpha$ ait exactement m solutions. Par exemple, si $m = 1$ resp. 2, on peut exiger que α soit de la forme $\eta + \beta$ ($1 \neq \beta \in S$) resp. $(1 + \beta + 1)\eta$ ($\beta \in S$), S désignant l'ensemble de tous les types d'ordre dénombrables clairsemés $\neq 0$. Dans la démonstration du théorème on fait usage du lemme que voici et que Tarski a déduit d'une proposition de Skolem: Pour tout ensemble A de types d'ordre > 0 , $\leq \aleph_0$ il existe un et un seul type $\alpha = \sum_{r \in R} \varphi(r)$ avec $\varphi \in A^R$ et tel que pour chaque $z \in A$ l'ensemble $E_{r \in R}(\varphi(r) = z)$ soit dense dans R (R denote l'ensemble ordonné des nombres rationnels; A^R est l'ensemble des applications de R en A). G. Kurepa.

Behrend, F. A.: Zum Metrisierbarkeitsbegriff von K. Wagner. Math. Ann. 125, 140—144 (1952).

Es wird kurz gezeigt, daß der Metrisierbarkeitsbegriff von K. Wagner in naheliegender Weise auf eine Addition zu gründen ist (dies. Zbl. 34, 318). In dieser Form

werden die Untersuchungen von K. Wagner wesentlich vereinfacht und seine Resultate zum Teil verschärft, zum Teil auf bekannte Ergebnisse zurückgeführt. Eine dieser Verschärfungen verallgemeinert den Satz, daß eine archimedisch geordnete Gruppe kommutativ ist. *I. Fényi.*

Estill, Mary Ellen: Concerning a problem of Souslin's. *Duke math. J.* 19, 629—639 (1952).

Souslin raised the question of the existence of spaces having the following property: (X) The space is connected, linearly ordered, is not separable, and does not contain uncountably many mutually exclusive segments. The author shows that a necessary and sufficient condition that there exists a space having property (X) is that there exists such a space which is locally connected, satisfies an axiom of Moore, and in which every couple of points can be separated by either a countable or a separable point set. *I. Fényi.*

Nakahara, Isamu: Sur la classe projective d'un ensemble défini par l'induction transfinie. *Proc. Japan Acad.* 28, 336—338 (1952).

En améliorant un th. de Kuratowski (ce Zbl. 15, 7) que celui-ci, en commun avec von Neumann, améliora aussi (ce Zbl. 17, 344—345), l'A. démontre que la surface Z de Lebesgue est élémentaire par rapport à $C_0 \times C \times J$ (Th. 2); C = l'ensemble triadique $\subseteq (0, 1)$; C_0 est l'ensemble des $t \in C$ tels que M_t soit bien ordonné; si $t = \sum_1^\infty 3^{-n} t_n$, et donc $t_n \in \{0, 2\}$, M_t est défini de la façon suivante: τ_1, τ_2, \dots étant une (1-1)-suite des nombres rationnels, M_t désigne l'ensemble de tous les τ_n attachés aux indices n vérifiant $t_n = 2$. Les dits auteurs ont considéré également une généralisation Z^* de l'ensemble Z ; l'A. démontre (th. 3) que si $B \in F_\sigma$ et si E ($z \in A(y)$) est borelien, alors Z^* est élémentaire par rapport à $C_0 \times J \times J$. Les démonstrations sont calquées sur le th. de Kuratowski-von Neumann disant que Z^* est analytique relativement à $C_0 \times J \times J$ pourvu que B soit analytique dans J . *G. Kurepa.*

Loś, J.: Recherches algébriques sur les opérations analytiques et quasi-analytiques. *Ann. Soc. Polon. Math.* 25, dédié à H. Steinhaus, 131—139 (1952).

L'A. rattache les opérations analytiques et quasi-analytiques (abr.: a. resp. q. a.) de Kantorovitch-Livenson (ce Zbl. 4, 294) aux considérations d'algèbres abstraites, et par son Th. 1 retrouve, indépendamment, un résultat de G. Birkhoff [*Bull. Amer. math. Soc.* 50, 764—768 (1944)]. Une algèbre de type α c'est chaque paire ordonnée $\Gamma = (A, \varphi)$ d'un ensemble A et d'un procédé, φ , faisant correspondre à chaque α -suite de points de A un élément de A . (A, φ) est a. (q. a.) s'il existe: un ensemble E , une famille X d'ensembles $\subseteq E$ et une opération a. (q. a.) Φ tels que l'algèbre (X, Φ) soit isomorphe à $(A, \varphi) = \Gamma$. Une congruence dans (A, φ) c'est chaque équivalence \sim dans A telle que pour des suites $a = \{a_\xi\}_{\xi < \alpha}$, $b = \{b_\xi\}_{\xi < \alpha}$ avec $a_\xi \sim b_\xi$ ($\xi < \alpha$) on ait $\varphi a \sim \varphi b$. Une famille T de congruences dans Γ „sépare toute l'algèbre“ Γ si aucun couple de points distincts de A ne sont congruents relativement à chaque $\sim \in T$. Si la famille de congruences de Γ sépare Γ , Γ est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit direct (Th. 1). Quasi-analyticité de $\Gamma \Leftrightarrow \Gamma \in (Q)$ (Th. 2). Analyticité de $\Gamma \Leftrightarrow \Gamma \in (A)$ (Th. 3). Là, $\Gamma \in (Q)$ [resp. $\Gamma \in (A)$] signifie l'existence dans Γ d'une famille T de congruences séparant Γ et que, pour chaque $\sim \in T$ l'algèbre-quotient A/\sim se compose exactement de deux éléments [et que A/\sim soit isomorphe de A/ϱ pour chaque $\varrho \in T$]. *G. Kurepa.*

Brouwer, L. E. J.: Durch klassische Theoreme angekündigte invariante Punktkerne, die unauffindbar sind. *Indagationes math.* 14, 443—445 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 443—445 (1952) [Holländisch].

Beispiel einer eindeutigen Selbstabbildung des Einheitsquadrats, die sicher nicht zwei verschiedene Fixpunktkerne besitzt, und bei der die Auffindung eines Fixpunktes abhängt von der Entscheidung zwischen einer Absurdität und der doppelten Absurdität einer Behauptung α . Beweis des Satzes, daß bei einer eindeutigen gleichmäßig stetigen Selbstabbildung des Quadrates der Original-Bild-Abstand für geeignete Punktkerne beliebig klein wird. *H. Freudenthal.*

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Tomita, Minoru: Measure theory of complete Boolean algebras. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 7, 51—60 (1952).

The paper contains the detailed proof of the following theorems: (I) A bi-compact totally disconnected space is the Stone space of a complete Boolean algebra if and only if the interior of each closed set is closed. (II) Each measure m on a measure algebra A determines a measure m^* in the Stone space S of A , such that $m^*(G) > 0$ if $G \neq 0$ is open, and $m^*(N) = 0$ if N is nowhere dense. (III) Each m^* -measurable function in S coincides with a continuous function except for a nowhere-dense set. (IV) Each perfectly additive function on A is the indefinite integral on a continuous function on S . — The above theorems are essentially known, although often otherwise formulated than in the reviewed paper. See e. g. D. Maharam, this Zbl. 36, 314; J. Dieudonné, this Zbl. 30, 160; S. Kakutani, this Zbl. 27, 111.

R. Sikorski.

Kudō, Hirokichi: A theorem of Kakutani on infinite product measures. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 3, 10—22 (1952).

Es seien $(m, m')/(\Omega, \mathfrak{B})$ zwei normierte Maße (Wahrscheinlichkeiten) m, m' , die auf einem σ -Körper \mathfrak{B} von Teilmengen einer Grundmenge Ω definiert sind. Verf. ordnet jedem $(m, m')/(\Omega, \mathfrak{B})$ eine Teilmenge $L(m, m', \Omega, \mathfrak{B})$ der Ebene zu, die aus der Gesamtheit der Punkte der Ebene mit Koordinaten $(\int \varphi(\omega) dm, \int \varphi(\omega) dm')$ für alle \mathfrak{B} -meßbaren Funktionen $\varphi(\omega)/\Omega$ mit $0 \leq \varphi(\omega) \leq 1$ besteht. $L(m, m', \Omega, \mathfrak{B})$ ist I. konvex, II. abgeschlossen, III. eine Teilmenge des Quadrates $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, IV. hat den Punkt $(1/2, 1/2)$ als Symmetriezentrum und V. enthält die Diagonale $I = \{(x, x): 0 \leq x \leq 1\}$. Bezeichnet man mit \mathfrak{L} die Gesamtheit aller Teilmengen der Ebene mit den obigen Eigenschaften I—V, so kann jedes $L \in \mathfrak{L}$ als eine Menge $L(m, m', \Omega, \mathfrak{B})$ betrachtet werden. Verf. erklärt in \mathfrak{L} eine Operation $L_1 \circ L_2$ durch

$$L_1 \circ L_2 = L(m_1 \times m_2, m'_1 \times m'_2, \Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2),$$

Def

wobei $L_i = L(m_i, m'_i, \Omega_i, \mathfrak{B}_i)$, $i = 1, 2$ und \times das Zeichen der direkten (cartesischen) Multiplikation bedeutet. Diese Operation ist eindeutig, d. h. unabhängig von der Wahl der $m_i, m'_i, \Omega_i, \mathfrak{B}_i$; ($i = 1, 2$) und führt in \mathfrak{L} eine algebraische Struktur ein, die Verf. untersucht. Die Relation $L_1 \geq L_2$, gleichwertig mit: L_1 ist eine Teilmenge von L_2 , führt in \mathfrak{L} die algebraische Struktur eines Verbandes ein. Es gilt $I \geq L \geq Q$ für jedes $L \in \mathfrak{L}$, und die Operation \circ ist monoton. Für jede monotone Folge L_1, L_2, \dots existiert der Ordnungs-(algebraische) Limes: $L_n \rightarrow L$ in \mathfrak{L} . Es seien $L_n =$

$$L(m_n, m'_n, \Omega_n, \mathfrak{B}_n) \in \mathfrak{L} \text{ und } L^* = L(m^*, m'^*, \Omega^*, \mathfrak{B}^*), \text{ wobei } m^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} m_n, m'^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} m'_n$$

unendliche Maßprodukte auf $\left(\Omega^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \mathfrak{B}^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n \right)$ im Sinne von Kakutani (dies.

Zbl. 30, 23) bedeuten, dann gilt: $(L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_n) \rightarrow L^* \stackrel{\text{Def}}{=} L_1 \circ L_2 \circ \dots = \prod_{n=1}^{\infty} L_n$.

Verf. betrachtet nun die Kakutanische Funktion $\varrho(m, m') = \int \sqrt{m(d\omega) m'(d\omega)}$ (Hellingersches

Integral), wegen $L(m, m', \Omega, \mathfrak{B}) \in \mathfrak{L}$, als eine Funktion $\varrho(L)$ auf \mathfrak{L} und beweist verschiedene Eigenschaften dieser Funktion. Mit diesen Hilfsmitteln beweist Verf. schließlich den Kakutanischen Satz: Aus $m_n \sim m'_n$, $n = 1, 2, \dots$, folgt $m^* \sim m'^*$ oder $m^* \perp m'^*$, je nachdem $\prod_{n=1}^{\infty} L_n > Q$ oder $\prod_{n=1}^{\infty} L_n = Q$, d. h. $\prod_{n=1}^{\infty} \varrho(L_n) > 0$ oder $\prod_{n=1}^{\infty} \varrho(L_n) = 0$ ist (vgl. dies. Zbl. 30, 23),

D. A. Kappos.

Orihara, Masae and Kazō Tsuji: Measures in non-separable topological spaces. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 6, 167—172 (1952).

Es wird versucht, die von Marczewski und Sikorski (vgl. dies. Zbl. 37, 322) aufgestellte notwendige und hinreichende Bedingung über einen metrischen Raum R , unter der zu jedem Borelschen σ -endlichen Maß μ in R eine Zerlegung $R = N + S$ mit separablem S und $\mu(N) = 0$ existiert, auf gewisse nicht mehr metrische topologische Räume zu übertragen. Der Beweis des Theorems 1, welches sichern soll, daß die Bedingung hinreicht, ist jedoch falsch, da die darin vorkommende Mengenfunktion ν kein Maß bildet. Ebenso ist der Beweis des Theorems 4, das sich auf

die Notwendigkeit der Bedingung bezieht, falsch, da μ_1 kein Maß darstellt. Schließlich scheint der Beweis des Lemmas 2 zumindest unvollständig zu sein.

K. Krickeberg.

Riesz, M.: Court exposé des propriétés principales de la mesure de Lebesgue. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 298—308 (1952).

Dieser kurze Aufbau der Theorie des Lebesgueschen Maßes m auf der Zahlengeraden führt bis zum speziellen Fatouschen Lemma $m(\lim E_n) \leq \lim m(E_n)$ für meßbare Mengen E_n . Das Maß einer offenen Menge wird als Summe der Längen ihrer Komponenten definiert, und das äußere Maß einer Menge E als untere Grenze der Maße aller E überdeckenden offenen Mengen. Meßbar heißen die Mengen, die sich von außen her durch offene Mengen dem äußeren Maße nach beliebig approximieren lassen. Diese Definition ist der Carathéodoryschen gleichwertig.

K. Krickeberg.

Ruy Gomes, Luís: Beispiel einer im Lebesgueschen Sinne nichtmeßbaren Menge. Gaz. Mat., Lisboa **13**, 4—6 (1952) [Portugiesisch].

È puramente e semplicemente l'esposizione del capitolo VIII sugli insiemi non misurabili del recente volume di J. von Neumann, Functional Operators, Vol. I: Measures and Integrals, Princeton 1950 (questo Zbl. **39**, 284), con tutti i dettagli dimostrativi per uno scopo esclusivamente didattico. L'insieme non misurabile secondo Lebesgue viene costruito facendo ricorso al postulato di Zermelo.

L. Giuliano.

Ionescu Tulcea, C. T.: Sur l'intégration des fonctions d'ensemble. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. **4**, 75—83, russische und französ. Zusammenfassgn. **83** (1952) [Rumänisch].

L'A. définit une intégrale pour les fonctions d'ensemble dont les valeurs appartiennent à un groupe abélien topologique séparé. L'intégrale considérée représente une généralisation de l'intégrale définie par C. E. Rickart, pour les fonctions d'ensemble, à valeur dans un espace linéaire topologique localement convexe.

Autoreferat.

Marczewski, E. et C. Ryll-Nardzewski: Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 145—154 (1952).

Sei \mathfrak{K} ein σ -Körper von Untermengen eines abstrakten Raumes X , \mathfrak{B} der σ -Körper von Borelschen Untermengen eines separablen metrischen Raumes T , und \mathfrak{M} der kleinste σ -Körper, der alle Mengen $A_1 \times A_2$ ($A_1 \in \mathfrak{K}$, $A_2 \in \mathfrak{B}$) enthält. Sei $f(x, t)$ eine auf $X \times T$ erklärte reelle Funktion so, daß die Funktion $f(x, t_0)$ einer Variablen x für jedes $t_0 \in T$ \mathfrak{K} -meßbar ist. Es wird gefragt, welche Bedingungen für die Funktionen $f(x, t)$ ($x_0 \in X$) einer Variablen t die \mathfrak{M} -Meßbarkeit von $f(x, t)$ implizieren. Z. B. im Falle $T =$ die Menge der reellen Zahlen ist es hinreichend, daß $f(x_0, t)$ für jedes $x_0 \in X$ rechtsseitig (oder: linksseitig) stetig ist. Doch ist es nicht hinreichend, daß $f(x_0, t)$ für jedes $x_0 \in X$ entweder rechtsseitig oder linksseitig stetig ist. — Sei R eine abzählbare dichte Untermenge von T und $\varphi_R(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tau \in R, K_n} \varphi(\tau)$, $\varphi^R(t) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in R, K_n} \varphi(\tau)$ für jede auf T erklärte reelle Funktion $\varphi(t)$, wo $K_n = \bigcap_{\tau \in R} \{\tau, t < 1/n\}$. Sei

D_φ die Menge aller Unstetigkeitspunkte von $\varphi(t)$. Betrachten wir die folgende Eigenschaft von $\varphi(t)$: (α) D_φ ist von der ersten Kategorie und $\varphi_R(t) \leq \varphi(t) \leq \varphi^R(t)$ für jedes $t \in T$. Wenn X ein metrischer Raum ist, wenn $f(x, t_0)$ für jedes $t_0 \in T$ die Bairesche Eigenschaft hat und wenn $f(x_0, t)$ für jedes $x_0 \in X$ die Eigenschaft (α) besitzt, dann hat $f(x, t)$ die Bairesche Eigenschaft in $X \times T$. Ein analoger Satz wird auch über die $\kappa \times \lambda$ -Meßbarkeit der Funktion $f(x, t)$ bewiesen, wo $\kappa \times \lambda$ das Produktmaß gewisser auf \mathfrak{K} und \mathfrak{B} erklärter Maße κ und λ ist.

R. Sikorski.

Hewitt, Edwin: Integral representation of certain linear functionals. Ark. Mat. **2**, 269—282 (1952).

Es sei \mathfrak{F} eine Menge von auf der abstrakten Menge X erklärten reellen Funktionen mit den Eigenschaften: a) für $f, g \in \mathfrak{F}$ und α, β reell gilt $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{F}$; b) für $f, g \in \mathfrak{F}$ gilt $\min(f, g) \in \mathfrak{F}$; c) für $f \in \mathfrak{F}$ und $\alpha \geq 0$ gilt $\min(f, \alpha) \in \mathfrak{F}$. Man bezeichne mit \mathfrak{P} das System aller Mengen der Form $\bigcup_{i=1}^n [f_i(x) > 0]$, mit \mathfrak{S} das aller Teilmengen der Mengen $G \in \mathfrak{P}$. Es sei I ein auf \mathfrak{F} erklärtes reelles Funktional mit den Eigenschaften a') $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ für $f, g \in \mathfrak{F}$ und α, β reell; b') für $f \geq 0$ gilt $I(f) \geq 0$. Mit χ_A bezeichne man die charakteristische Funktion der Menge A . Verf. definiert dann die Mengenfunktion $\gamma(G)$ für $G \in \mathfrak{P}$ durch $\gamma(G) = \sup_{0 \leq f \leq \chi_G} I(f)$

und setzt für $H \in \mathfrak{S}$ $\gamma^*(H) = \inf_{G \in \mathfrak{P}, G \supset H} \gamma(G)$. Die Menge $A \in \mathfrak{S}$ heißt γ^* -meßbar, wenn für

$Q \in \mathfrak{F}$ gilt $\gamma^*(Q) = \gamma^*(Q \cap A) + \gamma^*(Q \cap A')$; A' bedeutet die Komplementärmenge von A . Die γ^* -meßbaren Mengen bilden einen Ring $\mathfrak{M}(\gamma^*) \supset \mathfrak{P}$, und γ^* ist ein (endlich-)additives Maß in $\mathfrak{M}(\gamma^*)$. Definiert man wie üblich die γ^* -meßbaren Funktionen und das Integral $\int_X f(x) d\gamma^*(x)$,

so gilt $I(f) = \int_X f(x) d\gamma^*(x)$ für beschränktes $f \in \mathfrak{F}$ mit $(*) \quad \gamma\left(\frac{E}{\mathfrak{F}}[f(x) \neq 0]\right) < +\infty$. Für beliebiges $f \in \mathfrak{F}$ braucht diese Relation nicht zu gelten, es gilt aber allerdings für $0 \leq f \leq 1$ $\int_X f(x) d\gamma^*(x) \leq I(f)$. Gilt $(*)$ für alle $f \in \mathfrak{F}$, so ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend dafür, daß γ^* in $\mathfrak{M}(\gamma^*)$ σ -additiv sei: für $f_n \in \mathfrak{F}$, $1 \geq f_n \geq f_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) und $n \rightarrow \infty$ gilt $I(f_n) \rightarrow 0$. Zahlreiche Beispiele und Gegenbeispiele. Á. Császár.

Dubrovskij, V. M.: Über eine Eigenschaft der Formel von Nikodym. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 693—696 (1952) [Russisch].

Verf. setzt eine Reihe früherer Untersuchungen über die Familien vollständig additiver, endlicher Mengenfunktionen $\Phi(\alpha, e)$ mit einem Parameter α [dies. Zbl. 29, 115 (1); 32, 197 (2); 34, 182 (3); 36, 169 (4)] fort durch Angabe eines weiteren Satzes bezüglich der Nikodymschen Integraldarstellung einer solchen Funktionenfamilie (mit reellen Funktionswerten) $\Phi(\alpha, e) = \int_e f(\alpha, x) M(d\mathfrak{M}_x)$. e ist ein Element einer Familie \mathfrak{M} von Untermengen einer vorgelegten Menge \mathfrak{M}

irgendwelcher Elemente, α variiert innerhalb einer anderen Menge A . $f(\alpha, x)$ ist eine Familie reeller Funktionen des Elementes $x \in \mathfrak{M}$, die für jeden Wert $\alpha \in A$ in bezug auf \mathfrak{M} meßbar und in bezug auf eine nichtnegative, vollständig additive, endliche Mengenfunktion $M(e)$, $e \in \mathfrak{M}$, summierbar sind. Dabei soll $M(e)$ eine Basis von $\Phi(\alpha, e)$ im Sinne von Radon darstellen, d. h. es soll aus $e \in \mathfrak{M}$ und $M(e) = 0$ für jedes $\alpha \in A$ $\Phi(\alpha, e) = 0$ folgen [vgl. (1)]. Das Integral ist im Lebesgue-Stieltjesschen Sinn zu verstehen. — Über die früheren Begriffsbildungen und Definitionen hinausgehend, versteht Verf. 1. unter dem Additivitätsindex D von $\Phi(\alpha, e)$ die obere Grenze der Größe $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup \Phi(\alpha, e_{n+1} + e_{n+2} + \dots)]$, wo e_1, e_2, \dots eine beliebige Folge von

gegenseitig elementfremden Mengen von \mathfrak{M} bedeutet und das Zeichen \sup sich auf alle $\alpha \in A$ bezieht, für alle derartigen Folgen $\{e_i\}$, 2. unter dem Summierbarkeitsindex Δ von $f(\alpha, x)$ in bezug auf $M(e)$ die Größe $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup D(\alpha, N)]$ mit $D(\alpha, N) = \int_{E(\alpha, N)} [|f(\alpha, x)| - N] M(d\mathfrak{M}_x)$,

wo N eine positive Zahl und $E(\alpha, N)$ die Menge aller Elemente $x \in \mathfrak{M}$, für die die Differenz im Integranden positiv ausfällt, bedeutet und das Zeichen \sup sich wieder auf alle $\alpha \in A$ bezieht. D ist ein Maß für den Grad der Nichtgleichmäßigkeit der Additivität von $\Phi(\alpha, e)$ bezüglich α ; $D = 0$ bedeutet $\Phi(\alpha, e_{n+1} + e_{n+2} + \dots) \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in α , also gleichmäßige Additivität. Ebenso ist Δ ein Maß für den Grad der Nichtgleichmäßigkeit der Summierbarkeit bezüglich $M(e)$ der Funktionenfamilie $f(\alpha, x)$ für alle $\alpha \in A$; $\Delta = 0$ bedeutet $D(\alpha, N) \rightarrow 0$ bei $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig in α , d. h. die gleichgradige Summierbarkeit von $f(\alpha, x)$ [vgl. (3)]. — Der Satz, den Verf. beweist, lautet: Sei $\Phi(\alpha, e)$ gleichmäßig beschränkt für alle $e \in \mathfrak{M}$ und $\alpha \in A$. Dann wird sich im allgemeinen in der Nikodymschen Integraldarstellung von $\Phi(\alpha, e)$ bei Abänderung der Basis $M(e)$ auch die Funktion $f(\alpha, x)$ ändern. Jedoch bleibt der Summierbarkeitsindex Δ von $f(\alpha, x)$ in bezug auf $M(e)$ unverändert und ist gleich dem Additivitätsindex D von $\Phi(\alpha, e)$. Der Sonderfall $D = \Delta = 0$ ist in (3) bewiesen worden. Am Schluß wird durch Angabe eines Gegenbeispiels noch gezeigt, daß die Forderung der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionenfamilie $\Phi(\alpha, e)$ wesentlich für das Bestehen des Satzes ist. E. Svenson.

Newman, M. H. A.: Path-length and linear measure. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 455—468 (1952).

Es sei X ein Kontinuum eines metrischen Raumes, $\Lambda^1 X$ das lineare Maß von K und $0 < L < +\infty$. Jede der folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend für $\Lambda^1 X \leq L$. — 1. K kann als stetiges Bild $f(I)$ des Einheitsintervalls I dargestellt werden derart, daß die „Durchlaufungslänge“ λf von $f(I)$ höchstens gleich $2L$ ist und die Menge aller Punkte x von K mit höchstens einem Urbildpunkt das lineare Maß 0 hat. — 2. (X liegt im Euklidischen E^n .) Es existiert ein f mit $f(0) = f(1)$ derart, daß $\lambda f \leq 2L$ und f nullhomotop in K ist. — 3. (X liegt in der Euklidischen Ebene.) Das 2-dimensionale Maß $\Lambda^2 K$ von K ist gleich 0, und für jede Komponente D_i des Komplements von K existiert eine Abbildung f_i von I auf die Begrenzung von D_i mit $\sum_i \lambda f_i \leq 2L$. — 4. (X liegt in der Euklidischen Ebene.)

Es ist $\Lambda^2 K = 0$, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge D mit $X \subseteq D \subseteq U_\varepsilon(X)$, deren Begrenzung die Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Polygone mit einer Gesamtlänge $< 2L + \varepsilon$ ist. G. Nöbeling.

Hadwiger, H.: Translationsinvariante, additive und schwachstetige Polyederfunktionale. Arch. der Math. 3, 387—394 (1952).

Es wird die lineare Mannigfaltigkeit M der für alle eigentlichen Polyeder A des k -dimensionalen euklidischen Raumes R_k definierten Funktionale $\varphi(A)$ bestimmt, die durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet sind. I. Translationsinvarianz: $\varphi(A) = \varphi(B)$, falls A und B translationsgleich sind. II. Additivität: $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, wenn $A + B$ eine elementargeometrische Zerlegung in die Teilpolyeder A und B darstellt. III. Schwache Stetigkeit: $\varphi(A)$ ist stetig hinsichtlich einer Variation von A , bei der die Seitenflächen nur parallel verschoben werden. — Für die translationsinvarianten additiven und schwach-stetigen Polyederfunktionale φ aus M im R_k gilt die rekursive Darstellung $(1) \varphi(A) = c V(A) + \sum_u \chi(u) \varphi'_u(A'_u)$,

wobei c eine willkürliche Konstante, $V(A)$ das Volumen von A und u einen nach außen weisenden Normalvektor einer Seitenfläche von A bedeuten; $\varphi'_u(A'_u)$ ist dann in einem zu u normalen R_{k-1} ein ebensolches Funktional eines $(k-1)$ -dimensionalen Polyeders A'_u , dessen Seitenflächen zu denen von A parallel sind; $\chi(u) = -\chi(-u)$ ist eine willkürliche ungerade Richtungsfunktion. Da für $k=1$ $\varphi(A) = c V(A)$ gilt, kann aus (1) auch eine explizite Darstellung für die

Funktionale aus M abgeleitet werden. Es gilt $\varphi(A) = \sum_{v=0}^{k-1} \varphi_v(A)$, wobei $\varphi_v(A)$ ein homogenes Funktional von Grade $k-v$ bedeutet, das für $v=0$ durch $\varphi_0(A) = c V_k(A)$ bestimmt ist. Für $0 < v \leq k-1$ gilt $\varphi_v(A) = \sum_{u_1 \dots u_v} \chi(u_1, u_2, \dots, u_v) V_{k-v}(A_{u_1 u_2 \dots u_v})$. Hierbei ist V_μ das μ -dimensionale Volumen und $\chi(\varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_v u_v) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_v \chi(u_0, \dots, u_v)$; $\varepsilon_\mu = \pm 1$; $\mu = 1, \dots, v$ eine ungerade willkürliche Funktion der v -Beine u_1, u_2, \dots, u_v . R. Inzinger.

Ellis, H. W.: On the relation between the P^2 -integral and the Cesàro-Perron scale of integrals. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 46, 29—32 (1952).

Die Integraldefinition von Perron ist bekanntlich mehrfach verallgemeinert worden, um weitere Klassen von Funktionen integrierbar zu machen. U. a. gibt es das $C_r P$ -Integral und das P^2 -Integral. Verf. zeigt, daß keiner dieser Begriffe den andern umfaßt. Vielmehr gibt es Funktionen, die P^2 -integrierbar sind, ohne $C_r P$ -integrierbar für irgendein r zu sein; und umgekehrt gibt es auch $C_r P$ -integrierbare Funktionen, die nicht P^2 -integrierbar sind. O. Perron.

Erim, Kerim: Stieltjessche Integrale. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 332—342 (1952).

Die von H. Copeland (dies. Zbl. 17, 107) gegebene Definition des Stieltjesintegrals $\int_a^b g df$ bei nicht fallendem f mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$ beruht auf der Möglichkeit, eine Folge x_1, x_2, x_3, \dots zu konstruieren, deren Grenzhäufigkeit in jedem Teilintervall (α, β) mit $f(\beta) - f(\alpha)$ übereinstimmt; alsdann wird

$$\lim_n (g(x_1) + \dots + g(x_n))/n$$

als Wert der obigen Integrals erklärt. Verf. (†1952) hat diese Definition [dies. Zbl. 22, 320 und Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, n. Ser. 6, 12—17 (1941)] auf 2 und 3 Dimensionen und jetzt allgemein auf k Dimensionen übertragen. Existiert das Integral im Riemann-Stieltjesschen Sinne, dann auch im obigen. G. Aumann.

Tung, Huai-Yuen: On Stieltjes integral of order 2. Sci. Record 5, 29—43 und chines. Zusammenfassg. 29 (1952).

$f(x)$ und $g(x)$ seien reelle in $a \leq x \leq b$ definierte Funktionen. Man betrachte Unterteilungen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ von $[a, b]$ so, daß die Länge des größten Teilintervalles mit wachsendem n gegen 0 strebt. Falls für alle solchen Einteilungsfolgen

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \left[\frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{g(x_i) - g(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \right]$$

gegen einen Limes strebt, werde er mit $\int_a^b f(x) d^2 g(x)$ [Stieltjes-Integral zweiter Ordnung] bezeichnet. — Eine Funktion $F(x)$ heißt in $[a, b]$ von beschränk-

ter Variation der Ordnung 2, wenn $\sup \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \right| \leq A$ für alle beliebigen Einteilungen von $[a, b]$. Vermöge dieses Begriffes wird eine Reihe von Existenzsätzen für das Stieltjes-Integral zweiter Ordnung bewiesen. Es dürfte jedoch der Aufmerksamkeit des Verf. entgangen sein, daß sowohl der Begriff dieses Integrals als auch im wesentlichen seine Existenzsätze nicht neu sind. Vgl. Kantorovič, dies. Zbl. 11, 60 und für Verallgemeinerungen auf Stieltjes-Integrale k -ter Ordnung Stoljarov, dies. Zbl. 35, 153. L. Schmetterer.

Puig Adam, P.: Einige Verallgemeinerungen des Kettenbruchalgorithmus mit Differentialen als Partialnennern. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 12, 206—221 und französ. Zusammenfassg. 221—222 (1952) [Spanisch].

Verf. führt an Kettenbrüchen einen Grenzübergang durch, der dem Übergang von endlichen Summen zu Riemannschen Integralen analog ist. Wenn dabei die Nenner der Kettenbrüche mit Hilfe der stetigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gebildet

sind, so führt Verf. für den Grenzwert der Kettenbrüche die Schreibweise $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_C$ ein (C ist Anfangswert). Insbesondere ist

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_0 = 0 = \int_a^b f(x) dx, \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_\infty = \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{-1},$$

und es gilt die „Lötformel“

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_{a_1} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_{a_1}^b \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_C = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|_C.$$

Während Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 44, 56) die Existenz der betreffenden Grenzwerte von Kettenbrüchen unter der Voraussetzung gezeigt hatte, daß $f(x)$, $g(x)$, C positiv sind, zeigt er in der vorliegenden Arbeit: Wechselt das Produkt fg in einem Intervall $[a, b]$ sein Vorzeichen nicht, so können im voraus solche Teilintervalle bestimmt werden, in denen die Grenzwerte existieren und das gleiche Vorzeichen wie C haben. Fälle, in denen fg das Vorzeichen wechselt, können mittels der obigen Lötformel erfaßt werden. Die Zusammenhänge mit der Riccatischen Differentialgleichung sowie mit einem System zweier linearer homogener Differentialgleichungen werden erneut bewiesen. Die Betrachtung kann auch auf komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen sowie auf Funktionen einer komplexen Variablen ausgedehnt werden; im letzteren Falle erweist sich für Funktionen $f(x)$, $g(x)$, die in einem Kreise regulär analytisch sind, in einem geeigneten Teilgebiet dieses Kreises der Grenzwert der Kettenbrüche als vorhanden und unabhängig vom Wege.

A. Stöhr.

Biernacki, Mierczysław: Sur une inégalité entre les intégrales due à Tschéby-scheff. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A* 5, 23—28, polnische und russ. Zusammenfassgn. 28—29 (1952).

Bezeichnen f , g , p im Intervall (a, b) integrierbare Funktionen, wobei $p > 0$, so besteht die Ungleichung

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \cdot \int_a^b p(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) g(x) dx,$$

falls die Funktionen $f_1(x) = \int_a^x p(\xi) f(\xi) d\xi$, $g_1(x) = \int_a^x p(\xi) g(\xi) d\xi$

ihre Extremwerte nur in endlich vielen, und für beide Funktionen gleichen Punkten annehmen, und sonst in (a, b) gleichzeitig wachsen oder fallen. Wenn aber f_1 und g_1 in den gemeinsamen Monotonieintervallen durchweg entgegengesetztes Wachstum besitzen, so kehrt sich die Ungleichung um. Es ist dies eine Verallgemeinerung eines früheren Ergebnisses des Verf. (dies. Zbl. 40, 319). G. Aumann.

Chuang, Chi-Tai: Un théorème sur les fonctions convexes croissantes. Sci. Record 5, 1—9 und chines. Zusammenfassg. 1 (1952).

Soit $\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1$, $U(x)$ une fonction positive, non-décroissante, telle que $\int_0^\infty \frac{dx}{U(x)}$ converge. Posons $H = H_{\alpha, \lambda, U} = \frac{2\alpha}{1-\lambda} + \int_0^\infty \frac{dx}{U(x)}$, $Y = \Phi_{\alpha, \lambda, U}(X) =$

$\frac{H}{X} \frac{2\alpha}{1-\lambda} + \int_{\frac{X}{H}}^\infty \frac{dx}{U(x)}$, et soit $X = \Psi_{\alpha, \lambda, U}(Y) = \Psi(Y)$ la fonction inverse. Soit

$m(t)$ une fonction convexe et croissante pour $t < 0$, dont la dérivée droite $m'_+(t) \geq 1$. Supposons qu'il existe une valeur t_0 telle que $m(t_0) \geq \Psi(-t_0)$. Alors il existe t_1, t_2, t_3 , tels que: 1. $-H \leq t_1 < t_2 < t_3 < 0$, 2. $m(t_2) - m(t_1) = m(t_3) - m(t_2) = \alpha$, 3. $\lambda(t_2 - t_1) < t_3 - t_2 < t_2 - t_1$, 4. $m(t_2) \geq \alpha$, 5. $m'_+(t_2) \leq U[m(t_2)]$. — Dans une publication ultérieure l'A. donnera des applications de ce théorème à la théorie des fonctions holomorphes dans le cercle unité. J. Horváth.

Peyovitch, T.: Contribution à l'étude de la formule

$$\underbrace{\int_x^\infty dx \int_x^\infty dx \dots \int_x^\infty f(x) dx}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^\infty (t-x)^{n-1} f(t) dt.$$

Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 7—10 u. franz. Zusammenfassg. 10 (1952) [Serbisch].

La validité de la formule du titre est démontrée sous la condition

$$\int_x^\infty t^{n-1} f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

M. Hukuhara.

Mersman, W. A.: Evaluation of an integral occurring in servo-mechanism theory. Pacific J. Math. 2, 627—632 (1952).

Es handelt sich um das Integral $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{g(x)}{h(x)h(-x)} dx$ mit $g(x) =$

$\sum_{k=1}^n g_k x^{2(n-k)}$, $h(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$, wobei a_k reell, $a_0 \neq 0$ und die Wurzeln von $h(x)$ alle verschieden sind und negativen Realteil haben.

Dekker, J. W.: Der Inhalt des Prismoids: Formeln, in denen nur zwei Flächen auftreten. Euclides, Groningen 27, 254—259 (1952) [Holländisch].

Verf. betrachtet Körper (z. B. Prismoide), deren Rauminhalt sich nach der Simpsonschen Formel berechnen läßt und die die Eigenschaft haben, daß die Fläche eines Parallelschnitts zur Grenzfläche sich durch eine Funktion zweiten Grades $D(x)$ von x ausdrücken läßt, wobei x den Abstand der Schnittfläche von der Grenzfläche bedeutet. Der Rauminhalt zwischen $x=0$ und $x=h$ läßt sich dann darstellen

durch die Formel $\int_0^h D(x) dx = \frac{1}{6} h \{D(0) + 4D(\frac{1}{2}h) + D(h)\}$. In allgemeiner Weise

ist der Rauminhalt bestimmt, wenn man die Höhe h und die Flächen von drei Parallelschnitten kennt. Verf. untersucht, unter welchen Voraussetzungen der Rauminhalt durch die Flächen zweier Parallelschnitte und die Höhe dargestellt werden kann. Die obige Formel gilt auch für Körper, bei denen $D(x)$ eine Funktion dritten Grades ist. Nun wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich in diesem Falle das Volumen durch zwei Schnittflächen und die Höhe darstellen läßt. Der letzte Paragraph dehnt die Betrachtung auf Integrale von Funktionen 4. und 5. Grades und auf die Anwendung der Simpsonschen Formel als Näherungsformel bei numerischer Integration aus. E. Löffler.

Valk, Ir J.: The solid angle Ω and applications thereof in electrical engineering. *Simon Stevin* 29, 145—170 (1952).

Natucci, A.: L'uso del principio d'induzione nel calcolo di certi integrali. *Giorn. Mat. Battaglini* 81 (V. Ser. 1), 85—87 (1952).

Giuliano, Landolino: Una proprietà delle successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* 6, 99—107 (1952).

L'A. chiama egualmente quasi lipschitziane le funzioni, misurabili in un insieme E , di una successione $\{f_n(x, y)\}$, quando per ogni numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare una costante positiva L ed un sotto-insieme misurabile e_n di E , in modo tale che risulti $\text{mis } E - \text{mis } e_n < \varepsilon$ ed $|f_n(x', y') - f_n(x'', y'')| \leq L \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$ per ogni coppia di punti (x', y') ed (x'', y'') di e_n ($n = 1, 2, \dots$). Asserisce indi che risultano egualmente quasi lipschitziane le funzioni, misurabili e generalmente a variazione limitata (secondo Tonelli) in un quadrato T , di una successione $\{f_n(x, y)\}$, nella ulteriore ipotesi che queste siano in T egualmente quasi litate (secondo Fréchet) e che le variazioni $V_x^{(n)}(y)$ e $V_y^{(n)}(x)$ di $f_n(x, y)$ soddisfino alla limitazione $\int_0^1 V_x^{(n)}(y) dy + \int_0^1 V_y^{(n)}(x) dx < K$ ($n = 1, 2, \dots$), K essendo una costante. — Osserva infine che conseguendo da tale proprietà, nelle ipotesi precisate, la eguale quasi-continuità (secondo Fréchet) delle funzioni della successione $\{f_n(x, y)\}$, in virtù di un noto teorema di Fréchet, la data successione risulta, com'era già stato dimostrato dal recensore, compatta rispetto alla convergenza in misura.

F. Cafiero.

Baiada, Emilio: Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* 6, 59—68 (1952).

L'A. dimostra che data una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni assolutamente continue in un intervallo (a, b) ivi soddisfacenti alle limitazioni $\int_a^{b-h} |f'_n(x+h) - f'_n(x)| dx \leq e_n(h)$, $\sum_{r=1}^{\infty} e_n \frac{h}{2^r} \leq \sigma(h)$ ($n = 1, 2, \dots$), $e_n(h)$ e $\sigma(h)$ essendo infinitesimi con h , nella ulteriore ipotesi che $\{f_n(x)\}$ converga uniformemente in (a, b) , la successione delle derivate $\{f'_n(x)\}$ converge in misura verso la derivata della funzione limite $f(x)$ e la successione delle lunghezze delle curve $y = f_n(x)$ alla lunghezza della curva $y = f(x)$. — L'A. osserva che le condizioni di carattere quantitativo dell'enunciato sono soddisfatte quando risulti $|f'_n(x+h) - f'_n(x)| \leq h M_n(x)$, $\int_a^b M(x) dx < N$ ($n = 1, 2, \dots$), N essendo una costante.

F. Cafiero.

Četković, Šimon: Sur la différentiabilité des deux familles des fonctions réelles. *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 4, Nr. 3/4, 53—57 u. französ. Zusammenfassg. 57 (1952) [Serbisch].

L'A. indique deux familles de fonctions avec les propriétés suivantes. 1° Chaque fonction de la première de ces familles est continue aux points d'un ensemble partout dense qui n'est pas borné et tout de même elle ne possède la dérivée en aucun point. 2° Chaque fonction de la seconde de ces familles est discontinue aux points d'un ensemble partout dense qui n'est pas borné et tout de même elle possède la dérivée aux points d'un ensemble aussi partout dense qui n'est pas borné.

Autoreferat.

Scorza Toso, Annamaria: Sulla derivazione di una funzione composta. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 21, 198—201 (1952).

L'A. dimostra che, data la funzione $z(x, y)$ continua rispetto ad x e rispetto ad y in un rettangolo R , nonchè le funzioni $x(t)$ ed $y(t)$ assolutamente continue in un intervallo I ed ivi soddisfacenti quasi ovunque alla limitazione $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$, nella ulteriore ipotesi che $z(x, y)$ ammetta per quasi tutti i i di I derivate parziali

prime nel punto $[x(t), y(t)]$, supposto interno ad R al variare di t in I , la funzione composta $Z(t) = z[x(t), y(t)]$ è dotata di derivata asintotica $Z'_{ap}(t)$ quasi dappertutto in I e si ha $Z'_{ap}(t) = z'_x[x(t), y(t)] x'(t) + z'_y[x(t), y(t)] y'(t)$. *F. Cafiero.*

Gurin, L.: Über die Vertauschbarkeit der Mittelbildung und der Differentiation. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 155—158 (1952) [Russisch].

In einem Gebiet des R_n seien differenzierbare Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$, $w_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) und $U(x_1, \dots, x_n)$ gegeben. Man betrachte die Transformation (1) $\bar{x}_1 = U(x_1, \dots, x_n)$, $w_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = w_i(x_1, \dots, x_n)$ und zu N gegebenen Punkten (x_{1j}, \dots, x_{nj}) , $j = 1, \dots, N$, folgende Mittelwertbildung:

(2) $f(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{j=1}^N t_j f(x_{1j}, \dots, x_{nj})$, $t_j = 1, \dots, N$, $w_i(x'_1, \dots, x'_n) = c_i$ ($i = 1, \dots, n-1$), c_i gegebene Konstante. Unter den Bedingungen

$$\frac{\partial(w_1, \dots, w_{n-1})}{\partial(x_2, \dots, x_n)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f, w_1, \dots, w_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$$

wird die Vertauschbarkeit von (1) mit (2) untersucht, d. h. Bedingungen für die

Gültigkeit von (3) $f(\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_n) = \sum_{j=1}^N t_j f(\bar{x}_{1j}, \dots, \bar{x}_{nj})$, $w_i(\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_n) = c_i$

($i = 1, \dots, (n-1)$). Verf. beweist den (zu erwartenden) Satz: Die Vertauschbarkeit von (1) und (2) besteht genau dann, wenn es ein $z_1(x_1, \dots, x_n)$ gibt, so daß $f = A z_1 + B$, $U = C z_1 + D$ (A, B, C, D konstant). M. E. bedarf es einer Präzisierung der Voraussetzungen. — Es folgen verwandte Sätze. *L. Schmetterer.*

Salinas, Baltasar R.: Über eine Verallgemeinerung der Formeln von Taylor, Darboux und Euler-Maclaurin. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 281—289 (1952) [Spanisch].

Scopo di questo lavoro è soprattutto quello di generalizzare le classiche formule di Darboux, Taylor e Euler-MacLaurin. Fra gli altri risultati stabiliti dall'A. ci limitiamo a riportare il seguente Teorema. Siano $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ e $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ due sistemi di numeri (reali o complessi) tali che $\sum_{r=0}^n |\alpha_r| \neq 0$, $\sum_{r=0}^n |\beta_r| \neq 0$ e

siano $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ $n+1$ soluzioni distinte dell'equazione $e^{a\mu} \sum_{r=0}^n \alpha_r \mu^r = e^{b\mu} \sum_{r=0}^n \beta_r \mu^r$.

Se $\sum_{r=0}^{n+1} \lambda_r x^r = \prod_{r=0}^n (x - \mu_r)$, vale la formula $\sum_{r=0}^n \beta_r f^{(r)}(b) - \sum_{r=0}^n \alpha_r f^{(r)}(a) =$

$\int_a^b \psi(x) \sum_{r=0}^{n+1} \lambda_r f^{(r)}(x) dx$ dove $\psi(x) = \frac{|a_{ij}|}{|b_{ij}|}$, $a_{ij}, b_{ij} = \mu_{i-1}^{j-1}$ ($i = 1, \dots, n+1$;

$j = 1, \dots, n$), $a_{i, n+1} = K_{i-1} e^{-\mu_{i-1} x}$, $b_{i, n+1} = \mu_{i-1}^n$, $K_r = e^{a\mu_r} \sum_{s=0}^n \alpha_s \mu_r^s = e^{b\mu_r} \sum_{s=0}^n \beta_s \mu_r^s$

qualunque sia la funzione $f(x)$ (reale o complessa) con la derivata $f^{(n+1)}(x)$ continua nell'intervallo (a, b) . *L. Giuliano.*

Gonçalves, J. Vicente: Sur le reste de la formule de Taylor. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 89—90 (1952).

Gonçalves, J. Vicente: Sur un développement de $f(x, y)$. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 91—92 (1952).

Laurenti, Fernando: Sopra alcune questioni di minimo. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—1951), 140—145 (1952).

Dugué, Daniel: Démonstration par la théorie des familles normales d'un théorème de M. S. Bernstein et de résultats analogues. Bull. Sci. math., II. Sér. 75_r, 153—160 (1951).

In a simple and elegant manner the author proves Bernstein's theorem about the analyticity of functions with positive derivatives of all orders. He also gives some extensions. *Bo Kjellberg.*

Boas, Ralph P.: Sur les fonctions possédant une suite de dérivées positives. Bull. Sci. math., II. Sér. **76**, 142—144 (1952).

In this note some results of Dugué (see the preceding review) are deduced and completed with the aid of Bernstein's original methods. *Bo Kjellberg.*

Laugué, Pierre: Sur certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 114—116 (1952).

M_p étant une suite de nombres positifs, l'A. appelle $C^* \{M_p\}$ la classe des fonctions $f(x)$ ($0 \leq x < \infty$) indéfiniment dérivables (i. d.) et telles que
$$\int_0^\infty [f^{(p)}(x)]^2 e^x x^p dx < K^p M_p, \quad C_1 \{M_p\}$$
 la classe des fonctions $g(x)$ ($0 \leq x < \infty$)

i. d. et telles que
$$\int_0^\infty [g^{(p)}(x)]^2 e^{-x} x^p dx < K^p M_p,$$
 et énonce des conditions nécessaires et suffisantes pour que $C^* \{M_p\} \subset C^* \{M'_p\}$ resp. que $C_1 \{M_p\} \subset C_1 \{M'_p\}$. (Cf. Mandelbrojt, Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. Paris 1952, Chap. VI., ce Zbl. **48**, 52.) *J. Horváth.*

SanJuan, Ricardo: Sur la somme des classes quasi-analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 118—119 (1952).

L'A. démontre que si $f_1(x)$ est une fonction analytique, $f_2(x)$ une fonction quasi-analytique et si $f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), alors $f_1(x) \equiv f_2(x)$. *J. Horváth.*

Allgemeine Reihenlehre:

Knopp, Konrad: Einige Bemerkungen zur A -, E_k - und B_k -Summierung. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **1**, 129—138 (1952).

Es ist bekannt, daß aus der B_k - oder E_k -Summierbarkeit einer Reihe ihre A -Summierbarkeit folgt, falls nur die A -Transformation der Reihe in $\langle 0, 1 \rangle$ existiert, das A -Verfahren also überhaupt anwendbar ist. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß in entsprechendem Sinne auch die $|B_k|$ - oder $|E_k|$ -Summierbarkeit einer Reihe ihre $|A|$ -Summierbarkeit nach sich zieht. Der Beweis beruht im wesentlichen auf einem vom Verf. und G. Lorentz schon früher (dies. Zbl. **41**, 184) ohne Ausführung des Beweises veröffentlichten Satz, der sehr allgemeine hinreichende Bedingungen dafür angibt, daß ein Summierungsverfahren für Integrale absolut permanent ist. *F. Lösch.*

Zamansky, Marc: Sur la sommation des séries divergentes. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 908—910 (1951).

Verf. gibt in der vorliegenden Note erste Resultate an, die darauf abzielen, unter Beschränkung auf Reihen Σu_n mit $u_n = o(1)$ einige Äquivalenzsätze für Summierungsverfahren zusammenzufassen. Ist $g(u)$ eine in $\langle 0, 1 \rangle$ stetige und schwankungsbeschränkte Funktion mit $g(0) = 1$, so werden für eine Reihe Σu_n der genannten Art die Mittel $T_n(g) = \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) u_k$ betrachtet; die Reihe heiße (g) -summierbar zum Wert s , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(g) = s$ gilt. In Verallgemeinerung früherer Resultate (M. Zamansky, dies. Zbl. **45**, 179) wird zunächst angegeben, daß aus der (C, p) -Summierbarkeit von Σu_n für ganzes $p \geq 0$ ihre (g) -Summierbarkeit folgt, falls $g(u)$ in $(0, 1)$ eine stetige $(p+1)$ -te Ableitung besitzt, die für $u \rightarrow 0$ eine Abschätzung $O(u^\alpha)$ mit $\alpha > -(p+1)$ zuläßt. — Das Studium der Umkehrbarkeit des vorstehenden Satzes veranlaßt den Verf., neben dem (g) -Verfahren noch zwei weitere Verfahren zu betrachten, von denen das eine dadurch entsteht, daß die Mittel $T_n(g)$ durch $H_n^z(g) = \frac{z}{n^z} \sum_{p=1}^n p^{z-1} T_p(g)$ ersetzt werden,

das andere dadurch, daß $g(u)$ durch $G_z(g, u) = z u^z \int_u^1 \frac{g(t)}{t^{z+1}} dt$ ersetzt wird [z beliebig komplex,

$\Re(z) > 0$; für $\Re(z) < 0$ ist eine Abänderung notwendig]. Der Vergleich dieser Verfahren führt, wie Verf. ohne Beweis angibt, zu Resultaten, die z. B. die Äquivalenz der Cesàroschen, Hölder'schen und Rieszschen Mittel für ganzes $p > 0$ besagen. *F. Lösch.*

Zamansky, Marc: Sur la sommation des séries divergentes et les théorèmes taubériens. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 999—1001 (1951).

Anknüpfend an die vorstehend besprochene Note skizziert Verf. den Beweis eines Satzes, der für Polynome $g(u)$ die Äquivalenz des (g) -Verfahrens mit einem gewissen (C, p) -Verfahren aussagt. Der Satz ist jedoch in der angegebenen allgemeinen Form nicht richtig; vgl. dazu H. Delange-M. Zamansky, folgendes Referat.

F. Lösch.

Delange, Hubert et Marc Zamansky: Sur une classe de procédés de sommation des séries divergentes. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1025—1027 (1952).

Die Note bringt ohne Beweise eine Reihe von Ergebnissen, die sich auf ein schon früher von dem zweitgenannten Verf. angegriffenes Problem beziehen (vgl. vorsteh. Referate). Es sei $g(u)$ eine in $\langle 0, 1 \rangle$ schwankungsbeschränkte Funktion; dann heiße eine Reihe $\sum u_n$ [die nicht mehr wie in den zitierten Noten der Beschränkung $u_n = o(1)$ unterworfen ist] (g) -summierbar, wenn $T_x(g) = \sum_{k \leq x} g(k/x) u_k$ für $x \rightarrow +\infty$ einen Limes besitzt. Zu verschiedenen Funktionen $g(u)$ gehörige Verfahren werden miteinander verglichen, wobei in der vorliegenden Note

die Mellintransformierte $M(g, s) = \int_0^1 t^{s-1} g(t) dt$ der in $0 \leq u \leq 1$ mit $g(u)$, in $u > 1$ mit 0 identischen Funktion herangezogen wird. Es wird ein allgemeiner Satz angegeben, dem insbesondere über die Beziehung der (g) -Verfahren zu den (C, p) -Verfahren zu entnehmen ist: Es sei g in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig, es existiere $g^{(p)}$ in $(0, 1)$ und sei in jedem Intervall $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ mit $\varepsilon > 0$ schwankungsbeschränkt, es sei ferner $g(0) = 1$, und es sei $u = 1$ eine Nullstelle p -ter Ordnung

von g ; gilt dann $\int_{+0}^1 t^p |dg^{(p)}(t)| < |g^{(p)}(1)|$, so ist das (g) -Verfahren mit dem (C, p) -Verfahren äquivalent. — Speziell werden (g) -Verfahren miteinander verglichen, die zu Funktionen g einer durch die folgenden vier Eigenschaften erklärten Klasse \mathfrak{C}_p (p ganz ≥ 0) gehören: (1) g ist in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig und besitzt in $(0, 1)$ Ableitungen bis zur $(p+1)$ -ten Ordnung; (2) $g(0) = 1$, $g^{(p)}$ ist die erste in $u = 1$ nicht verschwindende Ableitung von g ; (3) $g^{(p+1)}$ ist in jedem Intervall $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ mit $\varepsilon > 0$ schwankungsbeschränkt; (4) die totale Variation $V(\varepsilon)$ von $g^{(p+1)}$ in $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ läßt für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine Abschätzung $O(\varepsilon^{\alpha-p-1})$ mit $\alpha > 0$ zu.

F. Lösch.

Zamansky, Marc: Sur la sommation des séries divergentes. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1094—1096 (1952).

Anknüpfend an die vorstehend besprochene Note wird gezeigt, daß aus der (g) -Summierbarkeit einer Reihe $\sum u_n$ für eine der Klasse \mathfrak{C}_p angehörige Funktion g die Abschätzung $u_n = o(n^p)$ folgt. Weiter werden Eigenschaften derjenigen „Ausnahmereihe“ angegeben, bei denen die (g) -Summierbarkeit für eine Funktion g der Klasse \mathfrak{C}_p nicht die (C, p) -Summierbarkeit nach sich zieht.

F. Lösch.

Matsuyama, Noboru: On the methods of summability $(K, 1)$ & $(K, 2)$. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A **6**, 113—120 (1952).

Wenn für eine gegebene Reihe $\sum a_n$ in einem gewissen Intervall $(0, \eta)$ die unendlichen Reihen $a_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^{\pi} \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} t/2} dt$, $a_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \int_a^{\pi} \frac{(\sin nt/2)^2}{2(\sin t/2)^2} dt$ gegen einen Grenzwert $F_1(a)$ bzw. $F_2(a)$ konvergieren und wenn für $a \rightarrow +0$ der Grenzwert $\lim F_j(a) = s_j$ ($j = 1, 2$) existiert, so heißt die Reihe $\sum a_n$ nach Zygmund (dies. Zbl. **38**, 219) (K, j) -summierbar zum Wert s_j (abgekürzt $\sum a_n = s_j (K, j)$). Verf. untersucht die Beziehungen dieser beiden Summierbarkeitsverfahren zur Cesàroschen Summierbarkeitsmethode und zur Konvergenz. Satz 1. Aus $\sum a_n = s(K, 2)$ und $a_n = O(1)$ folgt für jedes $\delta > 0$, daß $\sum a_n = s(C, 2 + \delta)$ ist. Satz 2. Wenn gleichzeitig $\sum a_n = s(K, 1)$ und $\sum a_n = s(K, 2)$ und noch $a_n = O(1)$ ist, gilt für jedes $\delta > 0$ $\sum a_n = s(C, 1 + \delta)$. Satz 3. C sei eine positive Konstante. Aus $\sum a_n = 0$ und $n a_n > -C$ ($n = 1, 2, \dots$) folgt $\sum a_n = 0 (K, 1)$. Satz 4. Sei $\delta > 0$ und konstant. Aus $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = o(1/\log n)$ und $n^\delta a_n > -C$ ($n = 1, 2, \dots$) folgt $\sum a_n = 0 (K, 1)$.

V. Garten.

Agnew, R. P.: Tauberian series and their Abel power series transforms. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 218—230 (1952).

Für die Reihe $\sum u_n$ mit $\overline{\lim} n |u_n| = L < \infty$ sei $s(n) = \sum_{v=0}^n u_v$ und $f(t) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v t^v$ für $0 < t < 1$ gesetzt. Resultate von Verf. (dies. Zbl. 32, 152) und De-lange (dies. Zbl. 39, 64) besagen über den Zusammenhang von $s(n)$ und $f(t)$, daß es für jedes $q > 0$ eine angebbare beste Konstante $A(q)$ gibt, für die einerseits (1) $\lim_{t \rightarrow 1-} |f(t) - s(n(t))| \leq A(q) \cdot L$ mit $n(t) = [q/\log t^{-1}]$ gilt, und andererseits (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(t(n)) - s(n)| \leq A(q) \cdot L$ mit $t(n) = e^{-q/n}$. Verf. beweist die Richtigkeit von (1) und (2) für $n(t) = [q/(1-t)]$ bzw. $t(n) = (1-q/n)$. Sodann wird die Gültigkeit von (1) untersucht, wenn allgemeiner $0 < q_1 = \lim_{t \rightarrow 1-} (1-t)n(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 1-} (1-t)n(t) = q_2 < \infty$ verlangt wird. Für die extremen Fälle $q_1 = 0$ oder $q_2 = \infty$ gibt es reelle Reihen $\sum u_n$ mit $L = 0$, für die $\lim_{t \rightarrow 1-} |f(t) - s(n(t))| = \infty$ wird. Analog wird (2) untersucht, wenn $0 < q_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-t(n))n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1-t(n))n = q_2 < \infty$ gilt. Verf. gibt einige offene Probleme an. *D. Gaier.*

Macphail, M. S.: The extended Euler-Knopp transformation. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 46, 39–43 (1952).

Sei $g(t) = \sum_0^{\infty} c_n t^n$ konvergent für $|t| < \varrho$ ($\varrho > 1$) und $g(1) = 1$; durch $z = g(t)$ werde $|t| = 1$ auf eine einfach geschlossene Jordankurve J , $|t| < 1$ schlicht auf deren Innengebiet D abgebildet. $\sum_0^{\infty} a_n$ heiße G -summierbar zum Wert s , wenn $\sum_0^{\infty} b_n = s$ ist; dabei soll $\sum_0^{\infty} b_n t^n$ aus $\sum_0^{\infty} a_n [g(t)]^n$ durch formales Umordnen nach Potenzen von t entstehen. Der Fall $c_0 = 0$, $c_n \geq 0$ wurde von O. Perron [Math. Z. 18, 157–172 (1923)] studiert; zum Fall $c_0 = 0$ vgl. Verf. (dies. Zbl. 34, 185), zum Fall $c_0 \neq 0$ vgl. K. Knopp [Acta math. 47, 313–335 (1926)]. Verf. läßt $c_0 \neq 0$ zu. Das G -Verfahren ist nicht notwendig permanent; ist $R > |c_0|$, so hat G genau dann, wenn D samt Rand zum Kreis $|z| \leq R$ gehört, die Eigenschaft, daß $\sum a_n G$ -summierbar ist unter der Voraussetzung, daß der Konvergenzradius von $\sum a_n z^n$ größer als R ist. Ist $|c_0| < 1$, so ist das G -Verfahren verträglich mit der Konvergenz, wenn (diese in der Formulierung des Theorems 3 nicht explizit gemachte Voraussetzung ist nach einer brieflichen Mitteilung des Verf. an Ref. noch hinzuzufügen) im Durchschnitt von $|z| < 1$ und D ein c_0 und 1 verbindender, weder an $|z| = 1$ noch J tangentialer Weg existiert. Weitere Bemerkungen über die G -Summierbarkeit von Potenzreihen und Cauchyschen Produktreihen, sowie über spezielle G -Verfahren (Taylorsche Verfahren und andere). *W. Meyer-König.*

Basu, S. K.: A note on the oscillation of the Cesàro and Hölder means of a sequence and a function. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 45–50 (1952).

Für reelle Zahlenfolgen (s_n) werde die Schwankung durch $\Omega(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ erklärt. Bedeuten C_n^α, H_n^α die Cesàroschen bzw. Hölderschen Mittelbildungen, so gilt bekanntlich $\Omega(H_n^\alpha) \leq \Omega(C_n^\alpha)$ für $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. Verf. zeigt, daß diese Ungleichungen allgemeiner für jedes $\alpha > 1$ und $-1 < \alpha < 0$ gilt, während sich für $0 < \alpha < 1$ der Sinn dieser Ungleichung gerade umkehrt. Ferner wird die Möglichkeit von Ungleichungen der Art $\Omega(C_n^\beta) \leq \Omega(H_n^\alpha)$ erörtert. Den Betrachtungen über die gewöhnlichen Hölderschen und Cesàroschen Mittel von Folgen werden entsprechende Schwankungssätze für die Integralmittel von Funktionen zur Seite gestellt. Ferner wird ein vom Verf. für gewöhnliche Mittel herrührender Satz nunmehr auf Integralmittel übertragen: Für $\alpha, r > 0$ folgt aus $C^\alpha(x) = O(x^r)$, daß auch $H^\alpha(x) = O(x^r)$ gilt und umgekehrt. *V. Garten.*

Bendukidze, A. D.: Die starke Summierbarkeit von numerischen Doppelreihen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 13, 329–334 (1952) [Russisch].

(1) $\sum a_{ik}$ sei eine formal gegebene unendliche Doppelreihe, $s_{mn} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik}$.

(1) heißt stark (H, p) $[(H^\lambda, p)]$ -summierbar gegen s , wenn

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n |s_{ik} - s|^p \rightarrow 0$$

für $m, n \rightarrow \infty$ [und $1/\lambda \leq m/n \leq \lambda$, wobei $\lambda \geq 1$], 1. Wenn (1) stark (H, p) $[(H^\lambda, p)]$ -summierbar ist, dann ist die Reihe auch stark (H, q) $[(H^\lambda, q)]$ -summierbar für $q < p$. 2. Der Schluß in umgekehrter Richtung gelingt, wenn man Beschränktheit der s_{mn} annimmt. Ein Beispiel zeigt, daß er im allgemeinen nicht möglich ist.

3. Wenn (1) gegen s konvergiert und $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_{mn}}{(m+1)^{1/p}} = 0$ für jedes feste n sowie eine analoge Zeilenbedingung gilt, dann ist (1) stark (H^λ, p) summierbar gegen s . Als Literatur führt Verf. eine Reihe von grusinischen (dem Ref. unzugänglichen) Arbeiten von Čelidze an. Čelidze, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **53**, 691—694 (1946) enthält verwandte Sätze für die absolute A -Summierbarkeit von Doppelreihen.

L. Schmetterer.

Žak, I. E.: Über die Riemann-Summierbarkeit von numerischen Doppelreihen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR **13**, 587—593 (1952) [Russisch].

Die unendliche Reihe $\sum a_{mn}$ heißt Riemann (R-)summierbar gegen den Wert s , wenn die Reihe $f(k, h) = \sum a_{mn} \left(\frac{\sin mk}{mk} \right)^2 \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2$ für ein $\delta > 0$ in $0 < |h|$, $|k| < \delta$ konvergiert und $\lim_{k, h \rightarrow 0} f(k, h) = s$. Dieses R-Verfahren ist nicht regulär,

wie Verf. an einem Beispiel zeigt, jedoch folgt aus den allgemeinen Untersuchungen von Robinson [Trans. Amer. math. Soc. **28**, 50—73 (1928)], daß das Verfahren für die konvergenten Doppelreihen mit beschränkten Partialsummen regulär ist. Dieser Satz ist jedoch schon lange bekannt [Geiringer, Monatsh. Math. Phys. **29**, 65—144 (1918), insbes. S. 72]. Man vergleiche auch Gacharya, dies. Zbl. **42**, 73, wo ein analoger Satz für beidseitig unendliche Reihen bewiesen wird. Gestützt auf die allgemeinen Untersuchungen von Čelidze (dies. Zbl. **40**, 26) ergibt sich weiter: Aus $\sum a_{mn} \rightarrow s$ und $\left| \sum_{m \leq r, n \leq t} a_{mn} \right| \leq K(r+1)^\alpha (t+1)^\beta$, $0 < \alpha, \beta < 1$ folgt die restringierte R-Summierbarkeit der Reihe gegen s [d. h. $\lim f(k, h) = s$, für $1/\lambda \leq |k/h| \leq \lambda$, was auch $\lambda \geq 1$ sei].

L. Schmetterer.

Freud, Géza: Restglied eines Tauberschen Satzes. II. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **3**, 299—307 (1952).

Anschließend an seine erste gleichbetitelte Arbeit (dies. Zbl. **44**, 324), wo Verf. Sätze Tauberscher Art vom Typ $A \rightarrow (C, 1)$ mit Abschätzung des Restgliedes betrachtet, werden hier Sätze vom Typ $A \rightarrow (C, k)$ angegeben und gezeigt, daß die Abschätzungen des Restgliedes dabei mit wachsendem k verschärft werden können. Es wird, unter anderem, bewiesen: Sei $\alpha > 0$, $A(t)$ nicht abnehmend für $t > 0$ und $\varepsilon > 0$; aus $s^\alpha \int_0^\infty e^{-st} dA(t) = A + o(s^\varepsilon)$, ($s \rightarrow 0$), folgt

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (1-t/x)^{k-1} dA(t) = \frac{A x^\alpha}{\Gamma(\alpha+k)} + O(x^\alpha / \lg^k x), \quad (x \rightarrow \infty).$$

J. Karamata.

Pleijel, Åke: On a theorem of Carleman. Mat. Tidsskr. B **1952**, 39—43 (1952).

Es handelt sich um Sätze Tauberscher Art für Stieltjesche Integrale; und zwar wird in Verschärfung eines Ergebnisses von Carleman (dies. Zbl. **12**, 70) zunächst gezeigt: Ist $A(x)$ für $x \geq 0$ monoton nicht abnehmend, $A(0) = 0$, und ist ferner

$$(*) \quad \int_0^\infty \frac{dA(\lambda)}{\lambda+r} = P \frac{\lg r}{r} + \frac{Q}{r} + O(e^{-\alpha \sqrt{r}}) \quad \text{für } r \rightarrow \infty,$$

($\alpha > 0$, P, Q Konstante), so gilt $A(x) = P \lg x + Q + O((\lg x)/\sqrt{x})$ für $x \rightarrow \infty$.

Der Beweis beruht auf der Betrachtung der analytischen Funktion $f(z) = \int_0^\infty \frac{dA(\lambda)}{\lambda - z}$

+ $P \lg(-z)/z + Q/z$ unter Anwendung Phragmén-Lindelöfscher Methoden und von Integralabschätzungen im Komplexen. Tritt an Stelle der rechten Seite von (*) der Ausdruck $P r^{-k}$ ($0 < k < 1$), so wird, wie ohne Einzeldurchführung angegeben wird, $A(x) \sim P (\sin \pi k) x^{1-k}/\pi (1-k)$. Durch Anwendung auf die asymptotische Abschätzung der summatorischen Funktion der Koeffizienten von Partialbruch-

reihen der Form $\sum_{v=1}^\infty \frac{A_v}{r_v + r}$ ergibt sich ein neuer Beweis eines weiteren Carleman-schen Satzes (dies. Zbl. 17, 114; beide Stellen dem Ref. nicht zugänglich).

Hermann Schmidt.

Shah, S. M. and Mohd. Ishaq: Quasi-monotone series and an extension of Dvoretzky's theorem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 36, 402—404 (1952).

Die Ergebnisse von A. Dvoretzky (dies. Zbl. 35, 38) und O. Szász (dies. Zbl. 35, 39) werden verschärft zu: „Für die Reihen $\sum u_n$ und $\sum d_n$ sei mit $0 \leq a < 1$ für $n \geq n_0$ erfüllt: $0 < u_{n+1} \leq u_n (1 + a/n)$, $0 < d_{n+1} \leq d_n (1 + a/n)$, $\sum d_n = \infty$, $\lim (u_1 + \dots + u_n)/(d_1 + \dots + d_n) = a$, und es sei $a < c < 1$, $k = (1/c)^{1/(3a+2)}$. Dann gibt es $R_v \rightarrow \infty$ derart, daß $u_n < d_n$ zutrifft für alle n aus $R_v \leq n \leq k R_v$.“

Robert Schmidt.

Mo, Yeh: On d_n -monotone sequence. Sci. Record 5, 52—58 und chines. Zusammenfassg. 51 (1952).

(d_n) sei eine Folge positiver, in engerem Sinne monoton gegen $+\infty$ wachsender Zahlen. Dann heißt eine Folge (a_n) positiver Zahlen d_n -monoton, wenn für irgendein $\alpha \geq 0$ und alle $n \geq n_0(\alpha) > 0$ die Ungleichung $a_{n+1} \leq a_n (1 + \alpha/d_n)$ gilt. Bilden die Glieder a_n einer unendlichen Reihe eine d_n -monotone Folge, so heißt die Reihe d_n -monoton. (Eine quasi-monotone Folge ist eine n -monotone Folge. Die Theorie der d_n -monotonen Folgen stellt nur im Fall $d_n = n$ für alle n eine Verallgemeinerung der quasimonotonen Folgen dar.) Verf. beweist die folgenden drei Sätze: Satz 1: Sei p irgendeine feste positive ganze Zahl ≥ 2 und (1) $d_n = O(n)$, (2) $d_n/d_{[np]} = O(1)$. Ist nun die Reihe $\sum a_n$ d_n -monoton und konvergent, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n a_n = 0$. Satz 2:

(Verallgemeinerung des Dirichletschen Kriteriums). Die Folge (d_n) genüge den Bedingungen (1) und (2) von Satz 1, die Folge (b_n) sei d_n -monoton, die Teilsummen

$A_p = \sum_{n=1}^p a_n$ seien für alle p beschränkt und endlich sei die Reihe $\sum b_n/d_n$ konvergent.

Dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_n b_n$. Satz 3: Die Folge (d_n) genüge wieder den Bedingungen (1), (2) aus Satz 1. Mit der Folge (a_n) ist zugleich auch die Folge ihrer arithmetischen Mittel d_n -monoton.

V. Garten.

Duparc, H. J. A., C. G. Lekkerkerker and W. Peremans: An elementary proof of a formula of Jensen. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1952—021, 4 S. (1952).

Aus der Lagrange-Burmanschen Umkehrformel folgt nach Jensen die Darstellung

$$(1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(a+nz)} \frac{(a+nz)^n}{n!}; \quad |z| < 1, \quad |z e^{-z}| < \frac{1}{e}$$

[Acta math. 26, 309 (1902)]. Die Verff. geben einen elementaren Beweis von (1) und werten die obige Reihe auch im Gebiet $|z| > 1$, $|z e^{-z}| < 1/e$ aus. D. Gaier.

Vadnal, Alojzij: Quelques propriétés du double logarithme et la somme des séries du type: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 11—14 [Kroatisch] mit serbisch. und französ. Zusammenfassg. 14—15 (1952).

Le logarithme double est défini comme fonction de la limite supérieure de l'intégral $\text{Ln } x =$

$\int_e^x \frac{dx}{x \ln x}$. Celui-ci a la propriété de rester invariable si nous élevons ses limites inférieure et

supérieure à la même puissance, ou bien si nous en extrayons la même racine. L'analyse de la

série de Taylor de la fonction inverse au logarithme double nous montre qu'il est possible de

calculer la somme S des séries du type: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$, où l'exposant p est un nombre naturel.

selon la formule $S = a_p e$ dans laquelle le coefficient a_p est défini par la formule de récurrence

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n-2}{n-\nu-1} a_{n-\nu}.$$

Autoreferat.

Lane, Ralph E.: Absolute convergence of continued fractions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 904—913 (1952).

The continued fraction considered here is (1) $f_1 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \dots$, where f_1 is a number, $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ is a sequence of nonzero numbers, and $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ is a sequence of numbers. (i) Necessary and sufficient conditions are obtained for the absolute convergence of (1). (ii) A new characterization of positive definite continued fractions is given. If (1) converges, it is shown that there is a positive definite continued fraction which is a contraction of (1). (iii) Sufficient conditions are obtained for the absolute convergence of positive definite continued fractions.

E. Frank.

Lane, Ralph E.: A complete solution of the convergence problem for continued fractions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 914—920 (1952).

The following theorem is proved: For a continued fraction F to have only finite approximants and to converge, it is necessary and sufficient that there exist a continued fraction $f_1 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \dots$, where f_1 is a number, a_p is a nonzero number, and b_p is a number, $p = 1, 2, \dots$, equivalent to F and a sequence s of numbers such that (i) $0 < s_p < 1$ for $p = 1, 2, \dots$, and (ii) $s_1 |b_1| > |b_1 - 1|$, and (iii) if, for each positive integer p ,

$$e_p = [s_{p+1}/(1 - s_{p+1}^2) - |a_{p+1} - b_{p+1} + 1/(1 - s_{p+1}^2)|] [1/s_p |a_{p+1}|],$$

then $e_p \geq 1$ for $p = 1, 2, \dots$, and $\sum_{p=1}^{\infty} (e_p - 1)$ diverges.

E. Frank.

Cugiani, Marco: Le frazioni continue. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 257—267 (1952).

This paper contains a review of recurrence formulas and properties of the continued fraction $a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

E. Frank.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Nikol'skij, S. M.: Einige Fragen der Approximation von differenzierbaren Funktionen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 113—123 und ungarische Zusammenfassg. 124 (1952) [Russisch].

Verf. gibt einen zusammenfassenden Überblick über einige Ergebnisse zur konstruktiven Funktionentheorie. (Die Beweise sind an andern Stellen veröffentlicht, vgl. z. B. dies. Zbl. 36, 323.) Es handelt sich 1. um die beste Annäherung von Funktionen, deren r -te Ableitung einen Sprung hat, bzw. um die Übertragung der Begriffsbildungen auf Annäherung im Mittel und durch trigonometrische Polynome, 2. um die lineare Methode der Annäherung, 3. um die Frage, wieweit die Existenz der partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$ nach x die Existenz der Ableitungen nach y zur Folge hat.

W. Hahn.

Bohman, Harald: On approximation of continuous and of analytic functions. Ark. Mat. 2, 43—56 (1952).

Let $\{\xi_{v,n}\}$ denote a system of points, $n = 1, 2, \dots$, $v = 0, 1, \dots, n$, $0 \leq \xi_{0,n} < \xi_{1,n} < \dots < \xi_{n,n} \leq 1$. To every point $\xi_{v,n}$ associate a real function $\psi_{v,n}(x)$ ($0 \leq x \leq 1$). For a continuous $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) let

$$A_n(f) = \sum_{v=0}^n f(\xi_{v,n}) \psi_{v,n}(x).$$

1. There exists a system of functions $\psi_{v,n}$, such that $A_n(f) \rightarrow f$ uniformly in $0 \leq x \leq 1$, if and only if $\xi_{0,n} \rightarrow 0$, $\xi_{n,n} \rightarrow 1$, $\max_v (\xi_{v+1,n} - \xi_{v,n}) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

2. If $\psi_{v,n} \geq 0$, then the following two conditions are each necessary and sufficient for $A_n(f) \rightarrow f$ uniformly in $0 \leq x \leq 1$: A. For any $\eta > 0$, $\sum_{|\xi_{v,n} - x| \geq \eta} \psi_{v,n} \rightarrow 0$,

$\sum_{|\xi_{v,n} - x| < \eta} \psi_{v,n} \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$, uniformly in $0 \leq x \leq 1$. (This result is well known, cf. Gál, this Zbl. 37, 327; 44, 67 and 68.) B. $A_n(1) \rightarrow 1$, $A_n(x) \rightarrow x$,

$A_n(x^2) \rightarrow x^2$ as $n \rightarrow \infty$, uniformly in $0 \leq x \leq 1$. — As an application the author considers $\xi_{v,n} = v/n$, $\psi_{v,n} = e^{-Nx} (Nx)^v / v!$, $N = N(n) \geq 0$. In this case if

(1) $n/N \rightarrow 1$ and (2) $(n - N)/\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow \infty$, then $A_n(f) \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) uniformly in $0 \leq x \leq 1$. — Finally let Ω be the finite region of the complex plane bounded by the curve $\rho e^{1 - e \cos \varphi} = 1$ ($z = \rho e^{i\varphi}$). If $f(z)$ is regular inside Ω ,

continuous on its boundary, $f(1) = 0$, $|f(z)|/|1 - z|$ is bounded on the boundary of Ω and if (1) and (2) are satisfied, then $A_n(f) = e^{-Nz} \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n}\right) \left(\frac{Nz}{v!}\right)^v$ tends uni-

formly to $f(z)$ in every closed region interior to Ω , as $n \rightarrow \infty$. J. Horváth.

Picone, Mauro: Points de vue généraux sur l'interpolation et quelques recherches qu'ils suggèrent. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 240—259 (1952).

Die Arbeit steht in naher Beziehung zu der in dies. Zbl. 45, 29 besprochenen Abh. (P I) des Verf.; der folgende Bericht über sie knüpft, auch in den Bezeichnungen, an die genannte Besprechung (B I) an, von der Z. 9—31 leitende Gedanken beider Abhh. wiedergeben. Zu dem letzten dort angeführten Satze gesellt Verf. hier einen neuen über den Fehler beim Ersatz von $A(f)$ durch $A(u_r)$ in dem besonderen Falle, daß $f \in \{f\}$, $\{f\}'$ mit den Operatoren $E'(f) \subset \{e(P)\}'$ und $L_p'(f) \subset \{l(P)\}'$ genau so erklärt wird wie $\{f\}$ in P I mit $E(f) \subset \{e(P)\}$ und $L_p(f) \subset \{l(P)\}$. — Er kommt dann auf die von ihm in P I behandelten mechanischen Integrationen zurück, stellt aber hier auch die auf dreifache Integrale J_3 bezüglichen Formeln von Bézout-scher, Gaußscher und Cavalieri-Simpson (C.-S.)-scher Art auf. In ihnen erscheinen einfache J_1 und Doppelintegrale J_2 ; wenn man J_1 und J_2 , wie in P I ausgeführt, auf dieselbe, etwa auf C.-S.-sche Art ausdrückt, erhält man, was als Beispiel diene, annähernd

$$(1) \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{216} \text{vol } T [\Sigma f(V_i) + 4 \Sigma f(P'_i) + 16 \Sigma f(P''_i) + 64 f(P_0)],$$

wo T der Quader $a \leq x \leq a'$, $b \leq y \leq b'$, $c \leq z \leq c'$ ist, V_i seine Ecken, P'_i seine Kanten-, P''_i seine Flächen- und P_0 seine Raummitte sind, $\text{vol } T$ sein Inhalt. (1) gibt für das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \log(1 + x + y + z) dx dy dz = 0,8951293 \dots \text{ den Näherungswert } 0,894900. \text{ Offen}$$

bleibt die Frage, ob man alle zu einem Operator D und seinen Potenzen gehörigen, auf Funktionen einer reellen Veränderlichen bezüglichen Schaltverfahren, besonders auch die Formeln von Cotes und alle von Gauß, auf eine beliebige Anzahl solcher Veränderlicher übertragen kann. Verf. hält eine bejahende Antwort für wahrscheinlich, weil er an folgenden Satz glaubt: Im Bereiche T von S_r (s. B I, Z. 11) seien m Punkte $P_h(x^{(h)}, \dots, x_r^{(h)})$ [$h = 1, \dots, m$] beliebig, aber so gegeben,

daß $\prod_{j=1}^r (x_j^{(h)} - x_j^{(k)}) \neq 0$ [$h \neq k$; $k = 1, \dots, m$]. Sind dann v_1, \dots, v_m ganze Zahlen ≥ 0 und

$\sum_{h=1}^m v_h + m = n$, ferner $e(P)$ und $\varphi(P)$ in T willkürliche Funktionen der Klassen 0 und n , so

gibt es dort stets gerade eine Funktion u der Klasse n , die den Gleichungen genügt $D^n(u) = e$ und $D^k(u)$ [auf (P_h)] = $D^k(\varphi)$ [auf (P_h)] ($h = 1, \dots, m$; $k = 0, 1, \dots, v_h$). — Verf. verallgemeinert weiter § 4 von P I, indem er die dort ganzen rationalen Bestandteile $P_{hk}(z)$ der

$f(z)$ vertretenden Funktion $u_f(z)$ durch $P_{hk}(z)/\vartheta(z)$ ersetzt, unter $\vartheta(z)$ eine im Ganheitsgebiete C von $f(z)$ ganze und von 0 verschiedene Funktion verstanden; Anschluß an ein Ergebnis von Peano [Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **18**, 439—446 (1883)]. — Zum Schluß gewinnt Verf. eine übersichtliche Gestalt des Fehlers $R(z)$ bei den Ansätzen B I, (6)

$$\frac{d^{n+1}u}{dz^{n+1}} = 0, \quad \int_a^b P_k(z) u(z) dz = \int_a^b P_k(z) f(z) dz \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

dabei sind $P_k(z)$ die Legendreschen Polynome einer in C von a nach b verlaufenden Strecke.

Die Ersatzfunktion ist $u_f(z) = \int_a^b Q_n(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta$, wo $Q_n(z, \zeta)$ der bekannte Christoffel-Darboux'sche Ausdruck ist. $R(z) = f(z) - u_f(z)$ ist eine Lösung der Gleichungen $\frac{d^{n+1}v}{dz^{n+1}} =$

$f^{(n+1)}(z)$, (2) $\int_a^b P_h(z) v(z) dz = 0$ ($h = 0, 1, \dots, n$). Man findet $v(z) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(z) +$

$$\int_{z_0}^z \frac{(z-\zeta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) d\zeta \quad \text{und nach} \quad (2) \quad c_k = -\frac{2k+1}{b-a} \int_a^b d\zeta P_k(\zeta) \int_{z_0}^{\zeta} \frac{(\zeta-\eta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\eta) d\eta.$$

Der Fehler läßt sich auf die Form $R(z) = \int_a^z G_a(z, \zeta) f^{(n+1)}(\zeta) d\zeta + \int_z^b G_b(z, \zeta) f^{(n+1)}(\zeta) d\zeta$

bringen, wo $G_c(z, \zeta) = \int_c^{\zeta} Q_n(z, \eta) \frac{(\eta-\zeta)^n}{n!} d\eta$.

L. Koschmieder.

Sard, Arthur: Integral representations of remainders. Duke math. J. **15**, 333—345 (1948).

Sind X , Y und Z Banachsche Räume, U eine stetige lineare Abbildung von X auf Y und V eine ebensolche von X in Z und folgt aus $Ux = 0$ stets $Vx = 0$, so gibt es eine lineare stetige Abbildung T von Y in Z mit $V = TU$. Dieser Satz wird bewiesen und dazu verwendet, für lineare stetige Funktionale V , die in gewissen aus reellen Funktionen einer Veränderlichen bestehenden Banachschen Räumen definiert sind und bei jedem Polynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades verschwinden, Darstellungen der Gestalt

$Vx = \int_a^b x^{(n)}(s) d\alpha(s)$ oder $Vx = \int_a^b x^{(n)}(\xi) \beta(s) ds$ zu

geben. Diese Darstellungen wurden bisher mit Hilfe einer Taylorschen Formel abgeleitet; eine unter ihnen ist neu. In einigen Beispielen tritt Vx als geteilte Differenz auf oder als Rest bei Approximationen zur numerischen Integration oder Differentiation oder als Rest bei Approximationen von x durch Polynome mit minimaler mittlerer quadratischer Abweichung. In ähnlicher Weise zeigt sich der zitierte Satz über lineare Operatoren als Quelle einer Darstellung des Restes Vx , der bei Approximationen von x durch spezielle trigonometrische Summen mit minimaler mittlerer quadratischer Abweichung entsteht, durch ein Integral eines linearen auf x angewandten Differentialausdrucks, und einer Darstellung von Vx als Integral einer n -ten Differenz, wenn $Vy = 0$ für jede höchstens $(n-1)$ -fache Summe y periodischer Funktionen der Periode 1 gilt.

K. Krickeberg.

Sard, Arthur: Remainders: functions of several variables. Acta math. **84**, 319—346 (1951).

Aus einer Taylorschen Formel werden zunächst ähnliche Darstellungen eines linearen stetigen Funktional V über gewissen aus reellen Funktionen einer Veränderlichen bestehenden Banachschen Räumen gewonnen wie in der eben besprochenen Arbeit, wenn V jedes Polynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades auf die Null abbildet. Eine Verallgemeinerung der Methode liefert Verallgemeinerungen dieser Darstellungen bei Funktionen mehrerer Variabler. Vx wird die Summe von einfachen und mehrfachen Stieltjesschen Integralen über gewisse partielle Ableitungen von x . Der Verf. untersucht Beispiele, in denen das betrachtete Funktional den Rest in Approximationsprozessen bildet und gelangt hierbei auch zu Abschätzungen.

K. Krickeberg.

Sard, Arthur: Remainders as integrals of partial derivatives. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 732—741 (1952).

Die Arbeit enthält einen weiteren Satz der gleichen Art wie die im vorangehenden Referat beschriebenen und eine Reihe von Anwendungen, in denen V die Bildung des Restes bei Interpolationen oder bei Approximationen von doppelten Stieltjesschen Integralen oder partiellen Ableitungen bedeutet.

K. Krickeberg.

Berghuis, J.: Abgebrochene Potenzreihen. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1952—006, 11 S. (1952) [Holländisch].

Es handelt sich um Betrachtungen von abgebrochenen Potenzreihen vom Exponentialtypus, insbesondere auch von Potenzreihen für die trigonometrischen Grundfunktionen. Von der Restgliedformel von Lagrange ausgehend, findet Verf. für die Differenz der abgebrochenen Reihen und der Exponentialfunktion einen Integralausdruck. Dieser Ausdruck wird unter verschiedenen Bedingungen diskutiert. In analoger Weise werden die Restglieder der Sinus- und der Cosinusreihe behandelt. Verf. gibt dann eine asymptotische Näherung für den Nullpunkt des Restgliedes der Exponentialreihe. Sodann gibt er eine Abzählung der Nullpunkte der Restglieder der Cosinus- und der Sinusreihe. Hierauf wendet Verf. sich den abgebrochenen Reihen für Besselsche Funktionen erster Art zu. Hier wird wieder für das Restglied eine Integralformel aufgestellt und diskutiert. Zum Schluß werden die vorliegenden Ergebnisse mit denen von O. Blumenthal verglichen.

M. J. O. Strutt.

Zonneveld, J. A. and J. Berghuis: Asymptotic expansions connected with truncated series of exponential and Bessel type. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1952—017, 13 S. (1952) [Holländisch].

Es handelt sich zunächst um Exponentialreihen, welche beim n -ten Gliede abgebrochen werden. Für den Restausdruck einer solchen Reihe wird eine asymptotische Formel gesucht. Eine analoge Formel wird aufgestellt für das Restglied einer Potenzreihe, welche mit Besselschen Funktionen zusammenhängt. In erster Linie wird für das Restglied der genannten Exponentialreihe eine Integral-Formel angegeben. Sodann befaßt sich der Verf. mit der Transformation der unabhängigen Veränderlichen in dieser Integral-Formel. Für die Ableitung dieser unabhängigen Veränderlichen wird ein Ausdruck aufgestellt. Hieraus wird dann eine asymptotische Formel für das obengenannte Restglied gefolgert. Diese asymptotische Formel wird auf eine Reihe von Spezialfällen angewendet. Hierauf wendet sich Verf. der abgebrochenen Reihe für eine Besselsche Funktion n -ter Ordnung zu. Für das Restglied dieser abgebrochenen Reihe wird in analoger Weise eine asymptotische Formel abgeleitet. Hierfür sind einige bestimmte Integrale notwendig, welche berechnet werden. Zum Schluß folgt eine numerische Anwendung. *M. J. O. Strutt.*

Sz.-Nagy, Béla: Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 249—257, russische und französ. Zusammenfassgn. 257—258, 258 (1952) [Ungarisch].

Shah, S. M.: Note on eigenfunction expansions. J. London math. Soc. **27**, 58—64 (1952).

The following eigenvalue problem is studied: $y'' + (\lambda + x^2) y = 0$, $0 \leq x \leq \infty$, with Sturm-Liouville boundary conditions at $x = 0$. — Spectrum is continuous, thus the spectral representation has the form of an integral. Yet the $m(\lambda)$ -function of Titchmarsh (Eigenfunction expansions, Oxford 1946) is meromorphic with poles in the lower half of the λ -plane. It is shown that this fact corresponds also to a series expansion within certain classes of functions.

G. Borg.

Gagua, M. B.: Über einen Satz von Bernštejn. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **13**, 207—208 (1952) [Russisch].

Es sei $w_n(x_1, \dots, x_m) = a_0 u_0 + \sum_{i=1}^n (a_i u_i + b_i v_i)$ eine mit dem Orthornormalsystem u_0, u_1, v_1, \dots und reellen Konstanten gebildete Funktionenfolge, ferner sei A_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) eine beliebig gegebene monoton nicht zunehmende Nullfolge. Es gibt dann zu einer vorgelegten elliptischen Differentialgleichung eine Lösung $U(x_1, \dots, x_m)$ mit der Eigenschaft, daß ihre besten Annäherungen

$$E^n(U) = \inf_{w_n} \sup_x |U(x) - w_n(x)|$$

gerade die gegebenen A_n sind. — Der Satz folgt unmittelbar aus einem Satz von S. Bernštejn (dies. Zbl. **19**, 57).

W. Hahn.

Gagua, M. B.: Zur Frage der Darstellung von Funktionen durch Reihen von partikulären Lösungen von elliptischen Gleichungen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 13, 321—327 (1952) [Russisch].

The author extends polynomial approximation on a set E of the complex plane to approximation by series of certain solutions $u_n(x, y)$ of

$$\Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = 0$$

given by $u_n(x, y) = \operatorname{Re} \left[G(z, 0, z, \bar{z}) P_n(z) - \int_0^z P_n(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z}) dt \right]$,

where $P_n(z)$ is an ordinary polynomial and $G(t, \tau, z, \bar{z})$ is the Riemann's function. A rather complicated criterion for the case when E may have interior points includes, as the most interesting of several special cases, the possibility of uniform approximation to a continuous $f(x, y)$ on a nowhere dense set not dividing the plane; in the ordinary case this is due to M. A. Lavrent'ev (this Zbl. 17, 206), reproved by S. N. Mergeljan (this Zbl. 43, 66).

F. V. Atkinson.

Leemans, J.: Sur le développement d'une fonction par une série de polynômes donnés. Mathesis 61, 262—269 (1952).

Verf. entwickelt ein Polynom nach den Bernoullischen und den Legendreschen Polynomen sowie nach einer dritten, mit den Bernoullischen Polynomen eng verknüpften Polynomklasse und zeigt, daß die entsprechenden Entwicklungen für Funktionen, die in einem Intervall beliebig oft differenzierbar sind, gelten. Ref. bemerkt, daß die Entwicklung nach den Bernoullischen Polynomen nur eine andere Schreibweise für die Eulersche Summenformel ist und daß auch Entwicklungen nach Legendreschen Polynomen längst bekannt sind. — Druckfehler: S. 266, Z. 5 v. o. fehlt ein Summand.

W. Hahn.

Petersen, Richard and Helge Skovgaard: On an equiconvergence theorem for Laguerre series. Mat. Tidsskr. B 1952, 14—27 (1952).

Die Arbeit hat hauptsächlich methodischen Wert: Verff. beweisen mit sehr einfachen Hilfsmitteln einige Ergebnisse, die erstmalig wohl von Rotach (1925) und Szegő (1926) veröffentlicht worden sind, über die Laguerreschen Polynome

$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n(e^{-x} x^n)}{dx^n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Sie leiten zunächst einige asymptotische Formeln für $L_n(x)$ und $L'_n(x)$ ab, und zwar unter Benutzung der Differentialgleichung für L_n , also ohne die komplexen Integrale und ohne Vergleich mit Besselschen Funktionen. Eine der Formeln ist $L_n(x) = (nx)^{-1/4} e^{x/2} (a_n \cos 2\sqrt{nx} + b_n \sin 2\sqrt{nx} + R(n, x))$; wobei $a_n = O(1)$, $b_n = O(1)$ ($a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 1/\pi$) und $R(n, x) = O(n^{-1/2})$ ist; x ist auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt. Mit Hilfe dieser Abschätzung wird der Hauptsatz bewiesen: Ist $f(x)$ für $x > 0$ definiert und in jedem endlichen Intervall $0 < a \leq x \leq b$ R -integrierbar, ist

$\int_0^1 x^{-1/4} |f(x)| dx$ und $\int_1^\infty e^{-x/2} x^{-3/4} |f(x)| dx$ konvergent und $\int_n^\infty e^{-x} x^{-2} f(x)^2 dx = o(n^{-3/2})$, so gilt für $x > 0$, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall,

$s_n(x) - (a_n^2 + b_n^2) \int_{\sqrt{x}-\omega}^{\sqrt{x}+\omega} f(u^2) \frac{\sin 2\sqrt{n(u-\sqrt{x})}}{u-\sqrt{x}} du \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, wobei $s_n(x)$ die n -te Partialsumme der zu $f(x)$ gehörenden Laguerreschen Entwicklung und ω eine feste Zahl $< \sqrt{x}$ ist.

W. Hahn.

Alexits, G.: Sur les sommes de fonctions orthogonales. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 183—187 (1952).

Let $\{\varphi_k(x)\}$ be an orthonormal sequence of L^2 functions and $\{c_k\}$ an arbitrary fixed sequence of real numbers. Let $\omega(n) > 0$ be increasing and such that $\sum \omega(2^n)^{-1} < \infty$. (This is equivalent to $\sum (n \omega(n))^{-1} < \infty$.) The author proves the

following results: (1) $\sum_1^n c_k \varphi_k(x) = o\left(\omega(n) \sum_1^n c_k^2\right)^{1/2} \cdot \log n$ almost everywhere;

(2) $\sigma_n^{(\alpha)}(x) = o\left(\omega(n) \sum_1^n c_k^2\right)^{1/2}$ for almost all x provided $\alpha \geq 1$. Here $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ denotes the $C^{(\alpha)}$ transform of $\sum c_k \varphi_k(x)$. (1) is an improvement of an earlier result of S. Kaczmarz and H. Steinhaus (Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa 1935, p. 165; this Zbl. 13, 9) and in the case $c_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) it is the best possible estimate. (2) is a generalisation of a result of the reviewer (this Zbl. 38, 43). It is likely that (2) is exact when $\alpha = 1$ and $c_k = 1$ for $k = 1, 2, \dots$ I. S. Gál.

Francesco-Saverio, Rossi: Sui coefficienti di Legendre di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 6, 317—322 (1952).

Es sei $f(x)$ eine in $(-1, +1)$ fast stetige Funktion, die außerdem fast überall die Bedingung $|f(x)| \leq 1$ erfüllt; ferner sei $b_k = \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt$, $k = 1, 2, \dots$

Verf. zeigt, daß dann und nur dann die Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots die Legendreschen Koeffizienten einer solchen Funktion $f(x)$ sind, wenn gilt:

$$b_k = 2 \sum_{r=1}^{[(k+1)/2]} \frac{2r(2r+2) \cdots (2k-2r)}{(2r-1)(2r+1) \cdots (2k-2r+1)} a_{k-2r+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Durch Anwendung der von A. Ghizzetti für die Koeffizienten einer Fourientwicklung erhaltenen Bedingung (dies. Zbl. 39, 69) ergibt sich eine ganz analoge Bedingung. O. Volk.

Mandelbrojt, S.: Quelques nouveaux théorèmes de fermeture. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 241—251 (1952).

L'A. généralise son résultat antérieur (General theorems of closure, Houston 1951, ce Zbl. 43, 289) qui donne une condition suffisante pour que si $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)| dx \leq M_n$ ($n = 0, 1, \dots$),

$g(x) \in L^1$, alors $f(x+a)$ soit contenu dans le sous-espace de L^1 , engendré par les $f^{(n)}(x)$ et les translatées de $g(x)$. La généralisation consiste à remplacer $f^{(n)}(x)$ par une sous-suite $f^{(v_n)}(x)$. Voici l'énoncé précis: Soit $N(t) = \sum_{v_n \leq t} 1$, $D(t) = N(t)/t$, $D_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t)$, $D_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} D_0(t) > \frac{1}{2}$.

Soit $\Omega(g)$ resp. $\Omega(f)$ l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier de g resp. de f . $E = \Omega(g) \cap \mathbf{C}\Omega(f)$, $E_h = \bigcup_{x \in E} [xe^{-h}, xe^h]$, où $h > 1 - D_0$, et $\varphi(x)$ est la fonction caractéristique de $\mathbf{C}E_h$. Posons $C(\sigma) = \max_{n \geq 1} (n\sigma - \log M_0)$. S'il existe une fonction à variation

bornée $u(x)$ ($-\infty < x < \infty$) telle que $0 < A \leq u(x) < \varphi(x) + D_0 [C(\log |x|)] - 1/2$ et $\int_{-\infty}^{\infty} C(\sigma) \exp \left[- \int_{\sigma}^{\infty} \frac{d\tau}{u(e^\tau) + u(-e^\tau)} \right] d\sigma = \infty$, alors pour tout a , $f(x+a)$ est contenu dans

le sous-espace fermé de L^1 , engendré par les translatées de $g(x)$ et les $f^{(v_n)}(x)$. — La démonstration est semblable à celle du cas special mentionné, mais emploie aussi des techniques que l'A. a utilisé pour démontrer son „égalité fondamentale“ [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 63, 351—378 (1946)]. — De ce théorème on déduit des critères pour que $x^{1/n} f(x)$ soit total dans l'espace des fonctions continues sur un ensemble fermé F de R et aussi des critères d'unicité pour le problème des moments $\int_F t^{v_n} dV = m_n$ (cf. op. cit. Chap. IV., où $v_n = n$).

Si $F = R$ on retrouve des résultats obtenus par une autre voie (Mandelbrojt: Séries adhérentes. Régularisation des Suites. Applications. Paris 1952, Chap. V.; ce Zbl. 48, 52). J. Horváth.

Bari, N. K.: Zusatz zu meiner Arbeit „Das Problem der Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe“. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 5 (51), 193—196 (1952). [Russisch].

Verf. ergänzt ihren in dies. Zbl. 33, 56 besprochenen Bericht durch einige neuere Ergebnisse und berichtet einen dort zitierten Satz von Verblunsky, der inzwischen als fehlerhaft erkannt worden ist.

Matsuyama, Noboru: On the convergence of the Fourier series of $|f(x)|$ at one point. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 6, 107—112 (1952).

Im Zusammenhang mit einer Modifikation des Dinischen und Jordanschen Konvergenzkriteriums wird nach einer Paleyschen Methode die Existenz einer geraden, L -integrablen und nach 2π periodischen Funktion $f(x)$ mit folgender Eigenschaft nachgewiesen: die Fourierreihe von $f(x)$ konvergiert bei $x = 0$, obwohl die Fourierreihe von $|f(x)|$ an dieser Stelle nicht konvergiert, bzw. die Fourierreihe von $f(x)$ ist bei $x = 0$ $(C, 1)$ -summierbar, obwohl die Fourierreihe von $|f(x)|$ an dieser Stelle nicht $(C, 1)$ -summierbar ist. V. Garten.

Džvaršejšvili, A. G.: Einige Eigenschaften der Fourier-Denjoyschen Reihen. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 13, 3—8 (1952) [Russisch].

$f(x)$ sei Denjoy-integrierbar auf $(-\pi, \pi)$ und $g(x)$ besitze dort eine Ableitung $g'(x)$ von beschränkter Variation. Dann gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n),$$

wobei $a_n, b_n, [\alpha_n, \beta_n]$ die Fourierkoeffizienten von $f(x) [g(x)]$ sind. Dies sowie des Verf. Sätze über die gliedweise Integration der im Titel genannten Reihen, die dazu führen, sind längst bekannt. Verf. hat z. B. folgende Arbeiten übersehen: Pollard, Proc. London math. Soc., II. Ser. 27, 209—222 (1926), insb. 213, Bosanquet, ebendort 31, 144—164 (1930). Dort werden allgemeinere Ergebnisse erzielt.

L. Schmetterer.

Džvaršejšvili, A. G.: Über die Darstellung einer Funktion durch ein Fourierintegral. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 13, 201—205 (1952) [Russisch].

Überträgt die Ergebnisse für Fourierreihen (dies. Zbl. 41, 33) auf Fourierintegrale mit dem folgenden Hauptergebnis: $f(x)$ gehöre zu $L(-\infty, \infty)$, E sei eine abgeschlossene Menge positiven Maßes, auf welcher $f(x) = 0$ gilt. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \omega[f, \delta_k]$ konvergiert [die Bezeichnung spricht nach Vergleich mit dies. Zbl. 41, 33 für sich selbst], dann gilt $f(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \omega(x-t)}{x-t} dt$ in jedem Dichtepunkt von E .

L. Schmetterer.

Turán, P.: On a trigonometrical sum. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 155—161 (1952).

Siano a_0, a_1, \dots, a_n costanti reali, $\sum_{v=0}^n a_v = 0$, e si abbia $\sum_{v=0}^n a_v \cos v x \geq 0$ per $0 \leq x \leq 2\pi$. L'A., con un procedimento assai semplice ed elegante prova che in queste ipotesi risulta $\sum_{v=1}^n \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1}}{v} \sin v x > 0$ per $0 < x < \pi$.

La dimostrazione si fonda sull'uguaglianza

$$\sum_{v=1}^n \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1}}{v} \sin v x = \int_0^{(\pi-x)/2} \operatorname{Re} F(1 - \varrho e^{-i\alpha}) d\alpha, \text{ con } F(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v,$$

valida per $0 < x < \pi$, e $\varrho = |1 - e^{ix}|$. — Con analogo procedimento l'A. dimostra: a) per $0 < x < \pi$ e $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{v \leq x} \frac{\sin v x}{v} > 4 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi-x}{2} - \frac{\pi-x}{2} \right) \sin^2 \frac{x}{2};$$

b) se a_0, a_1, \dots, a_n sono costanti reali, $\sum_{v=0}^n a_v = 0$, $\left| \sum_{v=0}^n a_v \cos v x \right| \leq M$ per $0 \leq x \leq 2\pi$, allora per $0 < x < \pi$ si ha $\left| \sum_{v=1}^n \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1}}{v} \sin v x \right| \leq M \frac{\pi-x}{2}$.

G. Sansone.

Cheng, M. T.: Uniqueness of multiple trigonometric series. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 774—775, ungarische und russische Zusammenfassgn. 775, 776 (1952).

Spezielle Funktionen:

Bajraktarević, M.: Sur les bornes du module d'une somme. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 17—25 u. französ. Zusammenfassg. 26—27 (1952) [Serbisch].

Es sei $S_n(\theta) = \max_{1 \leq \nu \leq n} \sin(\nu \theta/2)/\sin(\theta/2)$, $0 < \theta < \pi$, dann ist $S_n(\theta) \leq 1/\sin(\theta/2)$; Verf. gibt die Werte von θ an, für welche das Gleichheitszeichen eintritt. — Die Überlegung, durch die Verf. zu zeigen versucht, daß die Ungleichung $\left| \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu e^{i\nu\theta} \right| \leq a_0 S_n(\theta)$ mit $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq 0$ nicht immer statthat, ist nicht einwandfrei.

J. Karamata.

• **Sibagaki, W.:** Theorie und Anwendung der Gammafunktion mit einer sechsstelligen Tafel der Gammafunktion für komplexe Argumente. Tokyo: Iwanami Shōten 1952. 202 p. Yen 680 [Japanisch].

Bragard, L.: Sur quelques formules relatives aux harmoniques sphériques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 46—70 (1952).

Auswertung von etwa 25 Doppelintegralen, deren Integranden aus Produkten von trigonometrischen Funktionen, Kugelflächenfunktionen und Legendreschen Funktionen, bzw. deren Ableitungen, sowie deren unbestimmten Integralen bestehen.

M. J. O. Strutt.

Bragard, L.: Sur quelques intégrales doubles relatives aux harmoniques sphériques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 158—178 (1952).

Auswertung von etwa 40 Doppelintegralen, deren Integranden aus Produkten von Potenzen trigonometrischer Funktionen und von Legendreschen Funktionen erster Art, bzw. deren Ableitungen, sowie deren unbestimmten Integralen bestehen.

M. J. O. Strutt.

Agostinelli, Cataldo: Sulle funzioni epicicloidali e loro applicazione ad alcuni problemi di Fisica matematica. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 165—210 (1952).

Ausführliche Darstellung der in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 44, 75; vgl. auch dies. Zbl. 37, 273) gewonnenen Ergebnisse mit Anwendung auf schwingende Membranen, auf die Fortpflanzung elektrischer Wellen und auf das Wärmeleitungsproblem in Zylindern, jeweils mit epizykloidalen Querschnitten.

O. Volk.

Koschmieder, Lothar: Über gewisse Determinanten, die aus Hermiteschen Funktionen zweiter Art gebildet sind. Tecnica, Revista Ci. exactas, Tecnologia, Univ. Tucumán 1, 314—317 (1952) [Spanisch].

Seien $h_n(x)$ die Hermiteschen Funktionen zweiter Art. Man kann sie definieren durch:

$$(1) \quad h_n(x) - x h_{n-1}(x) + (n-1) h_{n-2}(x) = 0, \quad h_0(x) = \int_0^x e^{t^2/2} dt, \quad h_1(x) = x h_0(x) - e^{x^2/2}.$$

Sei $\delta_n(x) = h_n^2 - h_{n-1} h_{n+1}$. Verf. zeigt: $\delta_n - (n-1)! \delta_1 \geq 0$ für alle x . Dies folgt aus $\delta_n = (n-1)! \delta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} h_k^2$, was mit (1) bewiesen wird. Ob $\delta_n \geq 0$ ist, bleibt für $n \geq 2$ noch offen, doch wird gezeigt, daß $\delta_1 > 0$ in einem gewissen Intervall $[0, \xi)$ und $\delta_1(x) < 0$ für $x > \xi$. Verf. will darauf noch zurückkommen.

K. Prachar.

Mukherjee, B. N.: A note on the second solution of Hermite's equation. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 124—126 (1952).

$\bar{H}_n(z) = H_n(z) \int e^{z^2} dz + G_n(z) e^{z^2}$ ist eine von den Hermiteschen Polynomen $H_n(z)$ linear unabhängige Lösung der Hermiteschen Differentialgleichung

$u'' - 2z u' + 2n u = 0$ für ganzzahliges n (Mersman, dies. Zbl. 39, 298). Die $G_n(z)$ sind Polynome, die sich durch $H_n(z)$ ausdrücken lassen. Ferner gilt $G_{n+1}(z) - 2z G_n(z) + 2n G_{n-1}(z) = 0$, also dieselbe Beziehung wie für $H_n(z)$. Schließlich wird gezeigt, daß $\bar{H}_n(z)$ dieselben Rekursionsformeln wie $H_n(z)$ erfüllt, und es werden weitere Beziehungen zwischen $G_n(z)$, $\bar{H}_n(z)$ und $H_n(z)$ angeben. *E. Kreyszig.*

T'ung, Ch'in-mo and Hsien-yü Hsü: On certain inequalities of the Turán type concerning Laguerre and ultraspherical polynomials. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 781—785, ungarische und russische Zusammenfassgn. 785, 786 (1952).

Für die Bildung $p_n^2(x) - p_{n-1}(x)p_{n+1}(x)$ wird im Falle der klassischen Orthogonalpolynome unter Benutzung der Rekursionsformeln und der Christoffelschen Formel ein geschlossener Ausdruck hergeleitet, aus dem man die von Szegő (dies. Zbl. 32, 275) bewiesene Positivität des Ausdrucks ablesen kann. Vgl. auch die (nicht zitierte) Note von Rao und Thiuvankatachar (dies. Zbl. 32, 275).

W. Hahn.

Brafman, Fred: Unusual generating functions for ultraspherical polynomials. Michigan math. J. 1, 131—138 (1952).

Beweis der Formel: $q^{-1} \left(1 - \frac{t^2 + \varrho \mu}{2} \right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) n! (1 + \alpha)_k}{(1 + \alpha)_n k!} t^n$, wobei $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$ $= \frac{(1 + \alpha)_n}{n!} x^n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n \\ -\frac{n+1}{2} \end{matrix}; 1 + \alpha; (x^2 + 1) x^{-2} \right)$ die ultrasphärischen Polynome darstellen und gesetzt ist: $\varrho = \sqrt{1 - 2xt + t^2}$, $\mu = \sqrt{1 + 2xt + t^2}$; $k = [n/2]$. *O. Volk.*

Hahn, Wolfgang: Über lineare Differentialgleichungen, deren Lösungen einer Rekursionsformel genügen. II. Math. Nachr. 7, 85—104 (1952).

(Part I, this Zbl. 42, 93.) Many instances are known of polynomial sequences $p_n(x)$ that satisfy a recursion equation in n and a differential equation of second order in x . The existence of such sequences associated with differential equations of order higher than 2 has not previously been demonstrated. The author gives a number of procedures for constructing sequences, and proves in particular that the polynomials occurring in the convergents of Gauss' continued fraction satisfy differential equations of order 4. Some misprints occur in section 6. The second factor in the denominator of P_n should be $2n + \alpha + \beta - 2$. The first factor in the denominator of Q_n should be $2n + \alpha + \beta - 1$. Near the bottom of page 102 J_{n-1} should read J_n . *W. W. Sawyer.*

Bagchi, Hari Das and Bhola Nath Mukherji: Note on certain equations, connected with Bateman functions. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 6, 269—280 (1952).

Die Verff. rechnen ähnlich wie in früheren Noten (dies. Zbl. 47, 208) sehr ausführlich vor, daß die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$(n+1)f_{2n+2}(z) + 2(n-z)f_{2n}(z) + (n-1)f_{2n-2}(z) = 0$$

und $d^2 f_{2n}(z)/dz^2 + (2n-z)f_{2n}(z) = 0$ ($n \geq 1$ ganzzahlig) sowie zweier anderer Beziehungen zwischen f_{2n} , f_{2n-2} und ihren Ableitungen lineare Verbindungen aus zwei speziellen gemeinsamen Lösungen mit von n und von z unabhängigen Koeffizienten sind. Als eine spezielle Lösung kann man z. B. die von Batemann eingeführte Funktion $K_{2n}(z)$ nehmen; die von den Verff. in Gl. (23) eingeführte Funktion $k_{2n}(z)$ ist, wie sie in einem Nachsatz selbst bemerken, sinnlos. Vgl. das nachstehende Referat.

W. Hahn.

Bagchi, Hari Das and Bhola Nath Mukherji: Note on certain equations, connected with Gegenbauer functions. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 6, 281—290 (1952).

In gleicher Ausführlichkeit wie in der vorsteh. besprochenen Note und mit teilweise fast wörtlich sich wiederholenden Schlüssen werden die Differentialglei-

chung und die Rekursionsformel der Gegenbauerschen Polynome behandelt. Auch diesmal machen die Verff. keinen Gebrauch davon, daß die fraglichen Funktionalgleichungen nichts weiter sind als Beziehungen zwischen „benachbarten“ hypergeometrischen Funktionen (womit allerdings kaum noch etwas zu beweisen übrig bliebe). — Zum Schluß wird eine Formel für die „Momente“ der Gegenbauerschen Polynome mit ihrer Belegungsfunktion $(1-x)^{\lambda-1/2}$ abgeleitet. *W. Hahn.*

Sips, Robert: Les constantes caractéristiques de l'équation intégrale des fonctions de Mathieu. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 141—157 (1952).

Für die Eigenwerte λ_n und μ_n der Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \text{ce}_n(\eta) &= \lambda_n \int_0^{2\pi} e^{-2i h \cos \eta \cos \eta_0} \text{ce}_n(\eta_0) d\eta_0, \\ \text{se}_n(\eta) &= \mu_n \int_0^{2\pi} e^{-2i h \cos \eta \cos \eta_0} \sin \eta \sin \eta_0 \text{se}_n(\eta_0) d\eta_0 \end{aligned}$$

der 2π -periodischen Mathieuschen Funktionen werden die ersten Glieder von Entwicklungen nach steigenden bzw. fallenden Potenzen von h berechnet und eine graphische Darstellung ihrer h -Abhängigkeit gegeben. Ferner werden die Summen über λ_n^{-1} , $(-1)^n \lambda_n^{-2}$, λ_n^{-2} , $a_n \lambda_n^{-1}$, $(-1)^n a_n \lambda_n^{-2}$ von $n=0$ bis ∞ und über μ_n^{-1} , $(-1)^n \mu_n^{-2}$, μ_n^{-2} , $b_n \mu_n^{-1}$, $(-1)^n b_n \mu_n^{-2}$ von $n=1$ bis ∞ bestimmt; sie sind zum Teil elementare Funktionen von h , zum anderen Teil lassen sie sich durch Besselsche Funktionen mit dem Argument h ausdrücken. a_n , b_n sind die geraden bzw. ungeraden 2π -periodischen Eigenwerte der Mathieuschen Differentialgleichung.

J. Meixner.

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G -function. I. Indagationes math. **14**, 369—379 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 369—379 (1952).

Die vom Verf. mehrfach schon früher [a. a. O. **49**, 227—237, 344—356, 457—469, 632—641, 765—772, 936—943, 1063—1072, 1165—1175 (1946)] betrachtete Funktion der Überschrift ist

$$(1) \quad G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j+s) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j-s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j-s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s)} z^s ds.$$

m, n, p, q sind ganze Zahlen der Art, daß (2) $q \geq 1$, $0 \leq n \leq p \leq q$ und $0 \leq m \leq q$ ist, ferner $z \neq 0$ und $|z| < 1$, wenn $p = q$; $z \neq 0$, wenn $p < q$; schließlich sei (3) $a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \dots$ ($j = 1, \dots, n$; $h = 1, \dots, m$). Der Umriss C in (1) läuft von $\infty - i\tau$ nach $\infty + i\tau$ ($\tau > 0$) und schließt alle Pole $b_j, b_j + 1, \dots$ ($j = 1, \dots, m$) des Integranden ein, seine Pole $a_j - 1, a_j - 2, \dots$ ($j = 1, \dots, n$) dagegen aus. Die G -Funktion läßt sich durch verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen ausdrücken,

$$(4) \quad G_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1, j \neq h}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} z^{b_h}$$

$\times {}_pF_{q-1}(1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p; 1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q; (-1)^{p-m-n} z)$, wo * das Fehlen des Parameters $1 + b_h - b_h$ andeutet. Zur Erklärung von G außerhalb $|z| = 1$ führt man in der z -Ebene einen Schnitt \mathfrak{S} entlang der Geraden, die die Punkte $(-1)^{m+n-p}$ und $(-1)^{m+n-p}(1 + \infty e^{i\mu})$ verbindet, $-\frac{1}{2}\pi \leq \mu \leq \frac{1}{2}\pi$, und setze dann G in der aufgeschnittenen Ebene über $|z| < 1$ hinaus analytisch fort. — Verf. geht nun daran, sehr allgemeine Formeln herzuleiten, die eine G -Funktion auf besondere Art in eine unendliche Reihe von G -Funktionen zu entwickeln gestatten, und aus denen viele bekannte Gestaltswandel und Reihenentwicklungen als Sonderfälle folgen. Er beginnt mit zwei Formeln für r -te Ableitungen ($r = 0, 1, 2, \dots$)

$$(5) \quad w^r \frac{d^r}{dw^r} \left\{ G_{p,q}^{m,n} \left(w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(w \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, r \end{matrix} \right. \right),$$

$$(6) \quad w^r \frac{d^r}{dw^r} \left\{ G_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{w} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = (-1)^r G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(\frac{1}{w} \left| \begin{matrix} 1-r, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{matrix} \right. \right);$$

sie gelten für $w \neq 0$, (5) auch für $w = 0$, wenn $m = 1$ und b_1 eine nicht negative ganze Zahl (n. n. g. Z.) ist. Daran knüpft Verf. unter den Voraussetzungen (2), (3) folgenden, in mehrere Aussagen zerfallenden ersten Hauptsatz: 1. Ist $p < q$, $w \neq 0$, $|\lambda - 1| < 1$, so ist

$$(7) \quad G_{p,q}^{m,n} \left(\lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^r}{r!} G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(w \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, r \end{matrix} \right. \right).$$

Die Werte der nach (1) oder (4) vieldeutigen G -Funktionen links und rechts hängen dabei durch $\arg(\lambda w) = \arg \lambda + \arg w$, $-\frac{1}{2}\pi < \arg \lambda < \frac{1}{2}\pi$ zusammen; sie sind aus (1) zu entnehmen. — 2. Ist $w \neq 0$, $w \neq (-1)^{m+n-p}$, dann gilt (7) auch für $q = p$ unter den Annahmen, daß $|\lambda - 1| < 1$, wenn $(-1)^{m+n-p} \operatorname{Re} w \leq \frac{1}{2}$, und daß $|\lambda - 1| < |1 - (-1)^{m+n-p}/w|$, wenn $(-1)^{m+n-p} \operatorname{Re} w \geq \frac{1}{2}$. Die vieldeutigen G -Funktionen hängen hier längs des erwähnten Schnittes \mathcal{S} zusammen, bei dem $\mu = \pm \frac{1}{2}\pi$. — 3. Ist $m + n - p \geq 1$, $w \neq 0$ und $|\arg w| \leq (m + n - p - \frac{1}{2})\pi$, so gilt (7) mit $q = p$ für $|\lambda - 1| < 1$. — 4. Ist $m = 1$, b_1 eine n. n. g. Z., dann gilt (7) für alle w und λ , falls $p < q$. — 5. Ist $m = 1$, $w \neq (-1)^{1+n-p}$ und b_1 eine n. n. g. Z., so gilt (7) mit $q = p$ für $|\lambda - 1| < |1 - (-1)^{1+n-p}/w|$. Von einer Wiedergabe des Zusammenhanges der vieldeutigen G -Funktionen in den Teilen 3 und 5 des Satzes sei hier abgesehen, dagegen noch erwähnt, daß die Hauptmittel zum Beweise von (7) Taylorsche Entwicklung der linken Seite nach Potenzen von $z - w$ und die Formel (5) sind. L. Koschmieder.

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G -function. II. Indagationes math. 14, 483—487 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 483—487 (1952).

Verf. setzt hier seine erste gleichbenannte Arbeit M I fort (Bericht B I über M I s. vorsteh. Referat). Indem er wieder die Taylorsche Reihe, ferner B I (6) benutzt, beweist er den Hauptsatz 2: Unter den Annahmen B I (2), (3) ist

$$(1) \quad G_{p,q}^{m,n} \left(\lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^r G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(w \left| \begin{matrix} 1-r, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{matrix} \right. \right),$$

wenn $w \neq 0$ und 1. $p < q$, $\operatorname{Re} \lambda > \frac{1}{2}$; oder 2. $p = q$, $w \neq (-1)^{m+n-p}$ und $\operatorname{Re} \lambda > \frac{1}{2}$ oder $|\lambda^{-1} - 1| < |1 - (-1)^{m+n-p}/w|$, je nachdem ob der letzte Betrag ≥ 1 oder ≤ 1 ist; oder 3. $p = q$, $m + n - p \geq 1$, $|\arg w| \leq (m + n - p - \frac{1}{2})\pi$, $\operatorname{Re} \lambda > \frac{1}{2}$. Die Zweige der G -Funktionen in (1) hängen wie im Hauptsatze 1 von M I zusammen. — Weiter leitet Verf. aus den Sätzen 1, 2 mehrere gleichfalls auf den Wert λw der Unabhängigen in G bezügliche Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 26, 215) von neuem her; er zieht dabei noch vier aus der Integraldarstellung B I(1) von G folgende Hilfsformeln heran. L. Koschmieder.

Funktionentheorie:

● Knopp, K.: Elements of the theory of functions. Translated by F. Bagemihl. New York: Dover Co. 1952. 140 p. \$ 1.25.

● Saks, Stanisław and Antoni Zygmund: Analytic functions. Translated by E. J. Scott. (Monografie Matematyczne. Tom XXVIII). Warszawa-Wrocław: Polskie Towarzystwo Matematyczne 1952. 451 p.

Das vorliegende Lehrbuch der Funktionentheorie ist erstmals 1938 in polnischer Sprache erschienen. Es will einen Aufbau geben, der einerseits nicht auf geometrische Begriffe und Darstellungsmittel verzichtet, andererseits aber volle Strenge und Geschlossenheit wahrt ohne Anleihe bei der Topologie und ohne über ganz Elementares hinausgehende Abschweifungen in dieses Gebiet. So ist eine Darstellung von eigenartigem Gepräge entstanden, die jedenfalls als eine wertvolle Bereicherung der funktionentheoretischen Literatur zu begrüßen ist und die jedem Lernenden und jedem Lehrenden viel Anregung geben kann; dies nicht zuletzt durch die reichhaltige Sammlung von Aufgaben, die weit über erläuternde triviale Übungsbeispiele hinausgeht und den Text vielfach durch interessante Sätze ergänzt. — Der erwähnte grundlegende Gesichtspunkt wirkt sich natürlich vor allen Dingen auf den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes und der Integralformel aus. Beide werden gar nicht in voller Allgemeinheit bewiesen, was ja, insoweit nicht ihr selbständiges Interesse in Betracht kommt, ohne Schaden für den Aufbau der Theorie bleibt; zunächst beschränkt man sich auf Polygone mit achsenparallelen Seiten; das reicht aus zum Beweise des Rungeschen Satzes, der dann zusammen mit der Existenz einer Stammfunktion für ein Polynom eine hinreichend allgemeine Form des Integralsatzes liefert. Dieser und die Formel werden später noch für Kreistreife bewiesen. — Hervorgehoben sei noch die konsequente Verwendung des Logarithmus zur Formulierung einfacher geometrischer Sach-

verhalte. — Inhalt (die Angaben in Klammern sind nur Hervorhebungen einiger besonderer Punkte): Einleitung: Mengenlehre. I.: Funktionen einer komplexen Variablen (die elementaren Funktionen \exp , \sin , \cos , \log ; Begriff des Kurvenintegrals, das von vornherein als Integral über den Kurvenparameter erklärt wird). II.: Holomorphe Funktionen (Ableitung, Stammbildung, Differentiation eines Integrals nach einem komplexen Parameter, Hauptsatz und -formel für Rechteckssysteme; Folgen holomorpher Funktionen; Sätze von Stieltjes-Osgood und Morera). III.: Meromorphe Funktionen (Potenzreihen, Abelscher Satz, Laurentreihen; Laurententwicklung in einer ringförmigen Umgebung, isolierte Singularitäten; logarithmische Ableitung, Rouchéscher Satz; Abbildung durch meromorphe Funktionen; Weierstraßscher Vorbereitungsatz). IV.: Elementare geometrische Methoden der Funktionentheorie (Rungescher Satz, Cauchyscher Satz für ein einfach zusammenhängendes Gebiet; Jensensche Formel; Index eines Punktes in bezug auf eine Kurve; Residuensatz; Integralsatz und -formel für Kreise; Jordanscher Kurvensatz für ein Polygon, analytische Definition der Zusammenhangszahl eines Gebietes). V.: Konforme Abbildung (Spiegelungsprinzip, Schwarz'sches Lemma, Riemannscher Abbildungssatz [ohne Ränderzuordnung]; Schwarz-Christoffelsche Formel). VI.: Analytische Funktionen (die analytische Funktion im großen und ihre Umkehrung; eine analytische Funktion als topologischer Raum; kritische Punkte; algebraische Funktionen; Riemannsche Fläche, als Raum von „Riemannschen Elementen“). VII.: Ganze und überall im Endlichen meromorphe Funktionen (Weierstraßscher Produktsatz, Mittag-Lefflerscher Satz; Ordnung einer ganzen Funktion; kanonische Produkte; Borelsche Ausnahmewerte; Sätze von Picard und Schottky, nach Bloch; Landauscher Satz). VIII.: Elliptische Funktionen. IX.: Die Funktionen $\Gamma(s)$ und $\zeta(s)$; Dirichletsche Reihen. H. Grunsky.

Frank, Evelyn: On the properties of certain continued fractions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 921—937 (1952).

Verf. befaßt sich mit der Untersuchung von Eigenschaften einer neuen Klasse von Kettenbrüchen der Form (A) $k_0 \gamma_0 + \frac{k_0(1-\gamma_0\bar{\gamma}_0)z}{\gamma_0 z} - \frac{1}{\gamma_1} + \frac{k_1(1-\gamma_1\bar{\gamma}_1)z}{\gamma_1 z} - \frac{1}{\gamma_2} + \dots$, (B) $\gamma_0 + \frac{(1-\gamma_0\bar{\gamma}_0)z}{\gamma_1 z} - \frac{1}{\gamma_1} + \frac{(1-\gamma_1\bar{\gamma}_1)z}{\gamma_2 z} - \frac{1}{\gamma_2} + \dots$, wo k_p und γ_p Konstante sind, $p = 0, 1, \dots$ und wo außerdem $|\gamma_p| \neq 1$. In § 2 wird gezeigt, daß es zu einer willkürlichen Potenzreihe unendlich viele korrespondierende Kettenbrüche (A) und höchstens einen (B) gibt, derart daß die Potenzreihenentwicklung von dessen Näherungsbrüchen $2p$ -ter bzw. $(2p+1)$ -ter Ordnung mit der Potenzreihe bis zu den Gliedern z^p bzw. z^{p-1} einschließlich übereinstimmen. Umgekehrt gibt es zu jedem solchen Kettenbruch genau eine korrespondierende Potenzreihe, so daß die die gleichen Bedingungen erfüllt sind. In § 3 werden neue Formeln zur Berechnung des korrespondierenden Kettenbruches zu einer Potenzreihe aufgestellt, deren Beweis durch vollständige Induktion erbracht wird. In § 4 wird im Anschluß an Perron der Satz aufgestellt, daß, falls der unendliche Kettenbruch (A) oder (B) in einem den Ursprung enthaltenden Gebiet gleichmäßig konvergiert, die zugehörige korrespondierende Reihe innerhalb eines jeden ganz im Konvergenzgebiet gelegenen Kreises mit dem Mittelpunkt im Ursprung gegen dieselbe Funktion konvergiert. Konvergenzbedingungen werden in § 4 speziell aufgestellt für den Fall, daß die erzeugende Funktion $F_0(z)$ meromorph ist. In § 5 werden Konvergenzsätze über die Kettenbrüche (A) und (B) gewonnen, die aus dem allgemeinen Pringsheimschen Kriterium (Perron, Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1929, S. 254—262) und aus dem Parabeltheorem gewonnen werden. (W. T. Scott und H. S. Wall, dies. Zbl. 22, 326.) In § 6 werden Konvergenzbereiche für diejenigen Kettenbrüche ermittelt, die je aus den geraden und ungeraden Näherungsbrüchen des Kettenbruches (A) gebildet sind. Diese Konvergenzbereiche werden aus den in § 5 gewonnenen Konvergenzsätzen abgeleitet. In § 7 werden durch Transformationen des Kettenbruches (A) weitere Konvergenzsätze gewonnen. J. Mall.

Suvalova, E. Z.: Über die Hyperkonvergenz einer Polynomfolge. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 76—87 (1952) [Russisch].

Sei $f(z)$ regulär auf einer Punktmenge S und dort für eine Folge (1) $P_n(z)$ von Polynomen $|f(z) - P_n(z)| < M/R^n$ ($R > 1$ und M Konstante; $n = 0, 1, \dots$). Auf derartige Polynomfolgen werden bekannte Sätze über die Teilsammenfolgen von Potenzreihen übertragen, nämlich der Ostrowskische Überkonvergenzsatz und der Pólyasche Satz, daß auf jedem abgeschlossenen Bogen vom Zentriwinkel $2\pi\Delta$ des Konvergenzkreises von $\sum a_n z^n$ mindestens eine Singularität liegt, wenn Δ die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten bedeutet [G. Pólya, Math. Z. 29, 549—640 (1929)]. Hier seien genannt die beiden Sätze, die der Verf. erhält für den Spezialfall, daß es sich um Polynome bester Approximation im Tchebycheffschen Sinn handelt [vgl. J.-L. Walsh, Approximation by polynomials in the complex domain, Paris 1935; dies. Zbl. 11, 298]. $f(z)$ sei regulär auf einem beschränkten Kontinuum K , $w = \Phi(z)$ bilde das Äußere von K konform auf das Gebiet $|w| > \varrho$ ab [$\Phi(\infty) = \infty$]. $P_n(z)$ seien die Polynome bester Approximation auf K mit $E_n = \max |f(z) - P_n(z)|$ (n der Grad von P_n). Sei $\lim E_n^{1/n} = \varrho/R < 1$,

so daß $f(z)$ regulär im Innern von C_R , aber nicht in allen Punkten von C_R selbst ist, wobei C_R die Kurve $|\Phi(z)| = R$ bedeutet (vgl. J.-L. Walsh, a. a. O.). I. Ist $\lim E_n^{1/n} \neq \overline{\lim} E_n^{1/n}$, so existiert eine Teilfolge $P_{n_k}(z)$, die in einer Umgebung jedes auf C_R gelegenen regulären Punktes von f konvergiert. II. Sei $\chi(\varepsilon, N) = \Sigma 1$ (Σ genommen für $n \leq N$, $E_n > \varrho R^{-1} - \varepsilon$), $\psi(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \chi(\varepsilon, N)$, $\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\varepsilon)$. Dann besitzt $f(z)$ auf jedem Bogen von C_R , der das Urbild eines Bogens auf $|w| = R$ von der Länge $2\pi\delta$ ist, mindestens einen singulären Punkt. — Wegen der Übertragung auf allgemeinere Folgen (1) sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

W. Meyer-König.

Berghuis, J.: A class of entire functions used in analytic interpolation. Indagationes math. **14**, 468—473 (1952) = Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser. A **55**, 468—473 (1952).

Es sei $F_k(t, u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-t\pi(u+n)^2} \left\{ \frac{\sin \pi(u+n)}{\pi(u+n)} \right\}^k$, worin k eine natürliche Zahl bedeutet und $t \geq 0$ ist. I. J. Schoenberg hat die Vermutung geäußert [Quart. appl. Math. **4**, 112—141 (1946)], daß $1/F_k(t, u)$ für jeden reellen Wert von u Summe einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) (2 \sin \pi u)^{2n}$ mit der Eigenschaft $c_n(t) > 0$ ist und die Richtigkeit der Vermutung für $t = 0$ bewiesen. Verf. zeigt nun ihre Gültigkeit für $k = 1, 2$ durch Anwendung elementarer und gebräuchlicher Methoden.

E. Lammel.

Erdős, P.: On the uniform but not absolute convergence of power series with gaps. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 162—168 (1952).

Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers telle que $\lim n_k^{1/k} = 1$ [ou seulement $\lim_{j \rightarrow i} (n_j - n_i)^{1/(j-i)} = 1$]: il existe une série entière $\sum a_k z^{n_k}$ uniformément convergente sur $|z| = 1$, alors que la série des valeurs absolues diverge. — Ayant fixé le mode de détermination des valeurs absolues $|a_k|$, l'A. termine la démonstration en montrant que pour presque tous les choix de la suite $\{\varepsilon_k\}$, où $\varepsilon_k = \pm 1$, la série $\sum \varepsilon_k |a_k| z^{n_k}$ converge uniformément sur $|z| = 1$. — Il faut rectifier plusieurs erreurs d'impression dans la démonstration du lemme 1.

G. Bourion.

Tammi, Olli: On the maximalization of the coefficients of schlicht and related functions. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **114**, 51 S. (1952).

Es sei (1) $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu}(x) z^{\nu}$ für $|z| < 1$ regulär analytisch und schlicht, $|f(z)| \leq 1/x$,

(2) $\frac{z f'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu}(x) z^{\nu}$. Für die Koeffizienten $\alpha_{\nu}(x)$ und $\beta_{\nu}(x)$ der inversen Funktionen von (1) und (2) werden genaue obere Grenzen als Funktionen von x abgeleitet. Die Extremalfunktion bildet den Einheitskreis auf einen Kreis ab, dessen Radius $1/x$ ist und der längs dem Radius geschlitzt ist. Im Falle $x = 0$ ergibt sich die Koebesche Funktion $z/(1 + \varepsilon z)^2$, $|\varepsilon| = 1$. Auch für $a_3(x)$ und $b_2(x)$ werden Abschätzungen gegeben, welche jedoch nicht für sämtliche Werte x genau sind. Die Sätze werden mit Hilfe der Löwnerschen Differentialgleichung

$$(3) \quad \partial f(z, u) / \partial u = 2 f(z, u) e^{\vartheta(u)} f(z, u) / [1 - u e^{\vartheta(u)} f(z, u)]$$

bewiesen, wo $\vartheta(u)$ eine stetige Parameterfunktion ist. Verf. zeigt weiter, daß wenn $\vartheta(u)$ durch eine Sprungfunktion ersetzt wird, die Lösung von (3) allerdings eine schlichte Abbildung gibt. Als Folgerung hieraus beweist er, daß die Koebesche Funktion die Koeffizienten $a_4(0)$ und $a_5(0)$ in der Klasse derjenigen Funktionen maximiert, welche (3) gibt, wenn $\vartheta(u)$ eine Sprungfunktion mit zwei Sprüngen ist. — Sei (1) jetzt für $|z| < 1$ regulär, nicht notwendig schlicht. Verf. bestimmt einige Klassen von Funktionen, für welche die b -Koeffizienten beschränkt sind. Dies sind gewisse Verallgemeinerungen von Sternfunktionen. Wenn speziell jeder um den Nullpunkt gezogene Kreis den Rand des Bildgebietes höchstens in zwei Punkten trifft und das Verhältnis der maximalen und minimalen Abstände der Randpunkte vom Nullpunkt unter e^{π} liegt, so ist $|b_n| \leq 2$, woraus folgt, daß $|a_n| \leq n$ für jedes n ist.

V. Paatero.

Tammi, Olli: On certain combinations of the coefficients of schlicht functions. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. **140**, 13 S. (1952).

Sei (1) $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ für $|z| < 1$ regulär analytisch, (2) $z f'(z) / f(z) =$

$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}$, (3) $1 + z f''(z)/f'(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}$. Im Falle, daß

$$\int_0^{2\pi} |d(\varphi + \arg f'(r e^{i\varphi})| \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{2\pi} |d \log |f'(r e^{i\varphi})||$$

beschränkt ist, werden für $|c_n|$, $|f(z)|$ und $|f^{(n)}(z)|$ ($n = 1, 2, \dots$) Abschätzungen abgeleitet. — Sei jetzt (1) schlicht und $|f(z)| \leq 1/x$ (siehe vorsteh. Ref.). Mit Hilfe der Löwnerschen Differentialgleichung wird bewiesen, daß dann $|c_2(x)| \leq 6(1 - x^2)$ für $e^{-3} \leq x \leq 1$, wo $c_{\nu}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) die Koeffizienten von (3) sind. Die zugehörige Extremalfunktion wird bestimmt. Die Koeffizienten $\gamma_n(x)$ der inversen Funktion von (3) werden noch maximiert. Die Extremalfunktion ist dieselbe, die auch die Koeffizienten $\alpha_n(x)$ und $\beta_n(x)$ maximiert. *V. Paatero.*

Kaplan, Wilfred: Close-to-convex schlicht functions. Michigan math. J. 1, 169—185 (1952).

Ist $f(z)$ in $|z| < R$ regulär und existiert ein daselbst konvexes schlichtes $\Phi(z)$ mit $\Re(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$, dann bezeichnet Verf. $f(z)$ als beinahe konvex (close-to-convex) in $|z| < R$. Jede beinahe konvexe Funktion ist schlicht und kann als solche ohne Hilfsfunktion Φ dadurch charakterisiert werden, daß auf jedem in positiver Richtung beschriebenen Abschnitt der Bildkurve von $|z| = r < R$ der Zuwachs des Argumentes der Tangentenrichtung $-\pi$ übersteigt. Somit sind die Sternfunktionen beinahe konvex, so aber auch z. B. die Poissonintegrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} h(\theta) d\theta, \quad \text{falls das Integrationsintervall in zwei Teile zerfällt, in}$$

welchen $h(\theta)$ monoton ist.

G. af Hällström.

Turán, Paul: On a property of lacunary power-series. Acta Sci. math. 14, 209—218 (1952).

Das beständig konvergente Funktionselement (1) $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} z^{\lambda_{\nu}}$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lambda_{\nu}$ ganz) genüge der Lückenbedingung (2) $\lambda_{\nu}/\nu \rightarrow \infty$. Ein bekannter Satz von G. Pólya [Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z. 29, 549—640 (1929); vgl. insbes. S. 624 und 626] besagt dann roh ausgedrückt, daß $f(z)$ in jedem Winkelraum mit dem Scheitel $z = 0$ dasselbe Wachstum aufweist wie in der ganzen Ebene; die Winkelräume dürfen dabei auch „krummmlinig“ sein. Neuere Ergebnisse in dieser Richtung stammen von F. Sunyer i Balaguer [Propriedades de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares (orden finito), Sem. Math. de Barcelona 2, fasc. 1, 1—48 (1949)]. Verf. belegt die früher (dies. Zbl. 40, 23) ausgesprochene Behauptung, daß derartige Resultate innerhalb der Reichweite von ihm geschaffener Beweismethoden liegen. Sei $M(r, \alpha, \beta, f) = \max |f(z)|$ für $|z| = r$, $\alpha \leq \arg z \leq \beta$; $M(r, f) = M(r, 0, 2\pi, f)$. Satz 1: Ist $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, $0 < \varepsilon \leq 1/2$ und genügt (1) der Bedingung (2), so gilt (3) $(\beta - \alpha) M^{1+\varepsilon}(r, f) \leq 48\pi M^{2\varepsilon}(2r, f) M(r, \alpha, \beta, f)$ für alle $r > r_1 = r_1(f, \varepsilon, \beta - \alpha)$. (3) kann trivial werden, wenn $f(z)$ sehr schnell wächst, ist es aber keineswegs, wenn z. B. $f(z)$ von endlicher Ordnung k ist. In diesem letzteren Fall folgert Verf. die Existenz einer Folge konzentrischer Kreise $|z| = r_{\nu}$ mit $2r_{\nu} \leq r_{\nu+1} \leq 2r_{\nu}^{k+2}$, so daß $(\beta - \alpha) M^{1-\varepsilon}(r_{\nu}, f) \leq 48\pi D^{\varepsilon} M(r_{\nu}, \alpha, \beta, f)$ ist mit nur von f abhängigen Konstanten C und D . Verf. beschränkt sich auf den Beweis eines zu Satz 1 analogen Satzes 2 über harmonische

Reihenentwicklungen, bei denen $h(r, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\lambda_{\nu}} (a_{\nu} \cos \lambda_{\nu} \varphi + b_{\nu} \sin \lambda_{\nu} \varphi)$ an die Stelle von (1) tritt. Haupthilfsmittel ist eine Ungleichung aus einer früheren Arbeit des Verf. [On a theorem of Littlewood, J. London math. Soc. 21, 268—275 (1946); vgl. (7) im Referat der in dies. Zbl. 29, 393 besprochenen Arbeit des Verf.]. Zum Schluß einige Verschärfungen.

W. Meyer-König.

Arima, Kihachiro: On maximum modulus of integral functions. J. math. Soc. Japan 4, 62—66 (1952).

Sei $f(z)$ eine ganze Funktion und $r\theta(r)$ die Länge des größten derjenigen Bogen $|z| = r$, auf welchen $|f(z)| > 1$ ist. Dann ist für $0 < \alpha < 1$

$$\log_2 M(r) > \pi \int_{r_0}^{\alpha r} \frac{dr}{r \theta(r)} - c(\alpha, r_0),$$

wo $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $0 < r_0 < \alpha r$ und $c(\alpha, r_0)$ von r unabhängig ist. Hieraus

folgt: $\varrho \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\log r} \int_{r_0}^r \frac{\pi}{r\theta(r)} dr$, wo ϱ die Ordnung von $f(z)$ ist. Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \infty$

und $\varrho < k$ ist, so existiert eine Folge von Kreisen C_n : $|z| = r_n \rightarrow \infty$ derart, daß jedes C_n einen Bogen hat, dessen Länge $> \pi r_n/k$ und auf welchem $|f(z)| > K_n$ ist. Sei zuletzt $f(z)$ regulär für $|z| < 1$. Wenn dann $\lim_{r \rightarrow 1} \theta(r)/(1-r) < 2\pi$, so ist entweder $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$ oder $\lim_{r \rightarrow 1} \log_2 M(r)/\log(1-r)^{-1} > 0$. Alle diese

Sätze folgen aus einem allgemeinen Satz, den Verf. für positive harmonische Funktionen nach einer Methode von Carleman (dies. Zbl. 6, 316) bewiesen hat.

V. Paatero.

Arima, Kihachiro: On the zeros of integral functions of integral order. J. math. Soc. Japan 4, 67—69 (1952).

Sei $f(z)$ eine ganze Funktion von ganzzahliger Ordnung $\varrho > 0$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ und $n(r, \alpha)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z) - \alpha$ für $|z| \leq r$. Wenn $\log_2 M(r)/\log r \rightarrow \varrho$ für $r \rightarrow \infty$, so ist auch $\log n(r, \alpha)/\log r \rightarrow \varrho$, und wenn $\log M(r)/r^\varrho$ zwischen zwei positiven endlichen Schranken liegt, so gilt dasselbe für $n(r, \alpha)/r^\varrho$, in beiden Fällen mit Ausnahme einer Menge von Werten α , deren innere logarithmische Kapazität gleich Null ist. Die Sätze sind von früher her mit größerer möglicher Ausnahmemenge von α -Werten bekannt (Borel, Leçons sur les fonctions entières, Paris 1921).

V. Paatero.

Boas jr., R. P.: Growth of analytic functions along a line. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 503—504 (1952).

Es seien $f(z)$ für $x \geq 0$ ($z = x + iy$) regulär und von exponentiellem Typus $< \pi$, $\varepsilon(x)$ eine monoton wachsende, konkave, differenzierbare Funktion, $\varepsilon(x) = o(x)$, $\varepsilon'(x) \leq \varepsilon(x)/x < 1$, $\log x = o(\varepsilon(x))$. Sei weiter $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0$, $|\lambda_n - n| \leq \varepsilon(n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Verf. gibt folgende Sätze über die Abhängigkeit zwischen den Zuwächsen von $|f(x)|$ und $|f(\lambda_n)|$: Wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\log |f(\lambda_n)|/\varepsilon(\lambda_n)\} < \infty$ bzw. $< -B < 0$ (B hinreichend groß), so ist $\limsup_{x \rightarrow \infty} \{\log |f(x)|/\varepsilon(x)\} < \infty$ bzw.

< 0 . Wenn $f(z)$ ganz und vom Typus Null, $\int_0^\infty x^{-2} \varepsilon(x) dx < \infty$ und $f(\pm \lambda_n)$ beschränkt bzw. $= O\{\exp(\lambda_n^\varrho)\}$ ist, so ist $f(z)$ eine Konstante bzw. von einer Ordnung $\leq \varrho$. Auf die Beweise der Sätze wird hingewiesen.

V. Paatero.

Bose, S. K.: Some properties of the maximum function of a meromorphic function. Math. Z. 56, 223—226 (1952).

L'A. établit quelques propriétés nouvelles de la fonction maximum $S(r)$ qu'il a récemment définie et étudiée (ce Zbl. 48, 56).

J. Dufresnoy.

Collingwood, Edward F.: Conditions suffisantes pour l'inversion de la seconde inégalité fondamentale de la théorie des fonctions méromorphes. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1182—1184 (1952).

By a method he used previously (this Zbl. 34, 52; 35, 50; 41, 405), the author establishes conditions sufficient for the inversion of Nevalinna's second fundamental inequality in the theory of meromorphic functions. His method generalises works of Teichmüller (this Zbl. 16, 266) and H. L. Selberg [Comment. math. Helvetici 18, 309—326 (1946)]. Briefly, let $\sigma(r)$ be real, nonincreasing, $< \pi/2$, $\lim_{r \rightarrow R} \log [1/\sigma(r)]/T(r, f) = 0$. Let the values $w = f(z)$ be represented

on the Riemann sphere K of diameter 1. Let $A = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ be a finite set of points on K , let $d(a, A)$ = great circle distance between a and the nearest a_s , $1 \leq s \leq q$, $\varrho(a, r) = \min [\sigma(r), d(a, A)]$; $\Phi(t)$ continuous, increasing, concave, twice differentiable for $t \geq -\log \pi$, $\sigma(a, r) = \varrho(a, r) \exp(-\Phi(\log \varrho(a, r)))$. For r, a in CA , let $G(r, a, \sigma(a, r)) \equiv$

$\sum_{\nu=1}^{\lambda(r)} G_{\nu}(r, a, \sigma(a, r))$ be the domain where the great circle distance $l(f(z), a) < \sigma(a, r)$, and let $P(r, a, \sigma(a, r)) = \max_{1 \leq \nu \leq \lambda(r)} p_{\nu}(r, a, \sigma(a, r))$, where p_{ν} denotes the valency of $f(z)$ in G_{ν} .

Let $p(r)$ lie in $0 \leq p(r) < \infty$, $V(a, \sigma(a, r), p(r)) = \text{set of } r \text{ in } 0 \leq r < R \text{ for which } P \leq p(r)$, $E(a, \sigma(a, r), p(r)) = \text{subset of } r \text{ for which either } P = 0 \text{ or all } G_{\nu}(r, a, \sigma(a, r)), 1 \leq \nu \leq \lambda(r)$, are contained in $|z| < R$. Theorem: Suppose $f(z)$ is meromorphic in $|z| < R \leq \infty$, $T(r, f)$ is unbounded, $p(r) = o(T(r, f)/\log r)$ or $o(T(r, f))$ according as $R = \infty$ or $R < \infty$, and suppose $B < R$ exists such that, for all a in CA , the condition $\sup CE(a, \sigma(a, r), p(r)) \leq B$

holds. Then $2T(r, f) \leq N_1(r) + \sum_{i=1}^q m(r, a_i) + T(r)$, where $T(r) = o(T(r, f))$ if $R = \infty$,

$T(r) = \log [1/(R-r)] + o(T(r, f))$ if $R < \infty$; and $N_1(r) \equiv N(r, 1/f') + 2N(r, f) - N(r, f')$ measures the density of multiple values of $f(z)$. If $\sigma(r) < \pi/2$ and $p(r)$ are both constants, the theorem reduces to Selberg's, which contains Teichmüller's.

N. A. Bowen.

Collingwood, Edward F.: Relation entre la distribution des valeurs multiples d'une fonction méromorphe et la ramification de sa surface de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1267—1270 (1952).

Methods used by the author in previous notes (cf. preceding review) are applied for the study of the ramification of the Riemann surface S_f on which $|z| < R$ or the punctured plane $z \neq \infty$ is conformally represented by a function $w = f(z)$ meromorphic and non-rational in $|z| < R \leq \infty$. The properties of $E(a, \sigma(r), p(r))$ and $V(a, \sigma(r), p(r))$ serve to characterize the ramification of S_f in the neighbourhood of a point a . [For definitions of E , V etc. see the previous review and replace $\sigma(a, r)$ by $\sigma(r)$.] a is called a centre of ramification of S_f if $\sup CE(a, \sigma(r), p(r)) = R \leq \infty$ with $p(r) > 1$. The order of a is unbounded if this formula holds with $\sigma(r) \rightarrow 0$ and $p(r) \rightarrow \infty$ when $r \rightarrow R$. Theorem 1. (i) Let $f(z)$ be meromorphic in $|z| < R \leq \infty$, and, in the case $R < \infty$, satisfy $\lim_{r \rightarrow R} T(r, f) - \log(R-r) = \infty$; (ii) define $\sigma(r)$ and $p(r) > 1$ as before, and suppose

$B < R$ exists such that $\sup CE(a, \sigma(r), p(r)) \leq B$ for every a . Then the upper defect $\Delta(a) = 0$ for every a , and $\lim_{r \rightarrow R} N_1(r)/T(r, f) = 2$. Theorem 2. Let (i) hold, let $\lim_{r \rightarrow R} N_1(r)/T(r, f) < 2$,

and define $p(r)$ as before. Then there exists a function $\Sigma(r)$ nonincreasing and tending to zero as $r \rightarrow R$, and a value a , such that $\sup CE(a, \Sigma(r), p(r)) = R$. This theorem, asserting the existence of a centre of ramification and giving a measure of its order, can be compared with the classical result that S_f must have at least two logarithmic points, if it has only a finite number of algebraic points. For proofs of the results announced in this note and in the preceding one, see Collingwood, J. Analyse Math. **2**, 29—50 (1952).

N. A. Bowen.

Beckenbach, E. F.: A property of mean values of an analytic function. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **1**, 157—163 (1952).

The author improves Nehari's theorem (this. Zbl. **21**, 142) as follows: If $f(z)$ is analytic for $|z| < 1$, with $f(0) = f_0$, and $\nu(\varphi, f) \equiv \int_0^1 |f(\varrho e^{i\varphi})| d\varrho$ satisfies

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(\varphi, f) d\varphi \leq 1, \text{ then } \mu(\varrho, f) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\varphi})| d\varphi \text{ satisfies (1) } \mu(\varrho, f) \leq$$

$|f_0| + 2\varrho(1 - |f_0|)$ for $0 < \varrho \leq 1/2$, and $\mu(\varrho, f) < |f_0| + (1 - |f_0|)/2(1 - \varrho)$ for $1/2 < \varrho < 1$; the sign of equality holds in (1) if and only if either $f(z) \equiv e^{i\alpha}$ or $f(z) \equiv 2e^{i\alpha}z$, where α is a real constant. His proof is very impressive. This paper is concluded with its application which is closely related to a result of Fejér and Riesz [Math. Z. **11**, 305—314 (1921)].

K. Noshiro.

Umezawa, Toshio: On the multivalency of analytic functions. J. math. Soc. Japan **4**, 279—285 (1952).

Combining Z. Nehari's method (this Zbl. **35**, 54) with the reviewer's (this Zbl. **9**, 24), the author extends E. Sakai's results (this Zbl. **39**, 307) to the case of single-valued meromorphic functions defined in a multiply connected domain and furthermore gives some extensions of Nehari's results to the case of multivalence.

K. Noshiro.

Umezawa, Toshio: A class of multivalent functions with assigned zeros. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 813—820 (1952).

Die Funktion (1) $f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n$ sei regulär und habe $p (\geq 0)$ Nullstellen für $|z| \leq 1$. Dann existiert ein Punkt $\zeta (|\zeta| = 1)$ derart, daß $\arg f(-\zeta) = \arg f(\zeta) + p\pi$. Die Gerade $[f(-\zeta), f(\zeta)]$ wird als die diametrale Gerade l von $f(z)$ bezeichnet. Sei $D(p)$ die Klasse derjenigen Funktionen (1), für welche die mit l parallele, durch den Nullpunkt gezogene Gerade die Bildkurve von $|z| = 1$ in $2p$ Punkten schneidet. Wenn $f(z) \in D(p)$ und die Nullstellen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-q} (0 < |\beta_j| < 1, j = 1, 2, \dots, p-q)$ hat, so ist $|a_n| < B_n (n = q+1, q+2, \dots)$ und $|f(re^{i\theta})| \leq F(r) (r < 1)$, wo

$$F(z) = \frac{z^q}{(1-z)^{2p}} \prod_{j=1}^{p-q} \left(1 + \frac{z}{|\beta_j|}\right) (1 + z |\beta_j|) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} B_n z^n.$$

Analoge Abschätzungen werden für die Funktionenklasse $F(p)$ hergeleitet, welche dadurch charakterisiert ist, daß die orthogonale Projektion von $f(e^{i\theta})$ auf der diametralen Geraden von $z f'(z)$ $2p$ -mal ihre Bewegungsrichtung verändert, wenn θ von 0 bis 2π variiert. — Als Folgerungen werden einige Resultate von A. W. Goodman erhalten (dies. Zbl. 37, 55; 42, 303). V. Paatero.

Umezawa, Toshio: Analytic functions star-like of order p in one direction.

Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 264—271 (1952).

Die Funktion $w = f(z)$ sei regulär analytisch für $|z| \leq 1, \neq 0$ für $|z| = 1$ und habe p Nullstellen in $|z| < 1$. Verf. hat bewiesen, daß dann ein Punkt $\zeta (|\zeta| = 1)$ derart existiert, daß $\arg f(-\zeta) = \arg f(\zeta) + p\pi$. Die durch $f(\zeta)$ und $f(-\zeta)$ gezogene Gerade wird als die diametrale Gerade von $f(z)$ bezeichnet. Wenn das Bild C der Kurve $|z| = 1$ von einer durch den Nullpunkt gezogenen Geraden l in $2p$ Punkten getroffen wird, so wird $f(z)$ als sternförmig von der Ordnung p in bezug auf die Richtung l bezeichnet. Die Klasse von derartigen Funktionen sei $S^1(p)$. Wenn speziell l dieselbe Richtung wie die diametrale Gerade hat, so wird die betreffende Klasse durch $D(p)$ bezeichnet. Die Funktion $f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n \in S^1(p)$ habe s Nullstellen $\beta_j, 0 < |\beta_j| < 1, j = 1, 2, \dots, s$, und sei $t \geq 0$ durch $q + s + t = p \geq 1$ bestimmt. Dann ist $|a_n| \leq A_n (n = q+1, q+2, \dots)$, wo A_n durch

$$F(z) = \frac{z^q}{(1-z)^{2q+2s}} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2t+1} \prod_{j=1}^s \left(1 + \frac{z}{|\beta_j|}\right) (1 + z |\beta_j|) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} A_n z^n$$

definiert ist. Eine ähnliche Abschätzung wird für $f(z) \in D(p)$ bewiesen. — In analoger Weise wird die Klasse von konvexen Funktionen verallgemeinert (vgl. M. S. Robertson, dies. Zbl. 47, 313). Für $|a_n|, |f(z)|$ und $|f'(z)|$, wo $f(z)$ zu der verallgemeinerten konvexen Klasse gehört, werden genaue Abschätzungen abgeleitet. V. Paatero.

Hayman, W. K.: Functions with values in a given domain. Proc. Amer. math. Soc. 3, 428—432 (1952).

Sei $w = f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ für $|z| < 1$ regulär und nehme Werte an, welche in das Gebiet D fallen. Sei $A(R)$ der Radius des größten in D gelegenen Kreises, dessen Mittelpunkt auf $|w| = R$ liegt. A. Dvoretzky (dies. Zbl. 39, 306) hat für $|a_n|$ asymptotische Ausdrücke gefunden, wenn $A(R) = O(R^\gamma), \gamma < 1$. Verf. beweist nun folgende Sätze: Sei $A(R) < \varepsilon R$ für $R > R_0, \varepsilon < 2/3$, und sei $\mu = \max(|a_0|, R_0)$. Dann ist $M(\varrho, f) = \max_{|z|=\varrho} |f(z)| < \mu (1-\varrho)^{-K\varepsilon}, |a_n| < \mu e(n+1)^{K\varepsilon}$, wo K eine Konstante ist. Wenn $f(z)$ schlicht ist, so ist $|a_n| < \mu e 2^{K\varepsilon} n^{-1/2+K\varepsilon}$. Wenn $A(R) \leq C$ für $0 \leq R < \infty$, wo C eine Konstante ist, so ist $M(\varrho, f(z) - a_0) \leq C \log [(1+\varrho)/(1-\varrho)], |a_n| < eC$. Ist $f(z)$ außerdem schlicht, so gilt $|a_n| < C(1+\varepsilon) n^{-1/2} \log(6n/\varepsilon)$, wo $0 < \varepsilon < 1$. V. Paatero.

Wigner, E. P.: On the connection between the distribution of poles and residues for an R function and its invariant derivative. Ann. of Math., II. Ser. 55, 7—18 (1952).

In einer früheren Untersuchung (dies. Zbl. 42, 452) hatte Verf. im Zusammenhang mit einem bestimmten quantenmechanischen Stoßproblem als R -Funktion eine solche vom Typ $R(z) = \alpha z + \beta + \sum_{\mu} \left(\frac{\gamma_{\mu}^2}{(Z_{\mu} - z)} - \gamma_{\mu}^2 \right)$ definiert, mit den reellen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma_{\mu}$ und Z_{μ} , und als statistische R -Funktion eine solche bezeichnet, bei der die Pole Z_{μ} und die zugehörigen Residuen irgendwie (bei Erfüllung

bestimmter Nebenbedingungen) statistisch verteilt sind. In der vorliegenden Arbeit wird ein spezieller Typ solcher statistischer R -Funktionen genauer untersucht.

F. Sauter.

Selmer, Ernst S.: On the Dixon elliptic functions in the equianharmonic case. Norsk mat Tidsskr. **34**, 105—116 (1952).

A. C. Dixon untersuchte [Quart. J. pure appl. Math. **24**, 167—233 (1890)] die die Kurve dritten Grades $x^3 + y^3 - 3axy = 1$ parametrisch darstellenden elliptischen Funktionen $x = \operatorname{sn} u$, $y = \operatorname{cm} u$. Im allgemeinen Falle $a \neq 0$ scheint man keine Anwendungen von ihnen gemacht zu haben, wohl aber gibt es solche im Sonderfalle $a = 0$. Sie betreffen die Erdvermessung (O. S. Adams, Elliptic functions applied to conformal World maps, U. S. Coast and Geodesic Survey, Spec. Publ. 112, Washington 1925), die Differentialgleichungen und die Zahlen-theorie (vgl. eine Abh. des Ref. dies. Zbl. **40**, 43). — Hier behandelt Verf. zunächst die zahlenmäßige Berechnung der durch die Beziehung (1) $\operatorname{sip}^3 u + \operatorname{cop}^3 u = 1$ verbundenen Funktionen

$\operatorname{sip} u = \operatorname{sn} u|^{a=0}$, $\operatorname{cop} u = \operatorname{cm} u|^{a=0}$, deren erste die Umkehrung des Integrals $u = \int_0^x (1 - z^3)^{-2/3} dz$

ist. Ist K dasselbe, bis zu $x = 1$ erstreckte Integral mit einem Werte nahe 1,77, und ist $\exp(2\pi i/3) = \varepsilon$, so ist $3K$ die reelle, und $3K\varepsilon^2$ sind komplexe Perioden von $\operatorname{sip} u$, $\operatorname{cop} u$. Statt der von Adams aufgestellten Potenzreihen für $\operatorname{sip} u$ und $\operatorname{cop} u$ mit dem Konvergenzhalbmesser (Kh.) K betrachtet Verf. die Reihe

$$f(u) = \frac{1}{\operatorname{sip} u} = \frac{1}{u} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} u^{3k+2}, \quad a_1 = \frac{1}{6},$$

die erstens den Vorteil bietet, daß man aus denselben Reihengliedern $\operatorname{sip} u$ und $f(-u) = -\operatorname{cop} u/\operatorname{sip} u$, also auch $\operatorname{cop} u$ berechnen kann. Der zweite mit $f(u)$ verbundene Gewinn ist die Zunahme des Kh. von K auf $K\sqrt{3}$. Ein vom Verf. schon früher [Norske Vid. Selsk. Forh. **19**, 112—115 (1947)] angewandter Kunstgriff — Zusammenfassung der auf die 6 Pole $K\sqrt{3} \exp[\pi i(1+2t)/6]$ $\{t=0, \dots, 5\}$ bezüglichen Hauptteile in ein Glied und seine Abspaltung — gestattet ihm weitere Vergrößerung des Kh. auf $3K$. — Die erhaltene Reihe ist geeignet, $\operatorname{sip} u$ und $\operatorname{cop} u$ bei reellem u zahlenmäßig zu berechnen, $0 \leq u \leq \frac{1}{4}K$; Übergang zu den übrigen reellen u durch funktionale Eigenschaften (f. E.) von $\operatorname{sip} u$ und $\operatorname{cop} u$, zu komplexen Unabhängigen $w = u + iv$ durch die Sumsensätze dieser Funktionen. — Verf. erörtert dann ihre Wertänderungen im Periodenparallelogramm \mathfrak{P} , von dem aber wegen f. E. nur ein Achtzehntel, das Hauptdreieck \mathfrak{S} mit den Ecken 0 , K , $K\varepsilon^{1/3}$ betrachtet zu werden braucht; man darf sich wegen weiterer f. E. auf einen Teil von \mathfrak{S} beschränken, das Dreieck mit den Ecken 0 , $\frac{1}{2}K$, $K\varepsilon^{1/6}/\sqrt{3}$. An einem Schaubilde zeigt Verf. die Änderung von $\arg \operatorname{cop} w$ und $|\operatorname{cop} w|$ in der oberen Hälfte von \mathfrak{P} . Ferner entwirft er eine Höhenkarte des cop -Reliefs. — Die Vermessungslehre stellt die Aufgabe, $w = u + iv$ zu finden, wenn $\operatorname{sip} w = R e^{ic}$ komplex gegeben ist. Es sei, nach (1) berechnet, $\operatorname{cop} w = r e^{-id}$; dann gilt $\operatorname{tg} 3d = R^3 \sin 3c / (1 - R^3 \cos 3c)$, $r^3 = (1 - R^3 \cos 3c) / \cos 3d$. Verf. gibt erst Adams' Lösung wieder, dann vervollkommnet er sie, indem er der von diesem stammenden Formel

$$\operatorname{sip}^3(2v/\sqrt{3}) = [R^3 \sin(c+d) - \sin d] / [R^3 \sin(c+d+\pi/3) - \sin(d-\pi/3)]$$

entsprechende für $\operatorname{sip}^3(u \mp v/\sqrt{3})$ hinzufügt.

L. Koschmieder.

Vekua, N. P.: Die Carlemansche Randwertaufgabe für mehrere unbekannte Funktionen. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **13**, 9—14 (1952) [Russisch].

Es werden die Lösbarkeitsbedingungen und die Lösungen der folgenden Randwertaufgabe durch Zurückführen auf ein System von singulären Integralgleichungen bestimmt: Es sei L eine einfache, geschlossene, glatte Kurve, die ein endliches Gebiet D^+ in der Ebene der komplexen Variablen z begrenzt. Der Tangentenwinkel genüge der Hölderbedingung. Die Funktion $\alpha(t)$ sei auf L definiert, habe dort eine Ableitung $\neq 0$, die der Hölderbedingung genügt, und bilde L umkehrbar eindeutig unter Änderung der Richtung auf sich ab. Die Funktion $\varphi(z)$ heiße meromorph in D^+ , wenn sie 1. analytisch in D^+ mit Ausnahme endlich vieler Pole und 2. überall stetig zum Rand L fortsetzbar ist. Gesucht wird ein Vektor $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$, der in D^+ meromorph ist und auf L der Randbedingung: $\varphi^+(\alpha(t_0)) = G(t_0) \varphi^+(t_0) + g(t_0)$ genügt. Dabei sei $G(t_0)$ eine auf L definierte Matrix mit Determinante $\neq 0$ und $g(t_0)$ ein Vektor auf L ; G und g sollen Hölderbedingungen genügen. φ^+ bezeichne die Randwerte von φ auf L . *W. Thimm.*

● **Nehari, Zeev: Conformal mapping.** (International Series in Pure and Applied Mathematics). New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1952. VIII, 396 p. 56/6 sh.

Die an sich berechtigten und fruchtbaren Bestrebungen zur Vereinheitlichung der Funktionentheorie hatten wesentliche Seiten der Ideen Riemanns in den Hintergrund gedrängt;

die Entwicklung der reinen Mathematik zu immer größerer begrifflicher Allgemeinheit mußte sich in der gleichen Weise auswirken und insbesondere die Klarheit und Einfachheit der Riemannschen Grundgedanken wie auch ihre heuristische Kraft ins Dunkel treten lassen. Dies wirkte sich insbesondere im Unterricht wie in der Lehrbuchliteratur der letzten Jahrzehnte aus, während sich die Forschung schon lange von einer allzu starren Forderung nach Methodenreinheit frei gemacht und z. B. unbedenklich potentialtheoretische Hilfsmittel herangezogen hatte, wo sie zweckentsprechend schienen. So konnte es geschehen, daß weite Gebiete der modernen funktionentheoretischen Originalliteratur dem Lernenden weit schwerer zugänglich waren als dies in der Natur der Sache liegt. Dem damit angedeuteten Bedürfnis kommt das vorliegende Buch entgegen, das ein Lehrbuch, keine Forschungsmonographie darstellt. In ihm findet man gerade die zum Verständnis jener Literatur unerlässlichen Begriffe und Hilfsmittel im Zusammenhang entwickelt. Durch die Arbeit etwa der letzten zwei bis drei Jahrzehnte sind aber auch weite Gebiete bis zur Möglichkeit einer bequemen lehrbuchmäßigen Darstellung ausgereift, und von dieser Möglichkeit wird hier kräftig Gebrauch gemacht, so daß der Leser bis an die Front der Forschung herangeführt wird. — Nach dem Gesagten ist klar, daß die Darstellung nicht immer zu größtmöglicher Allgemeinheit der Aussagen vordringt; andererseits scheut sie sich nicht, wo es aus didaktischen Gründen zweckmäßig erscheint, mehr Worte zu verwenden, als für die logische Unangreifbarkeit des Beweises unerlässlich ist. Diese wird natürlich grundsätzlich erstrebt, aber doch nicht immer erreicht; z. B. wäre wohl auch wenn man den Jordanschen Kurvensatz als bekannt hinnehmen will, etwas mehr Topologie unerlässlich. Zu erwähnen ist auch, daß nur eine elementaranschauliche Darstellung des Begriffes der Riemannschen Fläche gegeben wird, die nicht zu begrifflicher Allgemeinheit durchdringt. — Die Darstellung beginnt mit einem Kapitel über harmonische Funktionen und entwickelt dann in II–IV die allgemeine Funktionentheorie — nach Ansicht des Ref. eine didaktisch und inhaltlich nicht ganz glückliche Anordnung, da sie mit verhältnismäßig schwierigen Dingen beginnen muß und die Potentialtheorie nicht organisch mit der Funktionentheorie verbindet. V. beschäftigt sich mit der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete. Man findet außer dem, was hier selbstverständlich hingehört, auch das Einfachste über Ränderzuordnung, ferner die Schwarz-Christoffelsche Formel, die Abbildung von kreisbogenförmig berandeten Gebieten; ziemlich viel über Funktionen, die im Einheitskreis schlicht sind; das funktionentheoretische Majorantenprinzip, auch mit nicht schlichten Majorantenfunktionen; einen ausführlichen Paragraphen über die Bergmannsche Kernfunktion und endlich einen kurzen über die Abbildung nahezu kreisförmiger Gebiete. VI behandelt spezielle Funktionen vom Standpunkt der konformen Abbildung aus: rationale Funktionen zweiten Grades, Exponential- und trigonometrische Funktionen, elliptische Funktionen, Schwarzsche s -Funktionen, elliptische Modulfunktionen. VII bringt, wohl zum ersten Male in lehrbuchmäßiger Form, viel über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete: Die kanonischen Abbildungen werden durch Extremaleigenschaften gekennzeichnet; nach Klarstellung der Existenz der Extremalfunktion wird umgekehrt für sie die Abbildungseigenschaft bewiesen, indem aus der Annahme des Gegenteils ein Widerspruch mit dem für einfachen Zusammenhang als richtig erkannten Satz konstruiert wird. Aus den Funktionen, die die Abbildung auf den konzentrisch aufgeschlitzten Einheitskreis vermitteln, läßt sich die Greensche Funktion aufbauen. Es folgen die Verallgemeinerungen der Bieberbachschen Flächensätze, ein Paragraph über die Kernfunktion und schließlich ein solcher über beschränkte Funktionen, in dem unter anderem die Abbildung auf eine mehrblättrige Kreisscheibe als Lösung eines gewissen Extremalproblems erscheint. — Besonders hervorzuheben ist die reichhaltige und wertvolle Aufgabensammlung, die jeweils dem einzelnen Paragraphen angegliedert ist. Auf Literaturhinweise wurde mit Rücksicht auf den elementaren Charakter des Buches verzichtet.

H. Grunsky.

Lehto, Olli: On the distortion of conformal mappings with bounded boundary rotation. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. 124, 14 S. (1952).

Die Funktion $w(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ bilde den Kreis $|z| < 1$ auf ein Gebiet G von beschränkter Randdrehung $k\pi$ konform ab, d. h. so, daß die Gesamtvariation des Richtungswinkels der Randtangente von G gleich $k\pi$ ist. Für $|w'(z)|$ und $|w''(0)|$ sind früher Schranken gefunden worden, welche von der Funktion $(1) w(z) = z^{-1} e^{i\omega} \{(1 + z e^{-i\omega})^{k/2} (1 - z e^{-i\omega})^{-k/2} - 1\}$ erreicht werden (Paatero, dies. Zbl. 1, 143; 5, 251). Verf. leitet für $|a_3|$, $|w''(z)|$ und $|w'''(z)|$ genaue Schranken ab, welche alle von der Funktion (1) erreicht werden. Für $|w^{(n)}(z)|$ ($n = 4, 5, \dots$) wird noch eine für $k \rightarrow \infty$ geltende asymptotische Abschätzung gegeben.

V. Paatero.

Komatu, Yûsaku: Mittlere Verzerrungen bei konformer Abbildung eines aufgeschlitzten Streifens. *Kôdai math. Sem. Reports* 1952, 1–4 (1952).

The main purpose of this paper is to prove the following distortion-theorem: Let D be an $(n+1)$ -ply connected domain in the $z = x + iy$ plane which is formed by cutting a strip $|\Im(z)| < \pi/2$ along p horizontal segments t_j and $n-p$ vertical segments s_j ; where $t_j: c_j^- \leq x \leq c_j^+, y = h_j, (j = 1, \dots, p)$; $s_j: x = c_j, h_j^- \leq y \leq h_j^+, (j = p+1, \dots, n)$. Then, for any univalent regular function $w = \chi(z)$, in D , which makes the exterior boundary-component $\Im(z) = \pm \pi/2, -\infty < \Re(z) < +\infty$ and the two boundary-elements at $z = \infty$ invariant and which is continuous on all the interior boundary-components, there exists the relation

$$\lim_{\Re(z) \rightarrow +\infty} (\chi(z) - \chi(-z) - 2z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^p \int_{c_j^-}^{c_j^+} (v(x, h_j + 0) - v(x, h_j - 0)) dx \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=p+1}^n \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j + 0, y) - u(c_j - 0, y)) dy,$$

where $\chi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ (Cf. Y. Komatu and M. Ozawa: Kōdai math. Sem. Reports 1951, Nr. 5/6, 81–95. K. Noshiro.

Komatu, Yūsaku and Mitsuru Ozawa: Conformal mapping of multiply connected domains. II. Kōdai math. Sem. Reports 1952, 39–44 (1952).

In a previous note (Kōdai math. Sem. Reports 1951, Nr. 5/6, 81–95) the authors have reduced the problem of conformal mapping of any given multiply connected domain onto a whole plane slit along horizontal and vertical segments to that of connectivity two. In the present note the authors give the function which maps an annulus $\{Q < |z| < 1\} = A$ onto the whole plane slit along horizontal and vertical segments:

$$w = \exp \{G(z, z_\infty) - G(z, z_0) + G(z, q/\bar{z}_\infty) - G(z, q/\bar{z}_0)\},$$

where $G(z, \zeta)$ is the analytic function whose real part is the Green function of $q = Q^2 < |z| < 1$ with singularity ζ and z_0, z_∞ are two different points interior to the annulus A . J. Górski.

Zhang, Ming-Yng: Ein Überdeckungssatz für konvexe Gebiete. Sci. Record 5, 17–21 und chines. Zusammenfassg. 17 (1952).

Mit Hilfe eines Schwarz-Pick-Ahlforsschen Lemmas beweist Verf. den folgenden Satz: Es sei $f(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre, analytische Funktion, $|f'(0)| = 1$; G bezeichne das Bildgebiet der Kreisscheibe $|z| \leq 1$. Wenn G konvex ist, so enthält es eine Kreisscheibe vom Halbmesser $\geq \pi/4$. I. Fáry.

Fourès, Léonce: Sur les recouvrements régulièrement ramifiés. Bull. Sci. math., II. Sér. 76_I, 17–32 (1952).

Auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche seien $n \geq 2$ Punkte $\omega_1, \dots, \omega_n$ und zu jedem ω_i eine ganze positive Zahl ν_i gegeben. Verf. zeigt, daß es möglich ist, eine geschlossene Überlagerungsfläche zu konstruieren, die in allen Blättern über ω_i einen ν_i -fachen Windungspunkt hat und sonst überall unverzweigt ist, mit Ausnahme des Falles, daß die Fläche das Geschlecht Null hat und auf ihr nur zwei Punkte mit verschiedenen Windungszahlen vorgeschrieben sind. Ist das Geschlecht ≥ 1 , so bildet Verf. die geeignet aufgeschnittene Fläche zunächst auf ein Polygon ab und kann dann unmittelbar Wurzelfunktionen angeben, die das Verlangte leisten. Bei Flächen vom Geschlecht Null sind die Schwierigkeiten größer. Verf. zeigt hier die Existenz des Streckenkomplexes, den man in der von Lindelöf und Ullrich angegebenen Weise der Überlagerungsfläche zuordnen kann, und damit die Existenz der Überlagerungsfläche selbst. Ott-Heinrich Keller.

Yûjōbō, Zuiman: An application of Ahlfors's theory of covering surfaces. J. math. Soc. Japan 4, 59–61 (1952).

Folgender Satz von Ahlfors (dies. Zbl. 8, 262) wird mit Hilfe seiner Theorie der Überlagerungsflächen bewiesen: Sei $w = f(z)$ für $|z| < R$ meromorph;

D_1, D_2, \dots, D_q ($q \geq 3$) seien zueinander fremde, einfach zusammenhängende, abgeschlossene Gebiete auf der Riemannschen Fläche von $f(z)$, welche auf D_i ($i = 1, 2, \dots, q$) mindestens μ_i -fach verzweigt sei. Wenn dann $R \geq k(1 + |f(0)|^2)/|f'(0)|$, wo k eine Konstante ist, so gilt $\sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \geq 2$. V. Paatero.

● **MacLane, G. R.:** Riemann surfaces and asymptotic values associated with real entire functions. Rice Inst. Pamphlet, Special Issue, 93 p. (1952).

Verf. gibt eine Klassifikation von Riemannschen Flächen, deren erzeugende Funktionen ganz und reellwertig sind. Die einfachzusammenhängenden Flächen gehören dem parabolischen Typus an und weisen unendlich viele algebraische und endlich viele logarithmische Windungspunkte auf. Entsprechend wie in Elfving's Theorie der Streckenkomplexe wird ein Konstruktionsverfahren für die obigen Flächen angegeben. In eine erste Klasse W werden solche Riemannsche Flächen G eingereiht, die als Bild der z -Ebene vermittle einer ganzen Funktion $w = f(z)$ entstehen und deren Ableitung durch $f'(z) = e^{-\delta z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_{\nu}}\right)$ festgelegt wird.

Durch den Einbau von k logarithmischen Windungspunkten wird die Klasse W zu W^k erweitert. Damit eine Fläche zu dieser Klasse W^k gehört, sind 6 Bedingungen an die Funktion zu stellen, so z. B., daß $f'(z) = e^{\Pi(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_{\nu}}, q\right)$ mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{b_{\nu}^q} = \infty$,

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{b_{\nu}^{q+1}} < \infty$ und $\Pi(z) = \sum_{\mu=1}^{\sigma} c_{\mu} \cdot z^{\mu}$. Weiter untersucht Verf. das asymptotische Verhalten der Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$, wobei der Einfluß von logarithmischen und algebraischen Windungspunkten eingehend untersucht wird. Als wichtigstes Beweismittel werden die Kerne von Carathéodory benützt. H. P. Künzi.

Sario, Leo: Sur la classification des surfaces de Riemann. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 229—238 (1952).

The author investigates the classification of open Riemann surfaces and removabilities of their ideal boundaries on the basis of the existence of certain characteristic functions. He uses the following notations: $H(A)$ = harmonic (analytic) single-valued non-constant, D = with a finite Dirichlet integral, M = with a bounded mean value (for an analytic function w , the mean value of $|w|$ is used) in the sense of Nevanlinna (this Zbl. 36, 191), $H_0(A_0)$ = function harmonic (analytic) single-valued non-constant in a neighbourhood G of the ideal boundary of the Riemann surface, which (whose real part) vanishes on the compact relative boundary of G , O_0 = the class of surfaces with ideal boundary of harmonic measure zero. The author obtains the following important results: $O_{H_0 K} = O_0$, $O_{H_0 K} \leq O_{HK}$ ($K = B, M, D$); $O_{HK} \leq O_{AK}$ ($K = B, M, D$) (this inequality is strict at least in the case of $K = B, D$); in particular, $O_{H_0 K} = O_{HK} = O_0$, $O_{A_0 K} = O_{AK}$ ($K = B, M, D$) for Riemann surfaces of finite genus. His proofs are simple and excellent. Recently many papers closely related to this subject have been published as the author remarks (Cf. also A. Mori, this Zbl. 44, 84; 48, 59, 319, and Y. Tôki, this Zbl. 48, 59).

K. Noshiro.

Ozawa, Mitsuru: Classification of Riemann surfaces. Kôdai math. Sem. Reports Nr. 3, 63—76 (1952).

In verschiedenen neueren Arbeiten, besonders von finnischen Autoren, werden Riemannsche Flächen nach bestimmten Gesichtspunkten klassifiziert. Verf. untersucht entsprechende Fragen, indem er eine elliptische Differentialgleichung $\Delta u(x, y) = P(x, y) \cdot u(x, y)$ vorgibt und betrachtet, unter welchen Voraussetzungen auf einer vorgegebenen Riemannschen Fläche, Lösungen der Differentialgleichung existieren. Dabei werden bestimmte Kernfunktionen, sowie Greensche Funk-

tionen definiert. Weiter entwickelt Verf. entsprechende Theoreme in Richtung des Maximum- und Minimumprinzips. *H. P. Künzi.*

Mori, Akira: A remark on the class O_{HD} of Riemann surfaces. *Kōdai math. Sem. Reports* **1952**, 57—58 (1952).

G wird als eine „Unterfläche“ (subsurface) einer offenen Riemannschen Fläche F bezeichnet, wenn G eine zusammenhängende offene Menge auf F ist, deren Randmenge C aus einfachen stetigen Kurven auf F besteht. Man sagt, daß F bzw. G zur Klasse a) O_{HB} bzw. SO_{HB} , b) O_{HD} bzw. SO_{HD} , c) O_{HBD} bzw. SO_{HBD} gehört, wenn jede auf F bzw. G eindeutige harmonische Funktion, welche a) beschränkt ist, b) ein endliches Dirichletintegral hat, c) diese beiden Eigenschaften besitzt, eine Konstante ist. Es ist bekanntlich $O_{HB} \subset O_{HD} = O_{HBD}$ (K. I. Virtanen, dies. Zbl. **38**, 236; H. L. Royden, dies. Zbl. **43**, 84) und $SO_{HB} \subset SO_{HD} = SO_{HBD}$ (A. Mori, dies. Zbl. **44**, 83). Es seien G und G' zwei getrennte „Unterflächen“ von F . Verf. beweist, daß aus $G \notin SO_{HD}$ und $G' \notin SO_{HB}$ folgt, daß $F \notin O_{HD}$. *V. Paatero.*

Sario, Leo: An extremal method on arbitrary Riemann surfaces. *Trans. Amer. math. Soc.* **73**, 459—470 (1952).

Verf. schließt an Arbeiten von de Possel, Grunsky und Schiffer an und untersucht für eine Klasse $\{P\}$ analytischer Funktionen, dargestellt durch $P = p + i\bar{p} = \frac{1}{z^k} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ die Existenz eines Funktional, das für eine bestimmte Funktion der obigen Klasse minimalisiert wird. Für $-1 \leq \lambda \leq +1$ und $\alpha_k = \operatorname{Re}(a_k)$ wird dieses Funktional dargestellt durch $m_{\lambda}(p) = 2\pi \lambda k \alpha_k + \int_{\beta} p \cdot d\bar{p}$, wo β den idealen Rand der Riemannschen Fläche bezeichnet. Die vom Verf. benützte Funktionenklasse $\{P\}$ ist allgemeiner gewählt als bei den oben zitierten Autoren und für beliebige Riemannsche Flächen formuliert. Am Schlusse werden noch verschiedene Klassifikationen Riemannscher Flächen angegeben, auf denen u. a. das Verschwinden der eingeführten Spannweite $\sigma_P = \alpha_{-1k} - \alpha_{1k}$ benützt wird. *H. P. Künzi.*

Kuramochi, Zenjiro: A remark on the bounded analytic function. *Osaka math. J.* **4**, 185—190 (1952).

Sei F ein kompaktes Riemannsches Flächenstück, das von n analytischen Kurven begrenzt ist. Verf. wendet eine Methode von Z. Nehari (dies. Zbl. **42**, 83) an, um folgendes Problem, das eine Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas ist, zu lösen: In der Klasse der in F eindeutigen regulär analytischen Funktionen $f(z)$, für welche $f(\zeta) = 0$ und $|\operatorname{Re} f(z)| < 1$ ist, $|\operatorname{Re} f'(\zeta)|$ zu maximieren, ein Problem, das für schlichte Gebiete von Nehari gelöst ist (Vgl. auch L. Ahlfors, dies. Zbl. **41**, 411). Die Extremalfunktion wird bestimmt. Die Methode läßt sich auch für andere Extremalprobleme von Nehari (loc. cit.) anwenden. *V. Paatero.*

Virtanen, K. I.: Über Extremalfunktionen auf offenen Riemannschen Flächen. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. **141**, 7 S. (1952).

Ahlfors und Beurling betrachten in ihrer Arbeit („Conformal invariants and function-theoretic null-sets“, dies. Zbl. **41**, 203) die Extremalgröße $M_F(z_0) = \sup_{f \in F} |f'(z_0)|$ einer Klasse F von analytischen Funktionen f . Nach Ahlfors und Beurling ist die Größe M_F in allen betrachteten Fällen identisch gleich Null, sobald sie in einem Punkte verschwindet, wobei nur schlichte Existenzgebiete in Betracht gezogen wurden. Verf. untersucht die entsprechende Frage für allgemeinere Gebiete, wie z. B. für beliebige Riemannsche Flächen. Er findet Fälle, in denen M_F in einzelnen Punkten null sein kann, ohne aber identisch zu verschwinden. Hierzu wird als Existenzgebiet eine von Myrberg konstruierte Riemannsche Fläche eingeführt und auf dieser die Klasse der beschränkten, eindeutigen analytischen Funktionen aufgestellt. Weiter wird gezeigt, daß es auch Funktionenklassen gibt, die unabhängig von ihrem Existenzbereich keine Nullstellen obiger Art zulassen. Als

Beispiel betrachtet Verf. eine bestimmte Klasse Abelscher Integrale 1. Gattung, konstruierbar auf einer beliebigen Riemannschen Fläche. *H. P. Künzi.*

Kuroda, Tadashi: Notes on an open Riemann surface. II. Kōdai math. Sem. Reports 1952, 36—38 (1952).

(Part I this Zbl. 44, 83.) The author gives new proofs to a number of well known theorems concerning Riemann surfaces whose boundary is removable with respect to harmonic functions with a finite Dirichlet integral. *L. Sario.*

Tsuji, Masatsugu: Existence of a potential function with a prescribed singularity on any Riemann surface. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 54—68 (1952).

Soit F une surface de Riemann ouverte, approchée par une suite croissante de surfaces de Riemann F_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$), F_0 contenant $z = 0$. Soient $g_n(z, \zeta)$ la fonction de Green de F_n , $\gamma_n(0)$ la constante de Robin de F_n . L'A. démontre l'existence d'une suite n_ν telle que $g_{n_\nu}(z, \zeta) - \gamma_{n_\nu}(0)$ converge uniformément en z (resp. ζ) sur tout compact ne contenant pas ζ (resp. z), et utilise la limite $g(z, \zeta)$ de cette suite (fonction de Green modifiée) pour construire des fonctions harmoniques admettant des singularités (logarithmiques ou polaires) données. Cette méthode permet de préciser les résultats de H. Weyl (Die Idee der Riemannschen Fläche, Berlin 1923) et W. F. Osgood (Lehrbuch d. Funktionentheorie II, Leipzig-Berlin 1932, dies. Zbl. 5, 299) et de donner une démonstration du théorème de Riemann-Roch. *P. Lelong.*

Cartan, Henri: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. 125, 49—50 (1952).

Verf. beweist: \mathfrak{G} sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit. Die dort stetige komplexe Funktion g sei in allen Punkten von \mathfrak{G} , in denen sie nicht verschwindet, holomorph. Dann ist g in ganz \mathfrak{G} holomorph. Da der Satz lokales Verhalten von g betrifft, genügt es, für \mathfrak{G} einen Polyzylinder zu wählen. Nun braucht der Satz nur noch für den Fall einer komplexen Veränderlichen bewiesen zu werden, weil dann die volle Aussage aus dem Satz von Hartogs-Osgood folgt. Dafür sind aber nur elementare Betrachtungen aus der Theorie der subharmonischen Funktionen erforderlich. *H. Behnke.*

Saxer, Walter: Sur les domaines de normalité des fonctions méromorphes de plusieurs variables. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 49—53 (1952).

Ein (zusammenhängendes) Gebiet \mathfrak{G} des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen heißt Normalitätsgebiet einer Menge \mathfrak{M} von in \mathfrak{G} meromorphen Funktionen, wenn es zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}' \subset \subset \mathfrak{G}$ eine zu \mathfrak{M} gehörige Folge gibt, die in \mathfrak{G}' gleichmäßig im Sinne des chordalen (sphärischen) Abstandes konvergiert, gleiches jedoch bei festem \mathfrak{M} und irgendwie vergrößertem \mathfrak{G} nicht mehr zutrifft. Verf. betrachtet diese Normalitätsgebiete im schlichten C^2 und fügt ihnen nachträglich noch die (isolierten) außerwesentlich irregulären Randpunkte von \mathfrak{G} hinzu. Dann hat er früher bewiesen (dies. Zbl. 5, 70), daß der Rand von \mathfrak{G} von außen pseudokonvex ist. Verf. behandelt nun die Umkehrung. Jedes schlichte, von außen pseudokonvexe Gebiet ist Normalitätsgebiet einer Menge meromorpher Funktionen mit einer beliebigen Zahl außerwesentlicher Singularitäten. Er zeigt, daß sich diese Aussage aus dem Hauptsatz von K. Oka (dies. Zbl. 17, 122) ergibt. *H. Behnke.*

Loster, C.: Une propriété des suites de polynômes homogènes de deux variables complexes bornées sur une courbe. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 210—217 (1952).

L'A., fondandosi sulla nozione di scarto transfinito rispetto ad un punto di un insieme chiuso e limitato di punti dello spazio di due variabili complesse introdotta da F. Leja (questo Zbl. 9, 161) e con l'impiego anche di due lemmi dello stesso Leja (questo Zbl. 7, 62), dimostra: i) se $\{P_n(x, y)\}$ è una successione di polinomi omogenei della forma

$$(1) \quad P_n(x, y) = a_{n,0} x^n + a_{n,1} x^{n-1} y + \dots + a_{0,n} y^n, \dots$$

ove i coefficienti $a_{i,j}$ e le variabili x, y sono complessi, ii) se C è una curva chiusa definita dalle equazioni $C: x = x(t), y = y(t), 0 \leq t \leq 1$, con $x(t), y(t)$ funzioni complesse continue in $(0,1)$, tale che lo scarto di ogni arco parziale della curva C rispetto all'origine è positivo, iii) se la successione (1) è limitata in ogni punto della curva C , fissato allora un punto p_0 della C di coordinate non entrambe nulle ed un numero $\varepsilon > 0$, si può determinare un intorno $V = V(\varepsilon, p_0)$ di p_0 tale che in ogni punto (x, y) di V risulti $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_n(x, y)} < 1 + \varepsilon$.

G. Sansone.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Gonzalez, Mario O.: Probleme bei Differentialgleichungen. Symposium Problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 85—89 (1952) [Spanisch].

Germa, R. H.: Sur l'intégration des équations récurro-différentielles par la méthode des approximations successives. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 260—265 (1952).

Il metodo indicato da E. Cotton nel caso delle equazioni differenziali viene qui esteso al caso di un sistema di equazioni differenziali ricorrenti in una successione di funzioni incognite di una variabile, del tipo considerato in un precedente lavoro di L. Bruwier (questo Zbl. **6**, 55).

G. Cimmino.

Germa, R. H.: Sur l'intégration des systèmes d'équations récurro-différentielles par la méthode des approximations successives. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 309—313 (1952).

Ulteriore estensione della ricerca, cui si riferisce la precedente recensione, al caso di un sistema di equazioni differenziali ricorrenti in una successione di sistemi di p funzioni incognite di una variabile.

G. Cimmino.

Germa, R. H.: Sur une modalité de l'intégration par approximations successives des systèmes d'équations récurro-différentielles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 403—407 (1952).

Un sistema di equazioni differenziali ricorrenti del tipo detto nella recensione precedente può essere trattato con un metodo di approssimazioni successive modificato in maniera analoga a quella considerata in un precedente lavoro dell'A. (questo Zbl. **33**, 368).

G. Cimmino.

Miroljubov, A. A.: Lösung von Differenzen-Differentialgleichungen mit linearen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 1209—1210 (1952) [Russisch].

Es werden einige Ergebnisse des Verf. angegeben über die Differenzen-Differentialgleichung

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_{pq}^{(1)} x + a_{pq}^{(2)}) f^{(p)}(x + h_q) = F(x),$$

wo x eine komplexe Veränderliche, $a_{pq}^{(1)}$ und $a_{pq}^{(2)}$ Konstanten ($a_{nm}^{(1)} \neq 0, a_{n0}^{(1)} \neq 0$), h_q reelle Differenzen, die der Bedingung $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ genügen, und $F(x)$ eine in einem gegebenen Gebiet analytische Funktion bedeuten. Für die inhomogene Gleichung bezieht sich die Angabe darauf, wie das Gebiet der Analytizität einer Lösung in Form einer Summe zweier Kurvenintegrale aus demjenigen der gegebenen Funktion $F(x)$ entsteht. Für die homogene Gleichung [$F(x) = 0$] hat Leont'ev eine Grundlösung in Form eines Kurvenintegrals

$$y_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{e^{xt}}{\theta_1(t)} \exp \left\{ \int_0^t \frac{\theta_2(s)}{\theta_1(s)} ds \right\} dt$$

mit den Hilfsfunktionen $\theta_k(t) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{pq}^{(k)} t^p e^{h_q t}, k = 1, 2$, gefunden, die

jeweils zu einer der Nullstellen a_j ($j = 1, 2, \dots$) der Funktion $\theta_1(t)$ gehört. C^4 bedeutet eine ins Unendliche verlaufende Schleife, die nur die Nullstelle a_j enthält [Trudy Gorkovsk. gosud. päd. Inst., fiz.-mat. Fak. 14, 3 (1951)]. Verf. gibt an, wie sich aus ihr jede analytische Lösung, die in einem horizontalen Streifen endlicher Breite holomorph ist, konstruieren läßt. Beweise werden nicht gebracht.

E. Svenson.

Myškis, A. D.: Differentialgleichungen mit retardiertem Argument. (Diss.) Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4, 190—196 (1952) [Russisch].

Die Dissertation des Verf., die aus einer gedrängten Zusammenfassung von 8 früher von ihm veröffentlichten Arbeiten, erschienen in den Jahren 1949—51 in den Uspechi mat. Nauk, in den Doklady Akad. SSSR und in dem Mat. Sbornik, besteht, über die größtenteils in diesem Zbl. referiert worden ist [dies. Zbl. 35, 178, 179; 41, 56, 421; 42, 328; Mat. Sbornik, n. Ser. 28, 15—54 (1951)]. Es handelt sich im 1. Teil um ein System von Differentialgleichungen mit retardierten Argumenten: $y_i^{(m_i)}(x) = f_i(x, \dots, y_j^{(l)}(x - \Delta_{jk}^l(x)), \dots)$ ($i = 1, \dots, n$) mit den Indexkombinationen $j = 1, \dots, n$; $l = 0, 1, \dots, m_j - 1$; $k = 1, \dots, k_{jl}$ und um eine daran geknüpfte, dem gewöhnlichen Cauchyschen Problem analoge Anfangswertaufgabe. Die Retardierungen Δ_{jk}^l (l ist hier ein Index) sind nichtnegativ vorgegeben. Die Anfangswerte sind durch weitere gegebene Funktionen $\varphi_{jk}^l(x)$ ($-\infty < x \leq A$) bestimmt, wobei A ein Anfangswert des Argumentes x ist, von dem ab die Lösungsfunktionen gesucht werden. Dabei wird gefordert, daß diese und ihre Ableitungen für alle Werte ihres Argumentes $x - \Delta_{jk}^l(x)$, die $\leq A$ ausfallen, die Werte $y_j^{(l)}(x - \Delta_{jk}^l(x)) = \varphi_{jk}^l(x - \Delta_{jk}^l(x))$ annehmen. Es werden die Ergebnisse in bezug darauf angegeben, welchen Voraussetzungen man die Funktionen f_i , Δ_{jk}^l und φ_{jk}^l zu unterwerfen hat, damit der Existenzsatz und der Eindeutigkeitssatz der Lösung gesichert ist, und welcher Art die Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen und den rechten Seiten des Gleichungssystems ist. Im 2. Teil werden speziell für die einfachen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung dieser Art vom Typus $y'(x) \pm M(x)y(x - \Delta(x)) = 0$, $y'' + M(x)y(x - \Delta(x)) = 0$ ($M(x) \geq 0$, $\Delta(x) \geq 0$, $A \leq x < \infty$, $-\infty < A < \infty$) mit den gegebenen Funktionen $M(x)$, $\Delta(x)$ und $\varphi(x)$ (letztere als Anfangswertfunktion) die Untersuchungsergebnisse über den Verlauf der Lösungsfunktion (besonders auch für $x \rightarrow \infty$) und die dabei auftretenden Möglichkeiten angegeben (Wachstums- bzw. Abklingungsverhältnisse, Menge der Nullstellen und ihre Verteilung, Abschätzungen im Unendlichen, Auftreten von Schwingungen und ihre gestaltlichen Verhältnisse).

E. Svenson.

Nordon, Jean: Nouveaux cas d'intégrabilité par quadrature d'une équation différentielle remarquable du premier ordre. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1181—1182 (1952).

Continuando una sua precedente ricerca (questo Zbl. 42, 102), l'A. determina certe funzioni $f(x)$ tali che l'equazione $dy/dx = \sqrt{f(x) - y^2}$ sia integrabile per quadrature.

L. Giuliano.

Thomas, J. M.: Equations equivalent to a linear differential equation. Proc. Amer. math. Soc. 3, 899—903 (1952).

L'A. étudie la question d'exprimer l'intégrale générale d'une équation non-linéaire au moyen des intégrals de certaines équations linéaires (exemple: équations de Jean et Jacob Bernoulli). L'A. part de l'équation de M. Pinney, $y'' + p(x)y + C y^{-3} = 0$, C constant, dont l'intégrale générale est $y = (u^2 - C v^2 W^{-2})^{1/2}$, u et v désignant les solutions fondamentales de $y'' + p(x)y = 0$, convenablement choisies, W étant leur Wronskien. L'A. pose le problème général et donne la solution pour une équation linéaire du premier ordre et pour les équations homogènes du second ordre, dont les intégrals représentent une fonction d'une seule solution, ainsi que pour les équations homogènes du second ordre admettant l'intégrale à deux solutions. En fin, l'A. démontre que l'équation $y'' - (\log \omega)' y' + k q y = (1 - l) y^{-1} y'^2 + c w^2 y^{1-4l}$, $kl = 1$, c et k désignant des constantes, quant à ω et q étant des fonctions de la variable indépendante x , admet les solutions $y^2 = u^k v^k$, $c \leq 0$; $y = u^k$, $c = 0$, u et v vérifiant l'équation linéaire homogène $u'' - (\log w)' u' + q u = 0$.

N. Saltykov.

Levi, Beppo: Über die Lösung von inhomogenen linearen Differentialgleichungen. Math. Notae 12/13, 1—18 (1952) [Spanisch].

Die Methode der Variation der Konstanten bei linearen gewöhnlichen Diffe-

rentialgleichungen mit variablen Koeffizienten $a_0(x)y^{(n)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ wird ersetzt durch folgenden Prozeß: Wenn $u_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung sind, so wird $y = \sum_{i=1}^n u_i(x) \int_{x_i}^x U_i(t) f(t) dt$ gesetzt. Dies ist eine Lösung (bei variablen x_i die allgemeine), wenn die U_i die Bedingungen erfüllen: $\sum_{i=1}^n u_i^{(h)}(x) U_i(x) = 0$ für

$h = 0, 1, \dots, n-2$; $\sum_{i=1}^n u_i^{(n-1)}(x) U_i(x) = \frac{1}{a_0(x)}$. Dieses System unterscheidet sich nicht wesentlich von dem System zur Bestimmung der Ableitungen der variierten Konstanten. — Für $x_1 = \dots = x_n = x_0$ erhält man die Cauchysche Form für diejenige Lösung, die mit ihren $n-1$ ersten Ableitungen in x_0 verschwindet.

G. Doetsch.

Bückner, Hans: A formula for an integral occurring in the theory of linear servomechanisms and control-systems. Quart. appl. Math. 10, 205—213 (1952).

Es sei $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^{n-\nu}$ ein Hurwitzsches Polynom n -ten Grades mit reellen Koeffizienten a_ν ; $a_0 \neq 0$; $n \geq 1$, ganz; ferner sei $p = d/dt$. Unter diesen Voraussetzungen strebt jede Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung $f_n(p)y = 0$ samt ihren Ableitungen $p^k y$ nach Null

für $t \rightarrow \infty$ und $Y = \int_0^\infty y(t) dt$ existiert. Nachdem Hazebroek und van der Waerden

[Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 72, 309—315 (1950)] bei der Bestimmung des Minimums dieses Integrals Y als eine symmetrische Funktion der Nullstellen des Polynoms f_n bei speziell gewählten Anfangswerten $p^k y(0) = q_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) ausdrückten, stellt sich Verf. die Aufgabe, Y als Linearform der Quadrate der q_k darzustellen, wobei in diese Darstellung nur noch die Koeffizienten von f_n eingehen sollen. Hierzu werden zwei Reduktionsverfahren — eines davon ist einem Algorithmus von I. Schur [Z. angew. Math. Mech. 1, 307—311 (1921)] nachgebildet — mitgeteilt, die erlauben, von f_n auf ein Hurwitzsches Polynom f_{n-1} vom Grade $n-1$ herunterzusteigen. Als Ergebnis der wiederholten Reduktion erhält Verf. für Y den Ausdruck (*)

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (f_k^*(y_0))^2$ mit $f_{k-1}^*(y) = f_{k-1}(p)y$ und Konstanten $c_k > 0$, die aus $f_{k+1}(x) - f_{k-1}(x) = c_{k+1} x f_k(x)$ zu bestimmen und durch die Hurwitzschen Koeffizientendeterminanten D_k ausdrückbar sind. Werden noch die Spaltenvektoren $\vec{a}_{ij} = \{a_{i-2j+2}, a_{i-2j+4}, \dots, a_i\}$ (mit $a_k = 0$ für $k > n$ und für $k < 0$) in (*) eingeführt, dann lautet das Ergebnis:

$$2Y = a_0 a_1^{-1} q_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} D_{k-1}^{-1} D_{k+1}^{-1} \begin{vmatrix} q_k & -q_{k-1} \cdots (-1)^k q_0 \\ a_{2k-1,k} & a_{2k-2,k} \cdots a_{k-1,k} \end{vmatrix}^2$$

und speziell für $q_0 = 1, q_2 = \dots = q_n = 0$:

$$2Y = \sum_{k=1}^n c_k = a_{n-1} a_n^{-1} + D_n^{-1} |a_{2n-3,n-1} a_{2n-4,n-1} \cdots a_{n-1,n-2,n-1}|.$$

Den Abschluß bilden zwei Beispiele: 1. Es sei $a_0 = a_n = 1$; die übrigen a_ν sollen so bestimmt werden, daß Y ein Minimum wird, also $\sum_{c_1 \cdots c_n=1} c_k = \min$. Dieses ist $\frac{n}{2}$ für $c_1 = \dots = c_n = 1$,

und das zugehörige f_n hat die Gestalt $\sum_{\nu} \left\{ \binom{n-\nu}{\nu} x^{n-2\nu} + \binom{n-\nu}{\nu-1} x^{n-2\nu+1} \right\}$. 2. Das zweite

Beispiel ist aus der Theorie der Servomechanismen gewählt und nur von speziellem Interesse.

H. Bilharz.

Makai, E.: On a monotonic property of certain Sturm-Liouville functions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 165—172 (1952).

The following theorem of Sturm's type is proved. If $f(x)$ is continuous and decreases monotonously on the interval $x_0 < x < X_0$ (X_0 finite or infinite), and $y(x)$ is a solution of the differential equation $y'' + f(x)y = 0$, with three consecutive zeros x_1, x_2, x_3 , then the inequality holds (1) $|y(x_2 - u)| < |y(x_2 + u)|$, ($0 < u \leq x_2 - x_1$). From (1) follows Sonin's theorem on the monotony of the

maximums of $|y(x)|$ and the inequality $\int_{x_1}^{x_2} |y|^p dx < \int_{x_2}^{x_3} |y|^p dx$, ($p \geq 0$). The

last inequality is then applied to Bessel functions of index $|\nu| > 1/2$, to orthogonal functions of Hermite and to Legendre polynomials. *J. Szarski.*

Putnam, C. R.: On the unboundedness of the essential spectrum. Amer. J. Math. 74, 578—586 (1952).

The following eigen-value problem is studied: $x'' + (\lambda - f)x = 0$, where f is realvalued and continuous on $0 \leq t < \infty$, with Sturm-Liouville boundary condition at $x = 0$. It is asked under what general condition the set of cluster points S' of the spectrum is unbounded when it is not empty. It turns out that it is a sufficient condition that f be bounded from below and the following asymptotic estimate of the gaps in S' are given: $m(\lambda) = O(\lambda^{1/2})$ where $m(\lambda) = \min_{\mu \in S'} |\lambda - \mu|$.

Further results are also obtained.

G. Reuter.

Dorodnicyn, A. A.: Asymptotische Verteilungsgesetze der Eigenwerte für gewisse singuläre Formen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 6 (52), 3—96 (1952) [Russisch].

Für homogene Randwertaufgaben der Differentialgleichungen (I) $y'' + [\lambda^2 r(x) + q(x)]y = 0$ und (II) $x y'' + p(x)y' + [\lambda^2 r(x) + q(x)]y = 0$ werden unter der Annahme, daß $r(x)$ eine oder mehrere Nullstellen besitzt, asymptotische Darstellungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen gegeben, die für das gesamte Intervall der Randwertaufgaben gelten. Sie werden gewonnen durch Vergleich mit einfacheren Differentialgleichungen. — Ausführlich wird behandelt (I) unter den Annahmen $r(x) = x r_1(x)$ mit Randbedingungen für $x = 0$ und $x = l$ oder für $x = -l_1$ und $x = l$, $r(x) = x(l-x)r_1(x)$ mit Randbedingungen für $x = 0$ und $x = l$, $r(x) = x^2 r_1(x)$ mit Randbedingungen für $x = 0$ und $x = l$; $r_1(x)$ genügt den Bedingungen $0 < r_1(x) < M$. Bis zu numerischen Resultaten durchgerechnet werden Randwertaufgaben für die Differentialgleichungen $y'' + \lambda^2 x(1+x)^2 y = 0$, $d^2 y/dt^2 + (\lambda^2 + h^2 \cos 2t)y = 0$ (Mathieu), $\frac{d}{d\mu} \left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2} \cdot \frac{d\zeta}{d\mu} \right) + \beta^2 \zeta = 0$ (Thomson). (II) wird nach der gleichen Methode mit Randbedingungen an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ unter den Annahmen r, p, q beschränkt, $r > 0$ behandelt. — Trotz des großen Umfangs der Arbeit konnten gerade die allgemeinen Fälle nur „flüchtiger“ wiedergegeben werden.

Adam Schmidt.

Levitan, B. M.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion einer selbstadjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 325—352 (1952) [Russisch].

Ziel der Arbeit ist es, für die Spektralfunktion einer selbstadjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - q(x)y + \lambda y = 0$ asymptotische Formeln für das Verhalten im Unendlichen zu gewinnen mit Abschätzung des Restes, die genauer sind als die früher schon bekannten vom Verf. selbst und von Marčenko gefundenen (dies. Zbl. 40, 343). $q(x)$ wird reell im Intervall $(0, b)$ ($0 \leq b \leq \infty$) und summierbar in $[0, b']$ ($b' < b$) vorausgesetzt. Die Randbedingungen für die Lösung $\varphi(x, \lambda)$ lauten: $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Die Spektralfunktion $\varrho(\lambda)$ ist eine monotone, in jedem endlichen Intervall beschränkte Funktion, für die die Parsevalsche Gleichung $\int_0^b f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(\lambda) d\varrho(\lambda)$, $E(\lambda) = \lim_{b' \rightarrow b} \int_0^{b'} f(x) \varphi(x, \lambda) dx$, für jede beliebige Funktion $f(x) \in L_2(0, b)$ besteht. Falls man für $\lambda > 0$ $\lambda = \mu^2$, $\varrho(\lambda) = \sigma(\mu)$ setzt und $\sigma(\mu)$ als ungerade Funktion für negative Werte von μ fortsetzt, so lauten die aufgestellten asymptotischen Abschätzungen ($\mu \rightarrow \infty$):

$$\sigma(\mu + a) - \sigma(a) = \frac{2}{\pi} \mu + O(\ln \mu), \quad \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{1}{2} \left[\sigma(v + a) + \sigma(v - a) - \frac{2}{\pi} v \right] dv = O(1)$$

gültig gleichmäßig in a . Wenn aber ein negatives Spektrum fehlt und $h = 0$ ist, ferner bei $x \rightarrow 0$ $\int_0^x |q(s)| ds = O(x^\alpha)$ ($\alpha > 0$) besteht, so gilt $\sigma(\mu + a) - \sigma(a) = \frac{2}{\pi} \mu + O(1)$ ($\mu \rightarrow \infty$) ebenfalls gleichmäßig in a . — Um diese äußerlich so einfach erscheinenden asymptotischen Formeln zu beweisen, hat man recht weit auszuholen. Es bedarf einer weitgehenden Heranziehung der Theorie der Fourier-Integraltransformationen, desgleichen der Bochnertransformationen (diese wird auf Stieltjessche Integrale erweitert, wobei, wie gezeigt wird, die Grundeigenschaften der Transformation erhalten bleiben), um vermittelt vieler Rechnungen, Integralumformungen und Abschätzungen verschiedene Hilfssätze zu beweisen, die dann zu den gewünschten Abschätzungen führen. Die wesentliche Grundlage dabei ist ein Analogon zu dem Bernsteinschen Approximationssatz. Den Ausgangspunkt bildet die Untersuchung der Eigenschaften einer komplex-

wertigen Funktion $\sigma(\mu)$, die der Bedingung genügt: (1) $\sup_{-\infty < \mu < \infty} \bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\sigma(\mu)\} = M < \infty$,

$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\sigma(\mu)\}$ bedeutet die Schwankung der Funktion $\sigma(\mu)$ im Intervall $(\mu, \mu + 1)$, für die eine

Abschätzung bewiesen wird, die der Bohrschen Ungleichung der Theorie der Bochner-Integraltransformationen analog ist (Bohr, dies. Zbl. 11, 110). Sie tritt an die Stelle der in dieser Ungleichung auftretenden meßbaren beschränkten Funktion $f(\mu)$, und die Abschätzung für sie lautet $|K + \sigma(\mu)| \leq CM/A$, wobei K so gewählt ist, daß für die Funktion $K + \sigma(\mu)$ die Bochner-Transformation im Intervall $(-A, A)$ linear ausfällt (C bedeutet eine Konstante). Als wichtiges Hilfsmittel wird eine mit Hilfe von $\sigma(\mu)$ konstruierte Hilfsfunktion

$$\varrho_n(\mu) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 n a}{n^3 a^4} d\sigma(\mu + a), \quad n = 1, 2, \dots, \text{ eingeführt, deren Fourier-Transformierte}$$

außerhalb des Intervalles $(-4n, 4n)$ verschwindet und für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\mu \varrho_n(v) dv = \sigma(\mu)$

$-\frac{1}{2}[\sigma(+0) - \sigma(-0)]$ gilt. Der Reihe nach werden dann als Hauptetappen folgende Abschätzungen für die Spektralfunktion $\varrho(\lambda) = \sigma(\mu)$ bewiesen: a) $|\sigma(a+1) - \sigma(a)| < C$, angegeben von Marčenko [s. a. a. O.], mit einer von a unabhängigen Konstanten C , so daß also die Spektralfunktion $\sigma(\mu)$ die Eigenschaft (1) tatsächlich besitzt; b) das Analogon zum Bernsteinschen Satz (hier der Kürze halber in spezialisierter Form angegeben); kann man für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\sigma_\varepsilon(\mu)$ angeben, für welche die Bochner-Stieltjes-sche Integraltransformation im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ linear ausfällt und die der Bedingung

(2) $\sup_{-\infty < \mu < \infty} \bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\sigma(\mu) - \sigma_\varepsilon(\mu)\} < K\varepsilon$ genügt, in der die Konstante $K > 0$ von ε unabhängig ist, so gilt $|\sigma(\mu+a) - \sigma(a)| \leq A + B \ln |\mu|$, wo A und B von a und μ unabhängig sind; c) bei den-

selben Voraussetzungen besteht: $\left| \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{1}{2} \{\sigma(a+v) - \sigma(a-v)\} dv \right| \leq K$; d) für die Hilfs-

$$\text{funktion gilt } \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \varepsilon \mu}{\varepsilon^3 \mu^4} d\left\{\sigma(\mu+a) - \frac{2}{\pi}(\mu+a)\right\} = O(\varepsilon h) + O\left(\varepsilon \int_0^{2\varepsilon} |q(s)| ds\right) + O(\varepsilon)$$

gleichmäßig in a . Diese Eigenschaft der Hilfsfunktion wird gebraucht, um aus ihr eine weitere Hilfsfunktion (entsprechend $\sigma_\varepsilon(\mu)$ in (2)) zu konstruieren, die die Voraussetzung (2) erfüllt, so daß auf die Funktion $\sigma(\mu) - 2\mu/\pi$ die Abschätzungen b) und c) angewandt werden können, woraus sich dann die beiden ersten der zu beweisenden asymptotischen Formeln ergeben. Wenn ein negatives Spektrum fehlt und $h = 0$ ist, so vereinfacht sich die rechte Seite der Gleichung in d)

$$\text{zu } O\left(\varepsilon \int_0^{2\varepsilon} |q(s)| ds\right). \text{ Nimmt man dann noch zusätzlich an, daß } \int_0^x |q(s)| ds = O(x^\alpha) \ (\alpha > 0)$$

ist, so folgt in analoger Art auch noch die letzte der gesuchten Formeln. Am Schluß wird noch kurz der Fall $h = \infty$ gestreift, wo sich gleichartige Resultate ergeben, wenn man als Anfangsbedingungen für $\varphi(x, \lambda)$ festsetzt: $\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = \sqrt{\lambda}$.

E. Svenson.

Marčenko, V. A.: Einige Fragen der Theorie der homogenen linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. I, II. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 1, 327—420 (1952), 2, 4—82 (1953) [Russisch].

Let $L = -(d^2/dx^2) + q(x)$ be a Sturm-Liouville operator defined e.g. in an interval $|x| < a$, with locally summable real q . The method of successive approximations shows that there

exist kernels A and B not depending on λ such that $\omega_0(x) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_{-|x|}^{+|x|} A(x, y) \cos \sqrt{\lambda} y dy$

and $\omega_\infty(x) = \int_{-|x|}^{+|x|} B(x, y) \cos \sqrt{\lambda} y dy$ form a basis of the solutions of $(L - \lambda)u = 0$, satisfying the real boundary condition (h) : $u'(0) + hu(0) = 0$, with $h = 0$ and ∞ respectively.

More generally, it is shown that there exists a transformation $W = W(L_2, L_1, h_2, h_1)$ given by $Wf(x) = f(x) + \int_{-|x|}^{+|x|} K(x, t) f(t) dt$ which transforms a solution of $(L_1 - \lambda)u = 0$ satisfying

(h_1) to a solution of $(L_2 - \lambda)u = 0$ satisfying (h_2) , L_j and (h_j) being arbitrary except for the condition that if $h_1 = \infty$, then $h_2 = \infty$ and conversely. An analogous result is true for the interval $0 \leq x < a$. The equality $L_1 = W L_2 W^{-1}$ holds, the graph of L_j being all pairs $\{f, L_j f\}$ where both elements are integrable; if the interval is $0 \leq x < a$, f should also satisfy (h_j) . —

Operators of the type W are applied to various inverse spectral problems associated with an interval $0 \leq x < a$. Let q_j be a solution of $(L_j - \lambda) q_j = 0$ satisfying (h_j) . Then $F_j(\lambda) = \int_0^a q_j(x, \lambda) f_j(x) dx$ defines a generalized Fourier transform of f_j [H. Weyl, Math. Ann. **68**, 220—269 (1910)] and there exists a non-decreasing spectral function $\varrho_j(\lambda)$ such that Parseval's formula $\int_{-\infty}^{+\infty} F_j^2(\lambda) d\varrho_j(\lambda) = \int_0^a f_j^2(x) dx$ holds. It is shown that if ϱ_1 and ϱ_2 are proportional, then $L_1 = L_2$ and $h_1 = h_2$. [Using operators of the type W , the actual construction of the operator L and the boundary condition (h) from the spectral function ϱ has been carried out independently by Gel'fand and Levitan (this Zbl. **44**, 93).] It is shown that any spectral function ϱ has the form (A) $2\pi^{-1} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$, $(h \neq \infty)$, and $2(3\pi)^{-1} \lambda^{3/2} + o(\lambda^{3/2})$, $(h = \infty)$ for large positive λ . In case L_1 and L_2 have discrete spectra which coincide for two pairs (h_1^j) , (h_2^j) of boundary conditions for L_1 and L_2 , (h_1^j) and (h_2^j) being different and L_1 and L_2 having the same boundary condition at $x = a$, then L_1 and L_2 coincide [cf. Borg, Acta math. **78**, 1—96 (1946)].

If $\int_0^a (1+x) |q_j| dx < \infty$, L_1 and L_2 have the same boundary condition at 0, their spectral functions have the same jumps at the same places and their asymptotic phases coincide, then $L_1 = L_2$ [cf. N. Levinson, Bull. Amer. math. Soc. **55**, 517 (1949)]. Corresponding to these two uniqueness theorems, the construction of L from two spectra or the discrete spectrum and the asymptotic phase respectively, is carried out in a way similar to that of Gel'fand and Levitan [for the second problem see also Jost and Kohn, Danske Vid. Selsk., Mat-fys. Medd. **27**, Nr. 9 (1953)]. — The second part of the paper deals with generalized displacement operators first studied by Delsarte (this Zbl. **19**, 121). There are two kinds defined by $R_x^\nu f = W_1 W_2 S_{x^\nu} W_1^{-1} f$ and $T_x^\nu f = W_1 W_2 S_{x^\nu} W_1^{-1} f$ respectively. Here $S_x^\nu f = f(x-y)$ and $S_x^\nu f = (f(x+y) + f(x-y))/2$ and $W_1 = W(L_0, L_1, h_0, h_1)$, $W_2 = W(L_0, L_2, h_0, h_2)$, $(L_0 = -(d^2/dx^2))$. The function $u(x, y, f) = T_x^\nu f$ satisfies the differential equation $L_1^\nu u = L_2^\nu u$ and the initial conditions $u(x, 0) = f(x)$, $u'_\nu(x, 0) = (h_2 - h_0)f(x)$ and thus T_x^ν is identical with the operator considered by Delsarte l. c. Necessary and sufficient conditions for the convergence of the associated Taylor series are given. For displacement operators of the first kind the analogue of Bochner's theorem on positive definite functions is proved. In case of the interval $x \geq 0$, the kernels of the operators $W(L_0, L, 0, h)$ and

$W(L_0, L, \infty, \infty)$ and their inverses are studied in detail when (B) $\int_0^\infty (1+x^2) |q| dx < \infty$, the results generalizing those of Povzner (this Zbl. **39**, 317). In the definition of T_x^ν let q_1 and q_2 be even and put $h_0 = h_1 = h_2$. A (L_1, L_2) -almost periodic function f is then defined by the property that the functions $T_x^\nu f$ for varying y constitute a compact set with respect to uniform convergence on the entire real line [cf. Delsarte, Acta math. **69**, 259—317 (1939)]. It is assumed that both q_1 and q_2 satisfy (B). Let A_0 be the set of values of λ for which the solution $\omega_0(\lambda, x)$ of $(L_1 - \lambda) \omega_0 = 0$ is (L_1, L_2) -almost periodic. Completing results of Levitan (this Zbl. **33**, 123, 476) the author proves that an even f is (L_1, L_2) -almost periodic if and only if to every $\varepsilon > 0$ there exists a $\sigma(t) = \sum a_k \omega_0(\lambda_k, t)$, $(\lambda_k \in A_0)$, such that $\sup_{x, y} |T_x^\nu(f - \sigma)| < \varepsilon$. L. Gårding.

Levitan, B. M.: Bemerkung zu einem Satz von V. A. Marčenko. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. **1**, 421—422 (1952) [Russisch].

A simple proof of the formula (A) of the preceding review, based on a special Tauberian theorem of N. Wiener (The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933, p. 138). L. Gårding.

Krejn, M. G.: Über den Unbestimmtheitsfall des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems im Intervall $(0, \infty)$. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 293—324 (1952) [Russisch].

Im Unbestimmtheitsfalle [vgl. H. Weyl, Math. Ann. **68**, 220 (1910)] besitzt das Randwertproblem:

(1) $y'' + q(x)y + \lambda \varrho(x)y = 0$, $0 \leq x < \infty$, $W(y, \varphi)|_{x=0} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} W(y, \psi) = 0$, $y(x) \in L_\varrho^{(2)}$,

$[\varphi, \psi]$ Lösungen von (1), $W =$ Wronskische Determinante] ein diskretes, reelles Spektrum $\{\lambda_j\}$ von Eigenwerten, die sich als Eigenwerte einer symmetrischen Integralgleichung des vom Verf. an anderer Stelle (dies. Zbl. **40**, 202) untersuchten Typus ergeben. Über die Fredholmsche Determinante $D(\lambda)$ dieser Integralgleichung wird bewiesen: (1) $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda|^{-1} \log |D(\lambda)| = 0$. (2) $1/D(\lambda) =$

$1 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j D'(\lambda_j) (\lambda - \lambda_j)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 |D'(\lambda_j)|} < \infty \right). \quad (3) \quad \text{Wenn } \sum_{\lambda_j < 0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} < \infty \text{ ist, so gilt:}$

$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} = \int_0^{\infty} \sqrt{\varrho} dx < \infty. \quad (4) \quad \text{Wenn } \int_0^{\infty} \sqrt{\varrho} dx = \infty \text{ ist, so folgt: } \sum_{\lambda_j < 0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} = \infty$

und $\lim_{r \rightarrow \infty} n_+(r)/\sqrt{r} = \infty$. [Hierbei wird mit $n_+(r)$ die Anzahl der λ_j mit $0 < \lambda_j \leq r$ bezeichnet.] —

Die Beweise dieser Sätze beruhen auf dem folgenden Ergebnis, das im Unbestimmtheitsfalle gilt: $\varphi(x; \lambda)$ bzw. $\psi(x; \lambda)$ seien die durch die Anfangsbedingungen $\varphi(0; \lambda) = 1, \varphi'(0; \lambda) = 0; \psi(0; \lambda) = 0, \psi'(0; \lambda) = 1$ bestimmten Lösungen von (1). Die Funktionen:

$$D_0(\lambda) = -\lambda \int_0^{\infty} \varphi(s; \lambda) \varphi(s; 0) ds, D_1(\lambda) = 1 + \lambda \int_0^{\infty} \varphi(s; \lambda) \psi(s; 0) ds, E_0(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^{\infty} \psi(s; \lambda) \varphi(s; 0) ds,$$

$$E_1(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} \psi(s; \lambda) \psi(s; 0) ds \quad \text{sind ganz analytisch in } \lambda, \text{ und es gelten: (a) } E_0(\lambda) D_1(\lambda) -$$

$$E_1(\lambda) D_0(\lambda) = 1. \quad (b) \text{ Ist } w_t(\lambda) = (E_0(\lambda) t + E_1(\lambda)) / (D_0(\lambda) t + D_1(\lambda)), \text{ so gilt für alle reellen } t:$$

Im $w_t(\lambda)/\text{Im}(\lambda) > 0$ ($\text{Im}(\lambda) > 0$). Verf. nennt eine Matrix $\begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ D_0 & D_1 \end{pmatrix}$ (E_0, E_1, D_0, D_1 ganz analytisch) *speziell*, wenn (a) und (b) gelten. Er untersucht allgemein die Eigenschaften spezieller Matrizen und findet z. B. als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine ganze reelle Funktion $F(\lambda)$ Element einer speziellen Matrix ist, die Existenz einer absolut konvergenten

$$\text{Entwicklung: } F^{-1}(\lambda) = \frac{c-1}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{F'(\alpha_j) \alpha_j (\lambda - \alpha_j)}, \alpha_j \text{ reell. Aus den eingehenden}$$

Untersuchungen über spezielle Matrizen fließen die erwähnten Sätze über die Fredholmsche Determinante $D(\lambda)$. W. Thimm.

Najmark, M. A.: Über das Spektrum nicht selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 41—44 (1952) [Russisch].

Untersucht wird das Spektrum des linearen Operators $L_\theta(y) = -y'' + p(x)y, 0 \leq x < \infty$, im Hilbertschen Raum $L^2(0, \infty)$ mit der Randbedingung $y'(0) - \theta y(0) = 0$. Dabei ist $p(x)$ summierbar in jedem endlichen Intervall $[0, a], a > 0$, vorausgesetzt. Von $y(x)$ wird verlangt, daß es mit seiner Ableitung im gleichen Intervall absolut stetig sein soll und zusammen mit $L_\theta(y)$ dem Raum $L^2(0, \infty)$ angehört. — Dieser Operator wurde wiederholt betrachtet, zuerst von Weyl [Math. Ann. 68, 220—269 (1910)], jedoch für reelle Funktionen $p(x)$ und reelle Werte der Konstanten θ . Hier werden beide komplexwertig vorausgesetzt, dann ist er nicht selbstadjungiert. Es werden ohne Beweise einige Resultate über die Art und Lage des Spektrums des Operators in der komplexen Zahlenebene angegeben unter verschiedenen Voraussetzungen über das Verhalten der Funktion $p(x)$, falls $x \rightarrow \infty$ strebt. Dabei erweist sich stets die reelle Achse als besonders ausgezeichnet. Je nach diesen Voraussetzungen entstehen auf ihr diskrete oder stetige Spektren, hingegen ist außerhalb von ihr in allen untersuchten Fällen das Spektrum diskret. Es wird angegeben, daß diese Ergebnisse gewonnen wurden durch Aufstellung von asymptotischen Formeln für die Lösung der Differentialgleichung $L_\theta y = \lambda y$ bei $x \rightarrow \infty$, die für die einzelnen Fälle angegeben werden, und durch die Betrachtung der Resolvente $(L_\theta - \lambda \cdot 1)^{-1}$. Diese ist stets ein Integraloperator, dessen Kern $K(x, y, \lambda)$ für Werte von λ , die nicht dem Spek-

trum angehören, den Bedingungen genügt: $\int_0^{\infty} |K(x, y, \lambda)|^2 dx < \infty, \int_0^{\infty} |K(x, y, \lambda)|^2 dy < \infty$.

E. Svenson.

Štokalo, I. Z.: Über die Gestalt der Lösungen gewisser Klassen linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Ukrain. mat. Žurn. 4, 36—44 (1952) [Russisch].

The purpose of this paper is to extend certain operational formulas to the case of equations with variable coefficients. It was previously proved by the author that if $A(t)$ is a variable matrix satisfying $\text{Norm } A(t) \leq N$, there is an $L(N)$ such that if $|\text{Re}(p)| < L$ the matrix equation $\dot{x} - A(t) \cdot x = c \cdot e^{pt}$ admits a solution $x = \omega(t, p) \cdot e^{pt}$, where ω is bounded and depends analytically on p . Here the two following theorems are proved: 1. the matrix equation $\dot{x} - A(t) \cdot x = 0$ admits

a solution $x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \cdot \omega(t, p) dp$, satisfying $x(t) = 0$ for $t < 0, x(0+) = E$;

2. the matrix equation $\dot{x} - A(t) \cdot x = F(t)$, where F satisfies the assumptions of Dirichlet and is such that $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot F(t) dt = \psi(p)$ is absolutely convergent, has a solution $x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \cdot \omega(t, p) \cdot \psi(p) dp$ satisfying the same initial conditions.

J. L. Massera.

● **Malkin, I. G.:** *Theorie der Stabilität der Bewegung.* Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 432 S. R. 17,—. [Russisch].

This book presents a fairly complete and up-to-date account of the theory of stability. The first three chapters include the simplest problems on stability (Chapter I: introduction, definitions, examples; Chapter II: the second method of Lyapunov, fundamental theorems and their application to autonomous systems, theorems of Četaev on instability; Chapter III: stability in the first (linear) approximation in the non-critical, autonomous cases); the methods, proofs of the theorems and examples are explained in great detail and in a clear style, so that they may be immediately useful for technicians with a moderate mathematical training. The last three chapters are devoted to deeper problems and require a greater effort from the part of the reader; a short account of their content follows. Chapter IV: simplest critical cases for autonomous systems (one characteristic root = 0, or two purely imaginary characteristic roots); in particular the problem of centers is examined. Chapter V: general theorems of Lyapunov and Četaev for non-autonomous systems; linear systems with periodic coefficients, Lyapunov's theorem on reducibility, methods for the approximate evaluation of the characteristic exponents, canonical systems and second order systems; stability in the first approximation for periodic systems in the general non-critical case and in the simplest critical cases. Chapter VI: general theorems of the author on stability under permanently acting disturbances; theorems of the author, Persidskij and the reviewer on the existence of Lyapunov's functions and their application to stability under permanently acting disturbances and to „practical“ stability on the boundary of a region of stability; general linear systems, characteristic numbers of Lyapunov, theorems of Lyapunov, Perron, Persidskij, Četaev, Poincaré and the author about the characteristic numbers, their stability and bounds for the same; general theorems on stability in the first approximation, applications of the characteristic numbers; critical cases, general theorems of the author and applications to the cases of two characteristic roots = 0, one root = 0 and two purely imaginary, and two pairs of purely imaginary roots, for autonomous and periodic systems. The general methods and theorems are illustrated by means of several interesting worked-out examples.

J. L. Massera.

Castro Brzezicki, A. de: *Investigaciones sobre no lineares Mecanik. I. Über die allgemeine Differentialgleichung der Relaxationsschwingungen.* Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 266—280 (1952) [Spanisch].

N. Levinson [Duke math. J. 9, 382—403 (1942)] proved that the equation $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = 0$ has a periodic solution, if f and g satisfy certain conditions. The aim of the present paper is to generalize these conditions, using essentially Levinson's method of proof. In the reviewer's opinion, the proofs can not be considered correct since the author overlooked certain possibilities about the shape of an integral curve that plays a key role.

M. M. Peixoto.

Castro Brzezicki, A. de: *Über die Differentialgleichungssysteme der nicht-linearen Mechanik.* Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 317—329 (1952) [Spanisch].

The author considers the system (*) $\dot{x} = y g(t) - \varphi(x, t)$, $\dot{y} = x g(t) + f(y, t)$ where the right hand side is periodic with respect to t . If certain additional conditions on g , f and φ are satisfied then it is claimed that (*) has at least one periodic solution. In the reviewer's opinion, the proof given presents several mistakes, two of them (concerning arcs $P_3 P_4$ and $P_4 P_5$) being related to incorrect majorations of $-\varphi(x, t)$.

M. M. Peixoto.

Aymerich, Giuseppe: *Oscillazioni forzate periodiche di sistemi non lineari a due gradi di libertà.* Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 165—177 (1952).

In un lavoro precedente (Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena), l'A. aveva, sotto una certa condizione restrittiva involgente i coefficienti costanti di autoinduzione L_{ij} e di capacità C_{ij} ,

dimostrato l'esistenza di una soluzione periodica per il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$(1) \quad \sum_{j=1}^2 L_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + g'_i(x_i) \frac{dx_i}{dt} + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{C_{ij}} x_j = e_i(t), \quad (i = 1, 2), \quad (\text{le } x_i \text{ sono le correnti}),$$

riguardanti un sistema di due circuiti elettrici non lineari accoppiati capacitivamente e induttivamente e con forze elettromotrici impresse periodiche, e nelle quali equazioni le $e_i(t)$ sono le derivate temporali delle f. e. m., funzioni periodiche date, di ugual periodo τ e le $g_i(x_i)/x_i$ sono le resistenze dotate di limiti finiti positivi al crescere del modulo delle correnti e a nessuna condizione di segno soggette per correnti deboli. Nell'attuale lavoro, l'A. ottiene una condizione assai meno restrittiva per l'esistenza di una soluzione periodica delle (1), anzi considera, più in generale, il sistema:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{dx_{ij}}{dt} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + f_i(x_1, x_2) = e_i(t), \quad (i = 1, 2),$$

dove, sulle funzioni $f_i(x_1, x_2)$ si fanno soltanto ipotesi di limitatezza delle derivate e di comportamento analogo a quello dei termini lineari in x_i figuranti, corrispondentemente, nelle (1) al tendere all'infinito del punto $P(x_1, x_2)$. Sulle funzioni g_1 e g_2 si fa l'ipotesi che esse si annullino nell'origine e che un vettore \vec{g} che le abbia come componenti goda delle proprietà $\vec{g} \times (P - O) > 0$ per mod $(P - O)$ sufficientemente grande, non escludendo la possibilità che $\vec{g} \times (P - O)$ sia negativo in prossimità dell'origine. Pensando le x come coordinate cartesiane ortogonali di un punto Q mobile in un piano Π , l'A. può considerare, in luogo delle (2), l'equazione differenziale vettoriale

$$(3) \quad \alpha d^2 Q/dt^2 + d\vec{g}(Q)/dt + \vec{f}(Q) = \vec{e}(t), \quad \text{con } \vec{g} = g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j}, \quad \vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j}, \quad \vec{e}(t) = \vec{e}(t + \tau) = e_1(t) \vec{i} + e_2(t) \vec{j}$$

e dove α è la matrice quadrata del secondo ordine simmetrica $||a_{rs}||$, per la quale si suppone che sia, per ogni vettore \vec{x} , $\alpha \vec{x} \times \vec{x} > 0$. Nell'ipotesi ulteriore che le g_1, g_2, f_1 ed f_2 abbiano derivate parziali prime limitate e che, inoltre, si abbia, uniformemente: $\lim_{Q \rightarrow \infty} [\text{mod}(Q - O)]^{-1} \vec{g}(Q) = 2\beta \vec{a}$,

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} [\text{mod}(Q - O)]^{-1} \vec{f}(Q) = 2\gamma \vec{a}, \quad (\vec{a} = \text{vers}(Q - O)), \quad \text{essendo } \beta \text{ e } \gamma \text{ due matrici simmetriche}$$

tali che, qualunque sia \vec{a} , risulti: $\beta \vec{a} \times \vec{a} > 0$, $\gamma \vec{a} \times \vec{a} > 0$; indicata, infine, con σ una omografia vettoriale costante qualsiasi e con σ' la sua coniugata e scelta σ in modo che sia $\sigma' \alpha \sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$,

se $\beta_1 = \sigma' \beta \sigma$, $\gamma_1 = \sigma' \gamma \sigma$, la condizione sotto la quale l'A. dimostra l'esistenza di una soluzione periodica delle (2) è la seguente: $\omega_1/\omega_2 > (\sqrt{b_{11} b_{22}} - \sqrt{B})^2/b_{12}^2$ dove con b_{ij} si intende l'elemento generico della matrice β , ed è $B = b_{11} b_{22} - b_{12}^2$ e dove ω_1 ed ω_2 sono le pulsazioni proprie assintotiche del sistema oscillante in questione. La dimostrazione è condotta basandosi su un metodo collegato con precedenti ricerche di Lefschetz [Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 29—32 (1943)] e di Graffi (questo Zbl. 43, 312). L'A. considera anche un caso meccanico, estensione di un problema già studiato da Stoker (Non linear vibrations, New York 1950, pp. 125—127).

A. Pignedoli.

Hinds, A. K. and W. M. Whyburn: A non-self-adjoint differential system of the second order. J. Elisha Mitchell Sci. Soc. 68, 32—43 (1952).

A study of the characteristic values and functions of the equations $y' = Ky$, $z' = -Hy$ subject to boundary conditions (i) $rz - sy = 0$, for $x = a$, (ii) $pz - qy$ takes the same value at $x = b$ as at $x = a$. K, H, p, q, r, s are given functions of x and a parameter.

W. W. Sawyer.

Laasonen, Pentti: Über die iterative Bestimmung von Eigenwerten simultaner Differentialgleichungen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 133, 14 S. (1952).

Mit Hilfe der Ergebnisse seiner in dies. Zbl. 48, 344 besprochenen Arbeit leitet Verf. die Sätze von Bliss [Trans. Amer. math. Soc. 28, 561—584 (1928) und dies. Zbl. 20, 32] über ein System von homogenen linearen Differentialgleichungen der Form (Matrizenschreibweise) $du(x)/dx = (F(x) + \lambda G(x))u(x)$ mit Randbedingungen $Au(a) + Bu(b) = 0$ (A und B quadratische Konstantenmatrizen) erneut ab. Bemerkungen zum iterativen Lösungsverfahren.

R. Iglisch.

Reeb, Georges: Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° 27, Nr. 9, 64 S. (1952).

This memoir seems to be important, firstly because of the systematic use of the machinery of differential algebra as developed by H. Cartan [Centre Belge Rech. math. Colloque Topologie, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 15–27 (1951)], and then because of the methodic viewpoint introduced in the interpretation of dynamic systems as topological entities. The calculus of differential algebra simplifies the proofs of many known facts in a very astonishing manner. The author considers first dynamical systems endowed with an integral invariant of E. Cartan („SDI“). A very simple form of the equations of the field is given in the case, and the relation with Finsler spaces is discussed (see G. Reeb, Quelques propriétés globales des géodésiques d'un espace de Finsler et des variétés minima d'un espace de Cartan. Colloques de Topologie, Strasbourg 1951) and it is shown that such a system does not admit a compact variety whose tangent space is always transversal to the field. It is then shown how the topological theory of obstacles may be used to study the existence of an SDI on a given manifold. — In the next chapter, an additional condition is imposed on the SDI, viz., that the infinitesimal transformations induced by the vectors tangent to the field form a Lie group, and that this group contains an element $T \neq 0$ operating trivially on the variety (SDF'I). A further restriction is that any trivial transformation be an rational integer multiple of T (SDFI). It is shown that any variety with SDF'I is a fibre bundle and that the absolute invariant of E. Cartan is a form on the base. The ring of invariant differential forms is isomorphic to the cohomology-ring of the variety. The absolute invariant and its exterior powers are not cohomologous to zero on the base space, for compact manifolds. These results have many applications in the determination of the cohomology-groups of varieties that may be endowed with a SDF'I or SDFI. — As an introduction to the study of finite perturbations of a dynamical system, the author considers H. Poincaré's method of the small parameter for an SDFI and shows that the singular points of the perturbed field may be determined by the methods of the calculus of variations in the large. The main result of this part is the generalization of Seifert's theorem on vector fields on 3-manifolds (this Zbl. 39, 400) to 4-manifolds with boundary. As an application of this theorem, it is shown how to establish the existence of at least one closed trajectory in dynamical systems with small perturbing forces. — In the next chapter, the methods of differential algebra are used in the study of the stability of the periodic solutions of differential equations of the type $X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$, in connection with recent research by N. Levinson. It is shown that the stability of these solution decreases if their number increases, and there exists a numerical relation describing this phenomenon. — In a last chapter, the author studies dynamical systems with a finite number of closed trajectories, and such that any trajectory that is near a closed one in any point rests near that closed trajectory. It is shown that any manifold with such a system possesses a canonical decomposition, and the exact sequence of cohomology applied to this decomposition gives very strong conditions for the Betti numbers of the variety, and the numbers of the different types of singularities. In the case of a homology-sphere, the author shows that there must exist singularities of every type with even index, and the number of closed trajectories is \geq half the dimension. The memoir contains also a very useful bibliography.

H. Guggenheimer.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie :

Dolbeault, P.: Formes différentielles méromorphes sur les variétés kählériennes compactes. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège du 9 au 12 juin 1952, 83—87 (1952).

In Erweiterung eines Artikels von A. Weil (dies. Zbl. 34, 358) werden die Bedingungen untersucht, unter denen Differentialformen zweiter und dritter Gattung mit vorgegebenen Singularitäten existieren. Die Resultate enthalten die von A. Weil (loc. cit.) und K. Kodaira (dies. Zbl. 41, 295). Es ist zu hoffen, daß von diesen wichtigen Ergebnissen bald ein ausführliches Exposé mit Beweisen erscheinen wird.

H. Guggenheimer.

Saltykow, M. N.: Problèmes d'intégration des équations aux différentielles totales. Bull. Acad. serbe Sci., Cl. Sci. math. natur., Sci. math. 5, Nr. 1, 89—100 (1952).

L'A. describe i procedimenti d'integrazione detti „di variazione delle costanti“, „di Mayer“ e „dei fattori integranti costanti“, per i sistemi completamente integrabili di equazioni ai differenziali totali lineari e a coefficienti costanti (questo Zbl. 35, 63). Per i sistemi completamente integrabili di equazioni ai differenziali

totali generali, tratta poi dei fattori integranti, determinando delle condizioni differenziali atte a caratterizzarli.

G. Cimmino.

- Mendes, Marcel: Sur un système d'équations aux différentielles totales généralisant les équations canoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1665—1667 (1952).
 Mendes, Marcel: Transformations canoniques générales. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 457—458 (1953).

In diesen beiden Noten werden frühere Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 44, 386) fortgesetzt. In der erstgenannten wird ein System totaler Differentialgleichungen betrachtet, das die kanonischen Gleichungen verallgemeinert, aber deren charakteristische Eigenschaften beibehält. Die Integralitätsbedingungen werden aufgestellt und angedeutet, daß die klassischen Ergebnisse von Poincaré und E. Cartan über die Variationsgleichungen, das Poissonsche Theorem und andere bekannte Resultate aus der Theorie der Integralinvarianten verallgemeinerungsfähig sind. — In der zweitgenannten Note wird von der Existenz eines vollständigen invarianten Integrals I für das kanonische System $dq_i/dt = \partial H(q, p, t)/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$ ausgegangen. Damit nun dieses System bei der Transformation $(q, p, t) \rightarrow (Q, P, T)$ in die Gestalt $dQ_i/dT = \partial H^*(Q, P, T)/\partial P_i$, $dP_i/dT = -\partial H^*/\partial Q_i$ übergeht, ist notwendig und hinreichend, daß ein konstantes λ existiert, derart, daß das dem zweiten System entsprechende invariante Integral I^* die Bedingung $I = \lambda I^*$ erfüllt. Aus dieser Gleichung zwischen den invarianten Integralen kann auf die Existenz eines totalen Differentials $dV(q, Q, T)$ geschlossen werden, und wenn bei der angegebenen Variablentransformation $t(Q, P, T) = \tau(q, Q, T)$ ist, folgt $\lambda P_i = \partial V/\partial Q_i - H \partial \tau/\partial Q_i$, $p_i = -\partial V/\partial q_i + H \partial \tau/\partial q_i$, $\lambda H^* = H \partial \tau/\partial T - \partial V/\partial T$. Daher ist $(q, p, t) \rightarrow (Q, P, T)$ dann und nur dann eine kanonische Transformation, wenn (bei konstantem T) $\sum_i (\lambda P_i \delta Q_i - p_i \delta q_i) + H \delta \tau$ ein exaktes Differential ist. Diese Überlegungen

werden schließlich noch auf ein vollständig integrierbares System totaler Differentialgleichungen

$$dq_i = \sum_k \frac{\partial H_k(q, p, t)}{\partial p_i} dt_k, \quad dp_i = - \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_i} dt_k \quad \text{ausgedehnt.} \quad H. \text{ Bihlharz.}$$

Gallissot, François: Transformations infinitésimales et intégration des équations différentielles de la mécanique. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1277—1278 (1952).

Présentation des équations de la dynamique et des intégrales premières à partir des opérateurs différentiels i, θ, d , utilisés en topologie algébrique, notamment par A. Weil et H. Cartan [Cartan, Centre Belge Rech. math., Colloque Topologie, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 15—27 (1951)].

P. Lelong.

Hölder, E.: Über den Aufbau eines erweiterten Greenschen Tensors kanonischer Differentialgleichungen aus assoziierten Lösungssystemen. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 115—121 (1952).

Verf. gibt die Lösungen eines zur Hamiltonschen Funktion

$$2H(t, x^i, y_i) = c^{ij}(t) y_i y_j + 2b_i^j(t) x^i y_j + a_{ij}(t) x^i x^j \quad (i, j = 1, \dots, n, \quad t^0 \leq t \leq t^1)$$

gehörigen positiv regulären kanonischen Systems unter einer selbstadjungierten Randbedingung, die aus zwei getrennten Gruppen von Anfangs- und Endbedingungen besteht, vermittels eines symmetrischen Greenschen Tensors im erweiterten Sinne, der eine Verallgemeinerung eines vom Verf. früher (dies. Zbl. 23, 136) angegebenen Begriffes darstellt. Mit Hilfe dieses Greenschen Tensors gelingt auch die Zurückführung der Randwertaufgabe für das nichtlineare kanonische System auf ein nichtlineares Integralgleichungssystem, das bei genügender Kleinheit der nichtlinearen Glieder durch sukzessive Approximationen aufgelöst werden kann.

M. J. De Schwarz.

Moisil, Gr. C.: Systèmes différentiels adjoints et formules de réciprocité. IV. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 39—49, russische und französ. Zusammenfassgn. 50, 50—51 (1952) [Rumänisch].

Etant donné un système d'équations aux dérivées partielles linéaires, à coefficients constants (1) $\sum_j P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_j = 0$, l'A. se propose de trouver les intégrales $I_i[[V_r]] =$

$\int_{V_r} \dots \int_{j_1, \dots, j_r} U_{ij_1 \dots j_r} dx^{j_1} \dots dx^{j_r}$, où les U sont de la forme $U_{ij_1 \dots j_r} = \sum_k U_{ij_1 \dots j_r k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_k$, nulles sur toute variété r -dimensionnelle fermée V_r , lorsque φ_i sont les intégrales du système (1). —

Si on cherche à résoudre ce problème dans le cas des intégrales curvilignes $I|[C]| = \int_C \sum_i U_i dx^i$

le système $\partial U_i / \partial x^i - \partial U_j / \partial x^j = 0$ doit être une conséquence différentielle linéaire de (1). On doit donc trouver les polynômes $U_{ij}(X_1, \dots, X_n)$, $W_{ijk}(X_1, \dots, X_n)$ tels que le système $X_i U_{jk}(X) - X_j U_{ik}(X) = \sum_h W_{ijh} P_{hk}$ soit satisfait. — Si l'on cherche à résoudre ce problème

pour les intégrales de surface $I|[S]| = \iint_S \sum_{ij} U_{ij} dx^i dx^j$, on doit trouver les polynômes

$U_{ijkl}(X_1, \dots, X_n)$ et $W_{ijkl}(X_1, \dots, X_n)$ tels que le système $X_l U_{ijk} + X_i U_{jlk} + X_j U_{ilk} = \sum_h W_{ijlh} P_{hk}$ soit satisfait. — L'A. donne les exemples suivants: Dans le § 3 il étudie le

système $\partial \varphi_1 / \partial x - \partial \varphi_2 / \partial y = 0$, $\partial \varphi_1 / \partial y + \partial \varphi_2 / \partial x = 0$. Dans le § 6, il étudie l'équation de Laplace; il montre qu'il n'y a pas d'intégrale curviligne non banale, nulle pour toutes les fonctions harmoniques à trois variables. Dans le § 7, il étudie les intégrales de surface, nulles pour toutes les fonctions harmoniques; la seule non banale est l'intégrale connue. Dans le § 8 il étudie les intégrales d'hypersurface et dans les §§ 9, 10 celle du système $\partial v / \partial z - \partial w / \partial y = 0$, $\partial w / \partial x - \partial u / \partial z = 0$, $\partial u / \partial y - \partial v / \partial x = 0$, $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$. Autoreferat.

Rasulov, M. L.: Untersuchung der Residuenmethode zur Lösung einiger gemischter Aufgaben für Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 509—528 (1952) [Russisch].

Ziel der Arbeit ist es, mittels einer Verallgemeinerung der Fourierschen Methode im Rahmen der Spektraltheorie linearer Operatoren Existenzsätze allgemeiner Randwertaufgaben für Differentialgleichungen zu beweisen, falls die Funktionen, die in den Randbedingungen auftreten, genügend glatt vorausgesetzt sind. Um die Art der behandelten Randwertaufgaben und die Ergebnisse zu charakterisieren, sei einer der beiden Hauptsätze angegeben, der zweite ist ihm ähnlich. Es seien die gegebenen Funktionen $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, und $f(x, t)$, $x \in [a, b]$, $t \in [0, T]$, n mal differenzierbar nach x , wobei alle Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung absolut stetig in x sein sollen und die Ableitungen n -ter Ordnung von beschränkter Schwankung. In der Integro-Differentialgleichung

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \psi_i(x) v_i(t, 0) + \int_0^t K(t, \tau, 0) f(x, \tau) d\tau + L \int_0^t K(t, \tau, 0) u(x, \tau) d\tau$$

bedeuten die Funktionen $v_i(t, \lambda)$ ($i = 1, \dots, m$) ein Fundamentalsystem der Lösungen der weiteren Differentialgleichung $Mv(t) - v(t) = 0$ mit dem Differentialoperator $Mv = \sum_{i=0}^n q_i(t) \frac{\partial^{m-i} v}{\partial t^{m-i}}$ ($q_0(t) \neq 0$), das durch die Forderung $\partial^j v_i / \partial t^j|_{t=0} = \delta_{i-1, j}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, festgelegt ist,

ferner ist $K(t, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^m \frac{v_i(t, \lambda) w_i(\tau, \lambda)}{q_0(\tau) w(\tau, \lambda)}$ mit der Vandermondeschen Determinante $w(\tau, \lambda)$ der

Funktionen $v_i(t, \lambda)$ und den algebraischen Komplementen $w_i(\tau, \lambda)$ zu den Elementen $d^m v_i / d\tau^{m-1}$ in ihr, und schließlich ist L noch ein weiterer gegebener Differentialoperator,

$Lu = \sum_{i=0}^n p_i(x) \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$ ($p_0(x) \neq 0$). Dann besitzt die Gleichung folgende der Anfangsbedingung $\partial^j u(x, t) / \partial t^j|_{t=0} = \psi_{j+1}(x)$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) genügende Lösung:

$$u(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{C_k} R_{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^m \psi_i(x) v_i(t, \lambda) + \int_0^t K(t, \tau, \lambda) f(x, \tau) d\tau \right\} d\lambda.$$

Hierbei ist $R_{\lambda} \Phi$ die Resolvente der Randwertaufgabe der Gleichung $Lu(x) - \lambda u(x) = \Phi(x)$ mit den linear unabhängigen Randbedingungen

$$L_i(u) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}} \Big|_{x=a} + \beta_{ij} \frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}} \Big|_{x=b} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(α_{ij} und β_{ij} sind Konstanten), d. i. die mit einer (vermittelst eines fundamentalen Lösungssystems der zugehörigen homogenen Gleichung hergestellten) Greenschen Funktion $G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$ gebildete Integralform der Lösung $\int_a^b G(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi) d\xi$, und die C_k ($k = 1, 2, \dots$)

sind geschlossene Integrationswege in der komplexen Zahlenebene, die jeweils nur einen Pol λ_k (der Vielfachheit κ_k) der Resolvente enthalten. Zur Gültigkeit des Satzes müssen die Indizes m und n den Bedingungen genügen: $m = 1$ oder 2 ; ist $m = 2$, so muß bei gleichen Vorzeichen von $q_0(t)$ und $p_0(x)$ $n \equiv 2 \pmod{4}$ und bei beliebigen Vorzeichen $n \equiv 0 \pmod{4}$ sein. Ferner muß die Resolvente die Eigenschaft haben, daß für jedes k $d^{\kappa_k} \Delta(\lambda) / d\lambda^{\kappa_k}$ in einer genügend kleinen

Umgebung von λ_k keine Wurzel hat, wo $A(\lambda)$ der in den Ausdruck der Greenschen Funktion eingehende Nenner ist. — Die Beweise gehen aus von einem Satz von Birkhoff über die Existenz eines Fundamentalsystems der Lösungen einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit Koeffizienten, die neben der Veränderlichen noch von einem Parameter abhängen und in Potenzreihen nach ihm entwickelbar sind [Trans. Amer. math. Soc. 9, 219—231 (1908)] und stützen sich auf eine Reihe von Sätzen, die Verf. z. T. schon in seiner Diss. gebracht hat (Baku 1948). Die meisten dieser Sätze sind im übrigen ziemlich speziell und kompliziert, schon die erschöpfende Formulierung erfordert einschließlich der Erklärung aller benutzten Bezeichnungen und Hilfsbegriffe mehr Raum als der hier angegebene Satz, so daß auf ihre Angabe verzichtet werden muß.

E. Svensson.

Owens, O. G.: Homogeneous Dirichlet problem for inhomogeneous ultrahyperbolic equation. Amer. J. Math. 74, 307—316 (1952).

Für die ultrahyperbolische Differentialgleichung $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{y_1 y_1} - u_{y_2 y_2} = f(x_1, x_2; y_1, y_2) \equiv f(x, y)$ wird Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der ersten Randwertaufgabe bewiesen für ein 4-dimensionales Gebiet folgender Art: Sei $G(x)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der x_1, x_2 -Ebene, ebenso $G(y)$ entsprechend in der y_1, y_2 -Ebene, so gilt der erwähnte Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Gebiet $G(x, y) = G(x) \times G(y)$, dem der Punkt $(x_1, x_2; y_1, y_2) \equiv (x, y)$ angehört, falls $x \in G(x)$ und $y \in G(y)$. In diesem Falle läßt sich nämlich eine Trennung der beiden Variablen-Paare durchführen. Demgemäß erfolgt die Durchführung des Beweises durch Entwicklung nach Eigenfunktionen der ersten Randwertaufgabe von $\varphi_{x_1 x_1} + \varphi_{x_2 x_2} + \lambda \varphi = 0$ für $G(x)$ und von $\psi_{y_1 y_1} + \psi_{y_2 y_2} + \mu \psi = 0$ für $G(y)$. Wesentliche Voraussetzung für die Existenz ist das Verschwinden von $f(x, y)$ auf dem Rand von $G(x, y)$ und die Richtigkeit von $0 < \varepsilon \leq |\lambda_i(G(x)) - \mu_k(G(y))|$, wobei die Zahl ε unabhängig davon ist, welchen Eigenwert aus jedem der beiden Spektren man auswählt. Es wird an einem Beispiel gezeigt, daß es wirklich Paare von Gebieten gibt, für die ein solches positives ε existiert.

K. Stellmacher.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On hyperbolic partial differential equations. Amer. J. Math. 74, 834—864 (1952).

Die Arbeit enthält Existenz- und Unitätssätze zu den folgenden Differentialgleichungen bzw. Systemen: 1. $z_{xy} = f(x, y, z, p, q)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$; 2. $\sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial z_k}{\partial x} = b_i$ ($i = 1, \dots, m$), $\sum_{k=1}^n a_{in} \frac{\partial z_k}{\partial y} = b_i$ ($i = m+1, \dots, n$); 3. $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, $F_s^2 - 4 F_r F_t = 0$; 4. Die Monge-Ampèresche Differentialgleichung im hyperbolischen Fall; 5. $z_x = z_y f(x, y, z) + g(x, y, z)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $f = (f_{ik})$, $g = (g_1, \dots, g_n)$. Es handelt sich um beträchtliche Verschärfungen bekannter Sätze [vgl. Lewy, Math. Ann. 98, 179—191 (1928); Friedrichs, dies. Zbl. 39, 106]. So genügt es, etwa im Fall 1 für f Stetigkeit und Lipschitzbedingungen hinsichtlich p und q vorauszusetzen, während auf die sonst üblichen Lipschitzbedingungen hinsichtlich z verzichtet wird. Im Fall 5 wird f stetig differenzierbar angenommen und ebenfalls auf die Lipschitzbedingungen für die Ableitungen von f verzichtet. Ähnliches gilt für die anderen Fälle. — Differentialgeometrische Anwendungen auf das Problem der Einbettung eines positiv definiten Linienelementes $ds^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2$ negativer Krümmung und seine Transformation in die Tschebyscheffsche Form. — Es ist bemerkenswert, daß die erwähnten Verschärfungen der Sätze die Verständlichkeit der Arbeit nicht beeinträchtigen.

Adam Schmidt.

Miles, John W.: On solutions to the wave equation in hyperbolic space. J. appl. Phys. 23, 1400 (1952).

Die zweidimensionale Wellengleichung $\Phi_{tt}/c^2 - \Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0$ läßt sich analog separieren wie die dreidimensionale Potentialgleichung $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$, z. B. in den „hyperbolischen Kugelkoordinaten“ $ct = r \cosh \xi$, $x = r \sinh \xi \cos \varphi$, $y = r \sinh \xi \sin \varphi$.

J. Meixner.

Diaz, J. B. and M. H. Martin: Riemann's method and the problem of Cauchy. II. The wave equation in n dimensions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 476—483 (1952).

Kürzlich wurde von M. H. Martin eine Modifikation der Riemannschen Methode zur Integration linearer hyperbolischer Diffgl. zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen angegeben, die sich direkt auf den einfachsten Spezialfall in drei Veränderlichen übertragen läßt (siehe dies. Zbl. 44, 98) derart, daß dabei die als Ersatz für die Riemannsche Funktion eingeführte „Resolvente“ auch für 3 unabhängige Veränderliche im Definitionsbereich stetig bleibt. — In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß sich diese Methode auch auf die einfachsten hyperbolischen Differentialgleichungen mit mehr unabhängigen Veränderlichen übertragen läßt. — Zu dem Zweck werden spezielle (charakteristische) Koordinaten eingeführt, die wesentlich abhängen von dem Punkt, in dem die Lösung bestimmt werden soll. — Wieder läßt sich eine im Definitionsgebiet stetige „Resolvente“ angeben in schöner Analogie zur Riemannschen Funktion. — Nachteilig dürfte sich die enge Verknüpfung mit dem benutzten Koordinatensystem auswirken, besonders bei Übertragung der Methode auf allgemeinere Differentialgleichungen. Durch die Auszeichnung einer gewissen zeitartigen Geraden erhält die vorliegende Methode starke Verwandtschaft mit der bekannten Integrationstheorie von Tedone. K. Stellmacher.

Gårding, Lars: Le problème de Goursat pour l'équation des ondes. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 255—258 (1952).

Das Goursatsche Problem verlangt, eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Delta u = u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = g(x)$ zu finden, die im Innern eines gewissen vorgegebenen Kegels K erklärt ist und auf dem Mantel M von K verschwindet. Dabei besitze K lauter zeitartige gerade von O auslaufende Mantellinien. Die Lösung ist im Innern K_i von K eindeutig bestimmt und existiert dort, falls die dritte Ableitung $\left(\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^3 g(x)$ in $K_i + M$ stetig differenzierbar ist und falls $g(x)$ an der Spitze von K genügend stark gegen Null geht. Zur Konstruktion wird zunächst eine „Greensche Formel“ mitgeteilt, die mit den M. Rieszschen Integrationsmethoden zu gewinnen ist und die Lösung $f(x)$ darstellt als lineares Funktional von $g(x)$, sowie von $f(x)$ auf S , aber auch von der Ableitung df/dv auf S in Richtung der Normalen von S . — Läßt man in dieser Formel den Punkt, in dem die Lösung gesucht wird, gegen S rücken, so ergibt sich eine Integro-Differential-Gleichung zur Bestimmung von df/dv auf S . — Sie läßt sich durch eine Neumannsche Reihe lösen, die sicher konvergiert, wenn $g(x)$ als ein Polynom bestimmter Form vorausgesetzt wird. Im allgemeinen Falle ist dann die Funktion $g(x)$ durch Polynome der erwähnten speziellen Form zu approximieren. Daß dadurch gleichzeitig die gesuchte Funktion $f(x)$ [bzw. zunächst df/dv auf S] approximiert wird, ergibt sich (mit Gedankengängen, verwandt denen von Friedrichs und Levy, dies. Zbl. 4, 350; Anm. d. Ref.) durch eine „Energieintegral“-Umformung. (Gleichzeitig auf diesem Wege auch die Eindeutigkeit der Lösung!) Die dargestellte Methode läßt sich auf eine beliebige Anzahl unabhängiger Veränderlicher sowie auf allgemeinere Formen der Anfangsfläche S verallgemeinern.

K. Stellmacher.

Yosida, Kôzaku: On Cauchy's problem in the large for wave equations. Proc. Japan Acad. 28, 396—403 (1952).

Definitionen: R der zusammenhängende Bereich des m -dimensionalen Riemannschen Raumes der Klasse C^∞ . ∂R der Rand von R . L die lineare Menge der zweimal stetig differenzierbaren, auf ∂R einer selbstadjungierten Randbedingung genügenden Funktionen mit kompaktem Träger (engl. „carrier“). $A = A_x$ der formal selbstadjungierte negative Operator zweiter Ordnung von elliptischem Typus, dessen Koeffizienten beliebig oft differenzierbare Funktionen der lokalen Koordinaten (x^1, x^2, \dots, x^m) sind. \tilde{A} eine negative selbstadjungierte Fortsetzung von A . — $\tilde{A} = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ die Spektraldarstellung von $-\tilde{A}$. Der Verf. löst auf sehr elegante Weise das Cauchysche Problem im Großen: (1) $u(x, 0) = f(x) \in L$, $\partial u(x, 0)/\partial t = h(x) \in L$ für die verallgemeinerte Wellengleichung: (2) $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 = A_x u(x, t)$; $x \in R$; $-\infty < t < \infty$. — Methode: Es wird zuerst die operatortheoretische Variante von (1), (2):

$$(1') \quad \tilde{u}(x, 0) = f(x), \quad \partial_t \tilde{u}(x, 0) = h(x), \quad (2') \quad \partial_t \partial_t \tilde{u}(x, t) = \tilde{A}_x \tilde{u}(x, t),$$

wobei $\partial_t \tilde{u}(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\tilde{u}(x, t + \tau) - \tilde{u}(x, t)]$, mit

$$\tilde{u}(x, t) = [\cos(-\tilde{A}^{1/2}t)] f(x) + \left[\frac{\sin(-\tilde{A}^{1/2}t)}{(-\tilde{A})^{1/2}} \right] h(x) = \int_0^\infty \cos(\lambda^{1/2}t) dE(\lambda) f(x) + \int_0^\infty \frac{\sin \lambda^{1/2}t}{\lambda^{1/2}} dE(\lambda) h(x)$$

gelöst. Darauf wird gezeigt, daß $\tilde{u}(x, t)$ außer einer Nullmenge gleich $u(x, t) \in C^\infty$ ist. $u(x, t)$ ist also die gesuchte Lösung von (1), (2). Die Konstruktion von $u(x, t)$ wird auf sehr geschickte Weise mit differentialgeometrischen Methoden, mit Hilfe einer Parametrix $U_{2q}(x, y)$ des Operators $A^q (A^q = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_q)$ erzielt: (3) $u(x, t) = C^{-1}(x) \int_R U_{2q}(x, y) \tilde{A}_y^q \tilde{u}(y, t) dy$, wobei

$C(x) > 0$ und beliebig oft differenzierbar ist. (3) gilt zunächst für ungerade Dimensionen $m > 2$; der Fall beliebiger m wird auf den obigen durch eine geistreiche Absteigemethode zurückgeführt. — Anmerkung des Ref.: Das Lemma 2 (Analogon der Poissonschen Formel), S. 400, scheint nicht richtig zu sein, jedenfalls ist der vom Verf. gegebene Beweis nicht einwandfrei. — Die schöne Methode des Verf. löst eigentlich sogar das gemischte Rand- und Anfangswertproblem mit verschwindenden Randwerten.

K. Maurin.

Hille, Einar: On the integration problem for Fokker-Planck's equation in the theory of stochastic processes. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 183–194 (1952).

The integration problem of Fokker-Planck's equation

(1) $\partial U / \partial t = \partial^2 [b(x) U] / \partial x^2 - \partial [a(x) U] / \partial x = A U$, $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ ($b(x) > 0$) is formulated as the Problem A: What conditions should $a(x)$ and $b(x)$ satisfy in order that for every $g(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ with compact carrier the equation (1) shall have a unique solution $U(x, t)$ with the following properties:

i)
$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, t) - g(x)| dx = 0,$$

ii)
$$U(x, t) \text{ is non-negative and } \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx.$$

By virtue of the semi-group theory (the author: this Zbl. 33, 65; the rev.: this Zbl. 37, 353), this problem is reduced to the Problem B: What condition should $a(x)$ and $b(x)$ satisfy in order that for every $g(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ the equation $A Y - \lambda Y = -g$ shall, for $\lambda > \lambda_0 \geq 0$, have a unique solution $Y(x, \lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$ such that

$Y(x, \lambda)$ is non-negative and $\lambda \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, \lambda) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ when $g(x)$ is non-negative. It is proved that the Problem B is solvable if $\sup_x (b''(x) - a'(x)) < \infty$ and

$\sup_x (|a(x)| + |b'(x)| / (|x| + 1)) < \infty$. Moreover, under the first condition above, a necessary and sufficient condition for the solvability of the Problem B is obtained. Specifically, the Problem is solvable if either (i) $a(x) = 0$, $b''(x) < \infty$

or (ii) $a(x) = b'(x)$ and $\int_0^{\infty} \frac{t}{b(t)} dt = -\int_{-\infty}^0 \frac{t}{b(t)} dt = \infty$ or (iii) $a(x) = b(x)$,

$\int_0^{\infty} \frac{dt}{b(t)} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{b(t)} = \infty$ and $\sup_x (b''(x) - a'(x)) < \infty$.

K. Yosida.

Barenblatt, G. I. und B. M. Levitan: Über einige Randwertprobleme für die Gleichung der turbulenten Wärmeleitung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 253–280 (1952) [Russisch].

Eine zusammenfassende Darstellung aller Ergebnisse beider Verff., die sie in einer Reihe von Arbeiten seit 1950 über die Theorie der Gleichung der turbulenten Wärmeleitung $\partial^2 R(x, t) / \partial x^2 = q(x) \partial R(x, t) / \partial t$ veröffentlicht haben (dies. Zbl. 37, 63; 41, 220 und 221; 43, 410). Die Beweise, besonders die der in den zitierten Referaten angegebenen Hilfssätze, die früher vielfach nur angedeutet waren, werden hier ausführlich gebracht, und es wird Gewicht darauf gelegt, zu zeigen, wie die ganze Theorie aus der klassischen Theorie der Wärmeleitung, die in ihr als Sonderfall bei $q(x) \equiv 1$ mit enthalten ist, organisch durch Verallgemeinerung hervorgeht, basierend auf der Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe. Wie früher werden die Ausdrücke und Formeln physikalisch interpretiert. Neu ist in dieser Zusammenfassung nur die Lösung der Randwertaufgaben

$$R_1(0, t) \cos \alpha - [\partial R_1(0, t) / \partial x] \sin \alpha = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq \pi/2), \quad R_1(x, 0) = 0,$$

$$\partial R_1(\xi + 0, t) / \partial x - \partial R_1(\xi - 0, t) / \partial x = -\varphi(t) \quad \text{und}$$

$$R_2(0, t) \cos \alpha - [\partial R_2(0, t) / \partial x] \sin \alpha = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq \pi/2), \quad R_2(x, 0) = 0,$$

$$R_2(\xi + 0, t) - R_2(\xi - 0, t) = \psi(t)$$

oberer Gleichung, also der Verzicht auf die Stetigkeit der Lösung bzw. ihrer Ableitung an der Stelle $x = \xi$. Durch Methoden, die den früher angewandten gleichen, wird als Lösungen der beiden Fälle gefunden

$$R_1(x, t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \int_0^\infty \exp\{-\mu^{m+2}(t - \tau)\} \varphi_\alpha(x, \mu) \varphi_\alpha(\xi, \mu) d\rho(\mu),$$

$$R_2(x, t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \int_0^\infty \exp\{-\mu^{m+2}(t - \tau)\} \varphi_\alpha(x, \mu) \frac{\partial \varphi_\alpha(\xi, \mu)}{\partial \xi} d\rho(\mu),$$

wo m eine durch die Eigenschaften der gegebenen Funktion $q(x)$ bestimmte Konstante, $\rho(\mu)$ die Spektralfunktion und $\varphi_\alpha(x, \mu)$ eine Lösung der durch Trennung der Veränderlichen erhaltenen Hilfsgleichung $\partial^2 y(x, \mu) / \partial x^2 + \mu^{m+2} q(x) y(x, \mu) = 0$, für die $\varphi_\alpha(0, \mu) = \sin \alpha$, $\partial \varphi_\alpha(0, \mu) / \partial x = \cos \alpha$ gilt, bedeuten. Diese Lösungen spielen für die Ausgangsgleichung dieselbe Rolle wie die Potentiale einer einfachen bzw. Doppelbelegung für die Laplacesche Gleichung. — Berichtigung: Im Referat dies. Zbl. 41, 220 muß die Hilfsgleichung lauten: $y'' + \lambda q(x) y = 0$. E. Svenson.

Kampé de Fériet, Joseph: Sur une classe de solutions de l'équation de la chaleur. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2139—2140 (1952).

Die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung für die unendlich dicke Platte durch das Poissonsche Integral ist für anfängliche Temperaturverteilungen $f(x)$ der Klassen L und L^2 anwendbar (S. Bochner und K. Chandrasekharan, Fourier Transforms, Ann. Math. Studies, Princeton 1949, p. 40 und 132). Aber die Funktionen dieser Klassen verschwinden im Unendlichen, während praktisch vielmehr alle Temperaturverteilungen in Betracht kommen, die um einen Mittelwert schwanken. Verf. weist darauf hin, daß sich die Wienerschen fastperiodischen Funktionen der Klasse S gut für die Anwendung des Poissonschen Integrales eignen, und teilt (ohne Beweis) mehrere Sätze über das Spektrum dieser Funktionen mit.

U. T. Bödewadt.

Krzyżański, Mirosław: Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. — Note complémentaire. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 24—25 (1952).

Die in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 37, 194) aufgestellte Bedingung bezüglich des Integrales $j(t)$ ist entbehrlich, wenn man sich auf einen von D. V. Widder [Trans. Amer. math. Soc. 55, 85—95 (1944)] aufgestellten Satz (dort Nr. 6) stützt. Der kurze Beweis, auf den Widder selber den Verf. hinwies, wird hier ausgeführt.

U. T. Bödewadt.

Pál, Sándor: Diffusionsprobleme der Zuckerindustrie. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 693—726 und russische Zusammenfassg. 726 (1952) [Ungarisch].

Im ersten Teil löst Verf. die Differentialgleichung der Diffusion $\partial C / \partial t = D \partial^2 C / \partial x^2$ ($0 \leq x \leq l/2$) bei den speziellen Randbedingungen $(\partial C / \partial t)_{x=l/2} = -\alpha (\partial C / \partial x)_{x=l/2}$, $(\partial C / \partial x)_{x=0} = 0$. Das Ergebnis kann in Form einer schnell konvergierenden unendlichen Reihe angegeben werden. — Im zweiten Teil untersucht er die Bedingung $\partial \bar{C} / \partial t = -\lambda (\bar{C} - c)$, die gewöhnlich bei entgegengesetzt fließenden Diffusionsprozessen angenommen wird und dem ersten Fickschen Gesetz analog ist. Dabei ist \bar{C} die mittlere Konzentration der festen Phase, c die Konzentration der flüssigen Phase, λ eine empirische Konstante. Es wird gezeigt, daß diese Gleichung abgeleitet werden kann aus der Diffusionsgleichung (zweites Ficksches Gesetz) bei entsprechenden Randbedingungen, wenn die Konzentrationen der beiden Phasen sich nur wenig voneinander unterscheiden und sich langsam ändern. — Für eine planparallele Platte der Dicke l ist $\lambda \approx 12 D / l^2$.

Autoreferat.

Pucci, Carlo: Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 360—366 (1952).

Die Gleichung (1) $E[u] = \sum_{h,k}^{1,n} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = f$ wird von elliptisch-parabolischem Typus mit $c < 0$ vorausgesetzt in einem Gebiet A des S_n derart, daß jeder Punkt $X \in FA$ von A aus geradlinig erreichbar ist. J sei die Menge aller Punkte $X \in FA$, die durch eine Halbgerade l derart von A aus geradlinig erreichbar sind, daß X zugleich geradlinig von A aus erreichbar ist durch alle Halbgeraden λ mit $\hat{l}\lambda < \pi/2$: $FA = I + H$, $H \cdot I = 0$. Wenn

man $L[u] = \alpha du/dl + \beta u$ setzt, wobei α, β reell in H definiert sind, $\alpha\beta \leq 0$, $\beta \neq 0$, so werden zu (1) die Randbedingungen von gemischter Art: (2) $L[u] = \gamma$ ($X \in H$), $du/dl = 0$ ($X \in I$); (3) $L[u] = \gamma$ ($X \in H$), $du/dl = \gamma$ ($X \in I$) hinzugefügt, wo γ eine reelle Funktion ist, die in (2) in H und in (3) auf ganz FA definiert ist. — Wenn u eine Lösung von (1) ist, die in $A + I$ mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig ist und (3) genügt, wenn außerdem $w(X)$ eine Hilfsfunktion bezeichnet, die die gleiche Regularität wie u besitzt und für die $dw/dl = \gamma$, $X \in I$, ist, so existieren die folgenden Schranken:

$$(4) \quad \begin{aligned} w + \min \{ \min_{A+I} [f - E[w]]/c, \min_H [(\gamma - L[w])/\beta] \} &\leq u \\ &\leq w + \max \{ \max_{A+I} [(f - E[w])/c], \max_H [(\gamma - L[w])/\beta] \}. \end{aligned}$$

In diesen Schranken fehlen, falls H leer ist, die diesbezüglichen Glieder. Die ähnliche Limitation, die für eine Lösung des Problems (1)—(2) besteht, wird aus (4) für $w = 0$ erhalten. Es werden Regularitätsbedingungen für I angegeben, die die Existenz einer Hilfsfunktion w garantieren. — Die Arbeit bildet eine Erweiterung einer vorhergehenden Arbeit des Verf. bezüglich der Randbedingungen von gewöhnlichem Typus [ibid. 11, 334—339 (1951)]. D. Greco.

Vekua, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben, mit einer Anwendung auf die Theorie der Schalen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 217—314 (1952) [Russisch].

Verf. behandelt das folgende Problem: Vorgegeben das System: (*) $\partial u/\partial x - \partial v/\partial y = a(x, y)u + b(x, y)v + f(x, y)$, $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = c(x, y)u + d(x, y)v + g(x, y)$ mit stetigen Koeffizienten in einem Gebiet T der x, y -Ebene mit Rand L . Dabei besteht L aus den sich gegenseitig nicht überschneidenden, geschlossenen Konturen L_0, L_1, \dots, L_m , wobei L_0 alle anderen Konturen in sich enthält. Die Tangente an L_j soll jeweils mit der x -Achse einen Winkel $\varphi_j(s)$ bilden, der hölderstetig ist. Durch $\partial/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ und $U = u + iv$, $\bar{U} = u - iv$ geht (*) in $\partial U/\partial \bar{z} = A U + B \bar{U} + F$ bei geeignetem A, B, F über. Man sucht stetige Lösungen mit stetigem $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$, die die Randbedingung $\alpha(s)u + \beta(s)v = \gamma(s)$ auf L mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (α, β, γ hölderstetig) bzw. Realteil $[(\alpha - if)U] = \gamma$ erfüllen (Problem A). Die Lösbarkeit dieser Aufgabe hängt wesentlich von dem Kroneckerschen Index $n = \sum_{j=0}^m n_j$ ab, wo n_j der

Index des Funktionenpaares $(\alpha(s), \beta(s))$ bezüglich der geschlossenen Kontur L_j ist. Der erste Teil der Arbeit (§ 1—§ 7) beschäftigt sich mit den funktionentheoretischen Eigenschaften von $\partial/\partial \bar{z}$ und der Aufstellung geeigneter Integralgleichungen. Im § 8 zeigt Verf. u. a.: Wenn der Index $n > m - 1$ ist, so hat die Aufgabe A stets Lösungen, die zugehörige homogene Aufgabe $A^0(F = \gamma = 0$ bzw. $f = g = \gamma = 0)$ hat genau $2n - m + 1$ Lösungen. Wenn dagegen der Index $n < 0$ ist, so hat A^0 nur die triviale Lösung $u = 0, v = 0$, und A ist genau dann lösbar, wenn bei gegebenem f, g (bzw. F) $-2n + m - 1$ explizit angegebene Integralbedingungen für die Randwerte γ erfüllt sind. Für das einfach zusammenhängende Gebiet ($m = 0$) ist dies eine vollständige Fallunterscheidung; über die Lösbarkeit des Problems A in den Fällen $0 \leq n \leq m - 1$ mit $m \geq 1$ werden ebenfalls Aussagen gemacht. Ferner kann A^0 in eine entsprechende Aufgabe für die Differentialgleichung zweiter Ordnung $w_{xx} + w_{yy} + p(x, y)w_x + q(x, y)w_y = 0$ mit analogen Aussagen übergeführt werden. Verf. schließt mit einer Anwendung auf die Theorie der Schalen. — Das gleiche Problem wurde für einfach zusammenhängende Bereiche ($m = 0$) auch von den Ref. mit anderen Methoden behandelt [Hellwig, dies. Zbl. 46, 102; 47, 340; Haack, dies. Zbl. 47, 340; Math. Nachr. 7, 1—30 (1952)]. Die Ergebnisse des Verf. stimmen mit denen der Ref. überein, jedoch kann Verf. die an einer Stelle ($n = 0$) bei den Ref. auftretende Gebietseinschränkung vermeiden. Andererseits wurde bei den Ref. durch Vorgabe zusätzlicher geeigneter Bedingungen die Lösung für $n > 0$ eindeutig festgelegt. W. Haack. — G. Hellwig.

Višik, M. I.: Über die erste Randwertaufgabe für elliptische Differentialgleichungen mit Operatorkoeffizienten. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 13, 129—136 (1952) [Russisch].

Es werden untersucht die Gleichungen

$$(1) \quad Lu = - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) + \sum_{i=1}^n \left(B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} C_i \right) u(x) + F u(x) = f(x),$$

$$(2) \quad L^*(v) = - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ik}^* \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} B_i^* + C_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} \right) v(x) + F^* v(x) = g(x).$$

A_{ik}, B_i, C_i, F beschränkte Operatoren im unitären Raume \mathfrak{H} der komplexwertigen, im Gebiete D quadratisch integrierbaren Funktionen, $x = (x_1, \dots, x_n)$; $[u(x), v(x)] = \int_D u(x) \bar{v}(x) dx$;

Ω_A Definitionsbereich von A ; $R_A = A \Omega_A$; A^* Adjungierter von A . $\Omega^0(D)$ der Raum aller un-

beschränkt differenzierbaren, in einem Randstreifen von D verschwindenden Funktionen. Von den Operatorkoeffizienten von (1), (2) wird vorausgesetzt: (a) $A_{lk} v^0(x)$, $C_l v^0(x)$ stetig differenzierbar nach x_l in D , $A_{lk}^* v^0(x)$, $B_k^* v^0(x)$ stetig differenzierbar nach x_k in D . $\frac{\partial}{\partial x_i} A_{lk} v^0(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_l} C_l v^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial x_l} A_{lk}^* v^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} B_k^* v^0(x) \in \mathfrak{H}, \quad (b) \sum_{l,k=1}^n \left[(A_{lk} + A_{lk}^*) \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_k}, \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_l} \right] \geq$$

$$\mu \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial u^0(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_i} \right], \quad \mu > 0; \quad v^0(x), u^0(x) \in \Omega^0(D). \quad (3) \text{ Randwertaufgabe: } u|_{\Gamma} = 0 \text{ im So-}$$

bolevschen Sinne, Γ Rand von D . Ω_L, Ω_{L^*} werden definiert in bezug auf (3). Hauptergebnisse. Für (1) $Lu = f$, $u \in \Omega_L$, (2) $L^*v = g$, $v \in \Omega_{L^*}$, gelten Analoga der drei Fredholmschen

Sätze. Erste Randwertaufgabe für die Gleichung $Lu(x) = - \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} A_{lk} \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) + Fu(x) = f(x)$,

wobei (a), (b) und $\text{Re}[Fu, u] \geq 0$ gelten, ist bei jeder $f(x) \in \mathfrak{H}$ lösbar. L^{-1} ist vollstetig. — Diese Theorie umfaßt als Sonderfälle die gewöhnliche Theorie der elliptischen Gleichungen und gewisser Integrodifferentialgleichungen. K. Maurin.

Vasilache, Sergiu: Sur le problème de Neumann intérieur pour l'équation générale de type elliptique. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 231—239, russische und französ. Zusammenfassgn. 240, 241 (1952) [Rumänisch].

L'A. considère, dans l'espace à trois dimensions D , limité par une surface régulière S , l'équation générale du type elliptique (1) $\Delta U(M) = \lambda [a(M) U_x + b(M) U_y + c(M) U_z + q(M) U(M)] + f(M)$, dont il cherche une solution $U(M)$, $M \in D$, telle que sa dérivée normale intérieure $dU(M)/dn_i$ soit nulle sur la surface S . L'A. montre qu'une telle solution existe si et seulement si elle vérifie la condition

$$\int_D \{ \lambda [a(P) U_\xi(P) + b(P) U_\eta(P) + c(P) U_\zeta(P) + q(P) U(P)] + f(P) \} d\xi d\eta d\zeta = 0$$

et dans ce cas, cette solution est donnée par la solution de l'équation intégral-différentielle

$$U(M) = C - \frac{\lambda}{4\pi} \int_D G(M, P) [a(P) U_\xi(P) + b(P) U_\eta(P) + c(P) U_\zeta(P) + q(P) U(P) + \lambda^{-1} f(P)] dv_P,$$

où $G(M, P)$ est la fonction de Franz Neumann, ou toute autre fonction pouvant jouer le même rôle, et où C est une constante arbitraire. L'A. détermine, sous certaines conditions, la fonction $G(M, P)$ en prenant pour cette fonction une expression de la forme $G(M, P) = V(M, P) + r^{-1} + \varphi(P)$, dans laquelle $V(M, P)$ est une fonction harmonique en M et P , $r = MP$, et où $\varphi(P)$ est une fonction de P ayant les propriétés suivantes: $\varphi(P)$ est harmonique pour $P \in D$ et $P \neq M$; $\varphi(P)$ est continue dans tout l'espace; $\varphi(P)$ admet des dérivées partielles du premier ordre qui tendent vers l'infini comme $\log MP$, lorsque M tend vers P ; $\varphi(P)$ admet des dérivées partielles du second ordre qui sont infinies comme $(MP)^{-1}$ pour M tendant vers P . — Pour obtenir une fonction symétrique en M et P , l'A. prend pour $G(M, P)$ une expression de la forme $G(M, P) = V(M, P) + r^{-1} + \varphi(P) + \varphi(M)$, dans laquelle $\varphi(P)$ est une fonction harmonique. Autoreferat.

Riz, P. M.: Die Lösung der Wellengleichung für ein Gebiet, das sich von einem gegebenen wenig unterscheidet. Priklad. Mat. Mech. 16, 345—348 (1952) [Russisch].

Es wird die Wellengleichung $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ für ein zweidimensionales Gebiet D mit der Randbedingung $u = 0$ (auch $\alpha u + \beta \partial u / \partial n = 0$) gelöst, wenn die Lösung für ein sich von D wenig unterscheidendes Gebiet D_0 bekannt ist, und zwar durch die Transformation $\xi = x + \varepsilon f_1(x, y)$, $\eta = y + \varepsilon f_2(x, y)$ bzw. $x = \xi + \varepsilon \psi_1(\xi, \eta, \varepsilon)$, $y = \eta + \varepsilon \psi_2(\xi, \eta, \varepsilon)$, die D auf D_0 abbildet, und die Behandlung der transformierten Gleichung $\nabla^2 u + \lambda u - \varepsilon L_1(u, \psi_1, \psi_2) - \varepsilon^2 L_2(u, \psi_1, \psi_2) = 0$, in der L_1 und L_2 in bezug auf u lineare Differentialoperatoren bedeuten, vermittels der gewöhnlichen Störungsmethode. Zu dem Zweck werden ψ_1 und ψ_2 in Potenzreihen von ε entwickelt, wodurch die transformierte Gleichung die Form annimmt: $\nabla^2 u + \lambda u - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i M_i(u) = 0$ mit ebenfalls linearen Operatoren M_i . Wenn dann noch u und λ in Form von Potenzreihen von ε angesetzt werden, so ergeben sich für die zu bestimmenden Koeffizienten $u^{(i)}$ und $\lambda^{(i)}$ dieser Reihen die Gleichungen

$$\nabla^2 u^{(0)} + \lambda^{(0)} u^{(0)} = 0, \quad \nabla^2 u^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = M_1'(u^{(0)}) - \lambda^{(1)} u^{(0)},$$

$$\nabla^2 u^{(2)} + \lambda^{(0)} u^{(2)} = M_1(u^{(1)}) + M_2(u^{(0)}) - \lambda^{(2)} u^{(0)} - \lambda^{(1)} u^{(1)}, \dots,$$

die, abgesehen von der ersten, die als schon gelöst zu betrachten ist, sich als Gleichungen erzwungener Schwingungen im Resonanzfall deuten und dementsprechend bezüglich der unbekannten Funktionen $u^{(i)}$ rekursiv lösen lassen unter der Bedingung, daß die rechten Seiten orthogonal zu der Eigenfunktion $u^{(0)}$ sind. Aus diesen Orthogonalitätsbedingungen ergeben sich sukzessive die Größen $\lambda^{(i)}$. — Die Rechnung wird an zwei Beispielen durchgeführt, einem rechteckähnlichen Gebiet mit den Grenzen $x = 0$, $x = a$, $y = \varepsilon f(x)$, $y = b + \varepsilon f(x)$ in zweiter Näherung und einem kreisähnlichen Gebiet mit dem Rande $r(1 + \varepsilon f(\varphi)) = a$ in erster Näherung. Insbesondere wird letzteres Gebiet zahnradförmig angenommen und dabei festgestellt, daß die knotenfreien Schwingungen erhalten werden können durch Überlagerung der knotenfreien Schwingung für ein kreisförmiges Gebiet und einer Schwingung mit so viel radialen Knotenlinien (Durchmessern), als Zähne vorhanden sind. E. Svenson.

Agamirzjan, L. A.: Über die allgemeine Darstellung der Lösung einer Gleichung, die mit dem axialsymmetrischen Problem der Elastizitätstheorie zusammenhängt. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 13, 385—388 (1952) [Russisch].

Zylindersymmetrische Elastizitätsprobleme führen bekanntlich für die Spannungsfunktion $u(x, r)$ auf $\Delta \Delta u = 0$. Um die zugehörige Riemannsche Funktion zu finden, wird Δ in komplexer Schreibweise als $\Delta = \partial^2 / \partial z \partial \bar{z} - [2(z - \bar{\zeta})]^{-1} \cdot (\partial / \partial z - \partial / \partial \bar{\zeta})$ mit $z = x + ir$ und $\bar{\zeta} = x - ir$ dargestellt. Mit Hilfe der beiden Bemerkungen, daß erstens beim Ansatz $v(z, \bar{\zeta}) = (\bar{\zeta} - z) w(z, \bar{\zeta})$ für die Lösung der zu $\Delta u = 0$ adjungierten Gleichung dann $\Delta \Delta w = 0$ ist, und daß zweitens aus jeder Lösung $\varphi(z, \bar{\zeta})$ von $\Delta u = 0$ eine Lösungsschar $w(z, \bar{\zeta}) = (z - t)(\bar{\zeta} - t)\varphi(z, \bar{\zeta})$ mit dem Parameter t für $\Delta \Delta u = 0$ gebildet werden kann, wird die Funktion $G(z, \bar{\zeta}, t, \tau) = (\tau - z)^{-1/2}(\bar{\zeta} - t)^{-1/2}(\bar{\zeta} - z)(z - t)(\bar{\zeta} - \tau)F(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \sigma)$ konstruiert, die sich als Riemannsche Funktion der zu $\Delta \Delta u = 0$ adjungierten Gleichung erweist, wenn F die hypergeometrische Funktion und $\sigma = (z - t)(\bar{\zeta} - \tau) / (z - \tau)(\bar{\zeta} - t)$ bedeuten. Vertauschung der Variablen führt dann zur gesuchten Riemannschen Funktion in der Gestalt: $G(z, \bar{\zeta}, t, \tau) = -4\pi^{-1}(\tau - z)^{1/2}(\bar{\zeta} - t)^{1/2}(\tau - t) \cdot [E(\sigma) - K(\sigma)]$ mit den elliptischen Integralen E und K und damit zur allgemeinen komplexen Darstellung der Lösung von $\Delta \Delta u = 0$. H. Richter.

Rao, P. Sambasiva: On a series of eigenfunctions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 140—151 (1952).

The author discusses the behaviour of the function represented by the Dirichlet's series $\varphi(s; P, Q) = \sum \omega_n(P) \omega_n(Q) J_{\kappa/2-1}(r \sqrt{\lambda_n}) / \lambda_n^{s+\kappa/4-1/2}$ where λ_n and ω_n are the eigenvalues and eigenfunctions of the membrane problem $\operatorname{div} \operatorname{grad} v + \lambda v = 0$ for the first or second boundary conditions. It is shown that if $r \neq r_{PQ}$ where r_{PQ} is the distance between the two points P and Q then $\varphi(s; P, Q)$ is an entire function of s with the usual trivial zeros on the real axis and if $r = r_{PQ}$ it is a meromorphic function with a finite number of poles on the real axis. The result is deduced from the asymptotic behaviour of $\sum \omega_n(P) \omega_n(Q) J_{\kappa/2-1}(r \sqrt{\lambda_n}) e^{-\lambda_n t}$ as $t \rightarrow +\infty$ and as $t \rightarrow +0$. — The results are proved only for small values of r .

S. Minakshisundaram.

Yosida, Kôzaku: On the existence of the resolvent kernel for elliptic differential operator in a compact Riemann space. Nagoya math. J. 4, 63—72 (1952).

Sur une variété riemannienne compacte V_n , de métrique $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, de classe C^∞ , l'A. considère un opérateur différentiel du second ordre elliptique $Af = g^{ij} \partial_{ij} f + a^i \partial_i f + cf$ à coefficients C^∞ , opérant sur les fonctions à valeurs scalaires. Soit A la plus petite extension fermée de A sur l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur V_n . Si $m > \max_x |c(x)|$ pour $x \in V_n$, l'opérateur $(I - m^{-1} \tilde{A})$ admet un inverse borné I_m . Cet inverse, pour m suffisamment grand, peut être représenté comme opérateur intégral $I_m f = \int_{V_n} p_m(y, x) f(x) dx$ où p_m est un noyau mesurable et dx l'élément de volume de V_n . Cette représentation

est effectuée à l'aide d'une parametrix inspirée de Thomas et Titt (ce Zbl. 23, 39). Ce résultat est appliqué, pour A symétrique, pour obtenir une expression explicite de la probabilité de transition du processus stochastique défini par l'équation de diffusion $\partial f / \partial t = A f$ ($t \geq 0$).
A. Lichnerowicz.

Kac, M.: An application of probability theory to the study of Laplace's equation. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 122—130 (1952).

Sei Ω_0 eine offene beschränkte Menge im R_3 , K eine abgeschlossene Kugel, die Ω_0 samt deren Rand im Innern enthält und $B = K - \Omega_0$. Die Konstruktion der Greenschen Funktion von Ω_0 (die also am Rand von Ω_0 verschwindet) geschieht einmal mit Hilfe des von N. Wiener zur Untersuchung der Brownschen Bewegung verwendeten Wahrscheinlichkeitsintegrals, andererseits aber mit Hilfe der Eigenfunktionen $\frac{1}{2\pi} \int_B \frac{\psi(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho} - \vec{r}|} d\vec{\varrho} = \mu \psi(\vec{r})$ und im Anschluß an eine Arbeit des Autors (dies. Zbl. 45, 70), die dem Ref. nicht zugänglich war.
H. Hornich.

Karush, William: A steady-state heat flow problem for a quarter infinite solid. J. appl. Phys. 23, 492—494 (1952).

Die stationäre Lösung $T(x, y)$ der Wärmeleitung $\Delta T = 0$ in der Viertel-ebene $x > 0$, $y > 0$ läßt sich als Fourierintegral

$$T(x, y) = \int_0^{\infty} f(u) (\sin u x + c u \cos u x) \exp(-u y) du$$

darstellen, wenn für $y \rightarrow \infty$ verlangt wird $T \rightarrow 0$ und wenn für $x = 0 < y$ ein endlicher oder vollkommener Wärmeübergang (Wärmefluß $= h T$; oder $T = 0$) vorgeschrieben wird. Die Amplituden $f(u)$, und daher auch die Temperatur T selber, finden sich als Integrale über den für $y = 0 < x$ vorgegebenen Verlauf $g(x)$ des Wärmeflusses. — Einige Sonderfälle, durch $g(x) = 0$ für $x > a$ ausgezeichnet, werden näher betrachtet. Die ganze Aufgabe kommt vor bei einem Körper, der entlang einer Kante nur auf einer der angrenzenden Flächen gekühlt oder erwärmt wird.
U. T. Bödewadt.

Sibagaki, Wasso and Akira Ono: On the mean-value theorem of harmonic functions. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 7, 41—50 (1952).

Une extension de la condition $\Delta u = 0$ dans un domaine D par Bochner-Schwartz consiste à écrire que u localement sommable satisfait à $\int_D u \Delta \varphi dv = 0$ pour toute fonction φ indéfiniment dérivable nulle hors d'un compact de D . L'A. démontre que cela équivaut à ce que u soit presque partout égale à une fonction harmonique dans D . Mais cela est contenu dans la théorie des distributions de Schwartz, comme l'A. le reconnaît à la fin.
M. Brelot.

Cheng, M. T.: On a theorem of Nicolesco and generalized Laplace operators. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 771—773, ungarische und russische Zusammenfassgn. 773 (1952).

Es werden ohne Beweis Verallgemeinerungen des Satzes, daß eine harmonische Funktion sich durch die Mittelwertseigenschaft charakterisieren läßt, auf harmonische Funktionen der Ordnung p ($\Delta^p U = 0$, wo Δ der gewöhnliche Laplacesche Operator ist) sowie ein Gegenbeispiel zu einem Satz von Nicolesco (Les fonctions polyharmoniques, Paris 1936, p. 10, dies. Zbl. 16, 25) aus diesem Ideenkreis angegeben.
G. Doetsch.

Garnir, H. G.: Fonctions de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann posés dans un angle ou un dièdre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 119—140 (1952).

L'A. étudie les fonctions de Green du problème de Dirichlet et Neumann dans un angle ou un dièdre d'ouverture quelconque même supérieure à 2π , relativement

au cas harmonique ou métaharmonique ($\Delta u = K^2 u$). Il donne d'abord des expressions au moyen de fonctions élémentaires de la fonction de Green „périodique“ dans l'angle, c'est à dire prenant même valeur et même dérivée en θ en deux points-frontière sur un cercle centré au sommet O de l'angle. Il en déduit aussitôt les fonctions cherchées. Une théorie analogue est développée pour un dièdre bien que l'étude puisse se déduire du cas plan. Cet exposé est une synthèse générale de résultats connus, avec des compléments et une méthode systématique. *M. Brelot.*

Haug, Albert: Die Rolle der Ausstrahlungsbedingung bei komplexer Wellenzahl und ihre Bedeutung für das Problem der Oberflächenwelle. *Z. Naturforsch.* **7a**, 501—505 (1952).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, die der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial u / \partial r - i k u) = 0$ genügen, auch für nichtreelle k gilt; dabei wird vorausgesetzt, daß der Gültigkeitsbereich eine volle Umgebung des unendlich fernen Punktes enthält und $r u$ beschränkt ist. (F. Rellich zeigte inzwischen, daß die zweite Voraussetzung entbehrlich ist; s. F. Rellich, Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen, Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1952/53 in Göttingen, als Manuskript vervielfältigt, S. 57.) Der Eindeutigkeitssatz wird auf zwei Halbräume verallgemeinert und auf das Problem der Oberflächenwelle angewendet. *J. Moser.*

Yâşbâş, Zuiman: A theorem concerning subharmonic functions defined in a strip domain. *Commentarii math. Univ. St. Pauli* **1**, 1—4 (1952).

Folgende Erweiterung eines für nichtnegative subharmonische Funktionen von G. H. Hardy, A. E. Ingham und G. Pólya [*Proc. London. math. Soc.*, II. Ser. **27**, 401—409 (1928)] ausgesprochenen Satzes wird bewiesen: $\psi(x, y)$ sei stetig auf $\alpha \leq x \leq \beta$, subharmonisch in $\alpha < x < \beta$, und es gelte $\psi(x, y) \leq e^{k|y|}$ ($0 < k < \frac{\pi}{\beta - \alpha}$). Falls $J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) dy$ für $x = \alpha$ und $x = \beta$ konvergiert, dann existiert $J(x)$ für $\alpha \leq x \leq \beta$, und es ist entweder $J(x) \equiv -\infty$ ($\alpha < x < \beta$) oder $J(x)$ ist eine konvexe Funktion von x ($\alpha \leq x \leq \beta$). *A. Huber.*

Green, John W.: Approximately subharmonic functions. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 829—833 (1952).

$f(x)$, semi-continue supérieurement dans un domaine D de R^m , est dite ε -sous-harmonique si, quel que soit D' avec $\bar{D}' \subset D$ et quelle que soit h harmonique dans D' et majorant f sur la frontière de D' , on a: $f(x) \leq \varepsilon + h(x)$ dans D' ; théorème: il existe alors u sousharmonique dans D , avec $u(x) \leq f(x) \leq u(x) + \varepsilon$; on peut prendre pour u la plus grande minorante sousharmonique de f dans D . L'A. s'appuie sur un résultat de N. Sjöberg (ce Zbl. **22**, 239) affirmant l'existence d'une plus grande minorante sousharmonique pour une fonction continue admettant une minorante sousharmonique, résultat dont il redonne une démonstration simple; une autre démonstration et diverses extensions se trouvent dans M. Brelot [*J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **24**, 1—32 (1945)]. *J. Deny.*

Jackson, Lloyd: The principle of the maximum for generalized subharmonic functions. *Portugaliae Math.* **11**, 69—74 (1952).

The author generalizes the notion of subharmonic functions to that of sub- $\{F\}$ functions, in an analogous way to Beckenbach's generalization of convex functions (this Zbl. **16**, 352; cf. also Bonsal, this Zbl. **38**, 209). After proving some theorems characterizing sub- $\{F\}$ functions and a generalization of the Phragmén-Lindelöf theorem, an application to function-theory is given. Similar results have been obtained by Bonsal (this Zbl. **37**, 71). *J. Horváth.*

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Popovici, Constantin: Sur certaines équations intégral-fonctionnelles. Acad. Republ. popul. Romane, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 527—530 u. russische u. französ. Zusammenfassg. 530, 530—531 (1952) [Rumänisch].

Il s'agit des équations intégral-fonctionnelles à limites d'intégration finies. L'A., en traitant ces équations à une ou deux limites variables, a prouvé, depuis 1914, qu'elles admettent une infinité d'intégrales ayant la puissance des fonctions arbitraires et qui peuvent même prendre une valeur donnée dans le point critique essentiel de la transformation fonctionnelle; ainsi qu'il l'a mentionné plusieurs fois, les mêmes résultats s'appliquent aux équations à limites fixes d'intégration. — L'A. s'est saisi d'un travail de M. Bădescu qui traite une telle équation

$$\Phi(z) - \mu \int_a^b S(z, s) \Phi(z + s) ds = \sum \psi_n e^{-\lambda_n z} \quad (\mu, \psi_n \text{ const.})$$
 et trouve des solutions qui, en séries

d'exponentielles satisfaisaient aux théorèmes de Fredholm. Dans ce travail l'A. montre que, à côté des intégrales qui dépendent d'une fonction arbitraire, mentionnées plus haut, il existe une infinité d'intégrales qui, même dotées d'expressions analytiques et même exprimées en séries d'exponentielles, ne satisfont pas aux théorèmes de Fredholm, qui limitent l'ensemble des intégrales. Cela est vrai aussi pour les équations intégrales de Fredholm (celles où la fonction inconnue ne contient pas une transformation de la variable) pourvu que le noyau soit, dans le champ d'intégration, composé de morceaux, pouvant même se raccorder entre eux jusqu'à un ordre infini. Autoreferat.

Vasilache, Sergiu: Sur une classe d'équations intégral-différentielles que l'on rencontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 505—515 u. russische und französ. Zusammenfassg. 515—516, 516—517 (1952) [Rumänisch].

L'A. rappelle son étude antérieure (ce Zbl. 48, 338) concernant le problème de Neumann intérieur et qui l'a conduit à une certaine équation intégral-différentielle. Pour résoudre cette équation, on considère l'équation plus générale (1) $U(M) = F(M, \lambda) + \lambda \int_D G(M, P) L U(P) d\tau_P$

$(M, P \in D)$ dans un espace métrique à d dimensions D , où $F(M, \lambda) = f(M) + \frac{f_1(M)}{\lambda} + \dots$

$\dots + \frac{f_n(M)}{\lambda^n} + \sum_{i=1}^{\infty} h_i(M) \lambda^i$ (f, f_i, h_i étant des fonctions données, intégrables en D), L est un opérateur linéaire appliqué à U et à ses dérivées partielles du premier ordre, $G(M, P)$ une fonction intégrable pour $M, P \in D$. En utilisant la notation $\int_D G(M, P) L U(P) d\tau_P = J_P G(M, P) L U(P)$

on ramène (1) à la forme (2) $U(M) = F(M, \lambda) + \lambda J_P G(M, P) L U(P)$. On cherche une solution de (2) par approximations successives et on trouve le noyau itéré d'ordre $i + 1$ $G_{i+2}(M, P) = J_{P_1} \dots J_{P_{n-1}} G(M, P_1) L_{P_1} G(P_1, P_2) \dots L_{P_{n-1}} G(P_{n-1}, P)$ et $U(M) = F(M, \lambda) + \lambda J_P \Gamma(M, P, \lambda) L F(P, \lambda)$, où $\Gamma(M, P, \lambda) = G(M, P) + \lambda G^{(2)}(M, P) + \dots + \lambda^k G^{(k+1)}(M, P) + \dots$ est le noyau résolvant, vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(M, P, \lambda) = G(M, P) + \lambda J_{P_1} G(M, P_1) L_{P_1} \Gamma(P_1, P, \lambda)$. — On étudie des cas particuliers, y comprise l'équation du travail antérieur.

Autoreferat.

Vasilache, Sergiu: Le problème de Cauchy et la répartition spectrale des valeurs du paramètre λ , dans la résolution des équations intégral-différentielles. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 7—17, russische und französ. Zusammenfassgn. 17, 18 (1952) [Russisch].

L'A. établit le théorème suivant: Étant donnée une équation intégral-différentielle de la forme

$$(a) \quad \sum_{i=0}^n H_i(x) \varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \sum_{r=0}^p K_r(x, Y) \varphi^{(r)}(Y) dY$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $\varphi^{(r)}(x)$ sa dérivée d'ordre r ; $H_i(x)$, $K_r(x, y)$, $f(x)$, des fonctions données, bornées et intégrables, dans un intervalle $a \leq y \leq x < b$, alors: A. Si $n \geq p$, la solution de l'équation (a) est une fonction entière de λ . B. Si $n = p - 1$, la solution de (a) est une série entière, dont les termes sont formés par des fonctions homographiques en λ , ces solutions présentant, en plus, des intervalles lacunaires par rapport à λ . C. Si $n \leq p - 2$, l'équation (a) admet comme solution une fonction entière en $1/\lambda$ le point $\lambda = 0$ étant, pour cette solution, un point singulier essentiel isolé. Autoreferat.

Buscham, W.: Die Zurückführung von speziellen linearen Integrodifferentialgleichungen auf gewöhnliche Integralgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 32, 20—21 (1952).

Man betrachte die Integrodifferentialgleichung (1) $y(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) N[y(\xi)] d\xi = f(x)$ wo: 1. $N[y(x)] = \sum_{v=0}^n q_v(x) \frac{d^v y}{dx^v}$ ein reeller, linearer Differentialoperator mit in (a, b) stetigen Koeffizienten ist; 2. der reelle Kern $G(x, \xi)$ im Quadrat $a \leq x, \xi \leq b$ zusammen mit seinen ersten n partiellen Ableitungen bezüglich x stetig ist; 3. $f(x)$ eine in (a, b) reelle, n -mal stetig differenzierbare Funktion ist. Wenn man $N[y(x)] = \Phi(x), \sum_{v=0}^n q_v(x) \frac{\partial^v G}{\partial x^v} = H(x, \xi), N[f(x)] = F(x)$ setzt, so führt die Gleichung (1) auf die folgende Integralgleichung zweiter Art zurück: (2) $\Phi(x) - \lambda \int_a^b H(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x)$, in der $H(x, \xi), F(x)$ stetige Funktionen sind. Wenn man vom trivialen Fall $H = 0$ absieht, kann man die Ausdrücke der Lösungen von (1) mittels der Lösungen von (2) angeben, indem man beweist, daß (1) und (2) die gleichen Eigenwerte haben, und indem man einzeln den homogenen Fall ($f = 0$) und den inhomogenen Fall ($f \neq 0$) behandelt, wobei im letzteren Fall die zwei Unterfälle $F \neq 0, F = 0$ betrachtet werden müssen.

D. Greco.

Germay, R. H.: Extension à des équations intégral-différentielles récurrentes à plusieurs variables indépendantes, du théorème de Cauchy relatif à l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 491—496 (1952).

Estensione di una precedente ricerca dell'A. (questo Zbl. 8, 15) al caso di un sistema di tipo troppo complicato per esser qui riprodotto e per il quale si rimanda quindi al lavoro originale.

G. Cimmino.

Germay, R. H.: Sur l'intégration, par approximations successives, de certains systèmes d'équations intégrales à plusieurs variables indépendantes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 73—78 (1953).

Per un certo sistema di equazioni integrali in più variabili indipendenti e con limiti superiori d'integrazione variabili, si costruiscono le approssimazioni successive in un modo analogo a quello indicato da E. Cotton nel caso di un sistema di equazioni differenziali.

G. Cimmino.

Germay, R. H.: Sur les fonctions généralisant les noyaux itérés des systèmes d'équations intégrales de Volterra, de seconde espèce. I, II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 2—6, 42—45 (1952).

Al caso di un sistema di equazioni integrali di Volterra di seconda specie viene esteso il metodo usato dall'A. in un suo precedente lavoro (questo Zbl. 33, 184) nel caso di una sola equazione.

G. Cimmino.

Chang, Shih-Hsun: A generalization of a theorem of Goursat and Heywood. Sci. Record 5, 11—16 und chines. Zusammenfassg. 11 (1952).

Verf. verallgemeinert einen von Goursat und Heywood für die Fredholmischen Determinanten zweier zueinander orthogonaler Kerne aufgestellten Satz wie folgt: Ein nicht notwendig stetiger, L^2 -integrabler Kern $k(x, y)$ mit beschränkter Norm sei als Limes im Mittel der Summe von zueinander orthogonalen L^2 -integrablen

Kernen darstellbar: $k(x, y) = \text{L. i. M.} \sum_{h=1}^n k_h(x, y)$, wobei $\int_a^b k_i(x, s) k_j(s, y) ds = 0$ ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots$) und $\|k(x, y)\|^2 = \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy = \sum_{h=1}^{\infty} \|k_h(x, y)\|^2$

$< +\infty$, dann gilt $D_k^*(\lambda) = \prod_{h=1}^{\infty} D_{kh}^*(\lambda)$, wo $D_k^*(\lambda)$, $D_{kh}^*(\lambda)$ die im Carlemanschen Sinne modifizierten Fredholmschen Determinanten der Kerne $k(x, y)$ und $k_n(x, y)$ bedeuten. V. Garten.

Fenyő, István: Eine Methode zur Lösung linearer inhomogener Integralgleichungen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 689—691 und russische Zusammenfassg. 691 (1952) [Ungarisch].

Für den beschränkten Kern $K(x, y)$ ($0 \leq x, y \leq 1$) mögen die Fredholmschen Sätze gelten, und die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $0 \leq x \leq 1$ beschränkt, summierbar und quadratisch summierbar. Wir betrachten die Integralgleichung (1) $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$, wo λ kein Eigenwert sei. Wenn die λ_k ($k = 1, 2, \dots$) die Eigenwerte des Kernes K in der Reihenfolge ihrer absoluten Beträge sind und $\lambda/\lambda_k = \Sigma_k$, dann betrachten wir den Iterationsprozeß

$\varphi_0(x) = f(x)$, $(1 - \Sigma_n) \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy - \Sigma_n \varphi_{n-1}(x)$. Dieser Prozeß konvergiert gegen die Lösung der Integralgleichung (1). Sein Vorzug vor dem klassischen Fredholmschen Prozeß besteht darin, daß man ihn auch für $|\lambda| > |\lambda_1|$ anwenden kann und die Konvergenzgeschwindigkeit größer ist als bei den anderen bekannten Prozessen. Autoreferat.

Satō, Tokui: Sur la limitation des solutions d'un système d'équations intégrales de Volterra. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 272—274 (1952).

Die gegebenen Funktionen in dem System von linearen Integralgleichungen

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x a_{jk}(x, t) u_k(t) dt + b_j(x) \quad (j = 1, \dots, n)$$

sollen die Bedingungen erfüllen: $\max_{j,k} |a_{jk}(x, t)| \leq A(x, t)$, $\sum_{j=1}^n |b_j(x)| \leq B$ ($A(x, t)$ und $A_x(x, t)$ stetig und nichtnegativ in $a \leq t \leq x < \infty$, $B = \text{const.}$). Dann ist

$$\sum_{j=1}^n |u_j(x)| \leq B \exp \left(\int_a^x A(x, t) dt \right).$$

G. Doetsch.

Laasonen, Pentti: Eine Verallgemeinerung des symmetrischen Kernes einer Integralgleichung. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 118, 33 S. (1952).

In der homogenen Integralgleichung (1) $u(x) = \lambda \int K(x, y) u(y) dy$ sei $u(x)$ ein Spaltenvektor mit s Komponenten (Zeilenvektoren werden durch einen Strich gekennzeichnet), $K(x, y)$ eine reelle quadratische Kernmatrix; x und y mögen in einem endlichen, von analytischen Gebilden begrenzten Raumgebiet variieren, über das auch die Integrationen laufen; $K(x, y)$ sei stückweise stetig. $K(x, y)$ wird „normalisierter Kern“ genannt, wenn es eine symmetrische Matrix $S(x)$ gibt, derart daß $K(x, y) = \bar{K}(x, y) S(y)$ gilt und gleichzeitig $S(x) K(x, y) = K'(y, x) S(y) \equiv 0$. (Durch einen Strich wird die transponierte Matrix gekennzeichnet.) — In unmittelbarer Anwendung der Methode der iterierten Kerne von E. Schmidt auf (1) wird gezeigt: Es gibt mindestens einen, höchstens abzählbar viele Eigenwerte, alle Eigenwerte sind reell. Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind in folgendem Sinne zueinander orthogonal: $\int u'_1(x) S(x) u_2(x) dx = 0$. Aus den sämtlichen Eigenvektoren kann man eine Matrix $U(x)$ bilden, die zusammen mit der von den Eigenwerten gebildeten Diagonalmatrix $\Lambda = ||\lambda_i \delta_{ij}||$ — die δ_{ij} sind die Elemente der Einheitsmatrix E — der homogenen Integralgleichung $U(y) = \int K(x, y) U(y) dy \Lambda$ genügt und gemäß der Bedingung $\int U'(x) S(x) \cdot U(x) dx = E$ orthonormiert ist. Für jede mittels einer stückweise stetigen Funktion $h(y)$ quellenmäßig dargestellte Funktion $f(x) = \int K(x, y) h(y) dy$ läßt sich der absolut und gleichmäßig konvergente Ausdruck $\varphi(x) = U(x) \bar{f}$ mit dem Koeffizientenvektor $\bar{f} = \int U'(x) S(x) f(x) dx$ bilden, für den $S(x) [f(x) - \varphi(x)] = 0$ gilt. — Kurze Bemerkungen über die Anwendung der Variationsmethode von Courant.

R. Iglisch.

Zaanen, A. C.: An extension of Mercer's theorem on continuous kernels of positive type. Simon Stevin 29, 113—124 (1952).

Es ist bekannt, gemäß dem Satze von Mercer [I. Mercer, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 209, 415—446 (1909)], daß, wenn $K(x, y)$ ($A: a \leq x, y \leq b$) ein hermitescher, in Λ überall stetiger und positiv definiter Kern einer linearen Integralgleichung ist, folgende Reihenentwicklung gilt: $K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}$. Die auf der rechten Seite stehende Reihe ist

in x und y gleichmäßig konvergent. Die Koeffizienten λ_n sind die charakteristischen Zahlen von $K(x, y)$; $\varphi_n(x)$ bedeutet die zu λ_n gehörige Eigenfunktion von K . Verf. verallgemeinert diesen

Satz. Er betrachtet hermitesche Kerne, die folgende Eigenschaften besitzen: a) $\int_a^b |K(x, y)|^2 dy$

existiert und ist beschränkt für alle Werte von $x \in [a, b]$; b) $\int_a^b |K(x, y)|^2 dx$ existiert und ist

beschränkt für alle Werte von $y \in [a, b]$; c) $\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \int_a^b |K(x_2, y) - K(x_1, y)|^2 dy = 0$, $x_1, x_2 \in [a, b]$;

d) $\lim_{y_1 \rightarrow y_2} \int_a^b |K(x, y_1) - K(x, y_2)|^2 dx = 0$, $y_1, y_2 \in [a, b]$; e) $\iint_A K(x, y) \bar{f}(x) f(y) dx dy \geq 0$ für

alle stetigen Funktionen $f(x)$ ($x \in [a, b]$). — Die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit sind folgende: Ist $K(x, y)$ eine in Δ definierte hermitesche Funktion, welche die Eigenschaften a), b), c), d) besitzt und außerdem in jedem Punkte (x, x) stetig ist, so ist $K(x, y) = K_c(x, y)$ fast überall in Δ , wobei die stetige Funktion $K_c(x, y)$ definiert ist durch die Reihe (*) $K_c(x, y) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \bar{\varphi}_n(y)$. Diese Funktionalreihe ist gleichmäßig konvergent in Δ (λ_n und φ_n bedeuten

die charakteristischen Werte bzw. Eigenfunktionen von K). Aus diesem Satze folgt ganz leicht: wenn K ein hermitescher Kern ist und K den Bedingungen a), b), c) genügt, außerdem stetig ist in jedem Punkte (x, x) und wenn mit Ausnahme von höchstens endlich vielen alle charakteristischen Werte positiv sind, dann ist $K(x, y) = K_c(x, y)$ fast überall in Δ . — Diese Resultate können noch in folgender Weise verallgemeinert werden: Der Kern $K(x, y)$ sei in Δ meßbar und nicht verschwindend auf einer Punktmenge von positivem Maß; ferner besitze er die folgenden Eigen-

schaften: (A) $\bar{h}(x) = \int_a^b |K(x, y) f(y)| dx \in L^2(a, b)$, für alle $f \in L^2(a, b)$, (B) Die lineare

Integraltransformation mit dem Kern K bilde den Funktionalraum $L^2(a, b)$ in einem kompakten Teil von $L^2(a, b)$ ab, (C) die Eigenfunktionen, welche zu nicht verschwindenden charakteristischen Werten von K gehören, seien stetig, (D) $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ und $\iint_A K(x, y) \bar{f}(x) f(y) dx dy \geq 0$,

(E) $K(x, y)$ ist in jedem Punkte der Diagonale $y = x$ stetig; dann ist $K(x, y) = K_c(x, y)$ fast überall in Δ , wo K_c durch (*) definiert ist. St. Feenyó.

Ullman, J. L.: On a theorem of Frobenius. Michigan math. J. 1, 189—193 (1952).

Eine Fredholmsche Integralgleichung mit stetigem Kern $K(x, y) \geq 0$ besitzt genau dann einen positiven Eigenwert, wenn es Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = x_1$ derart gibt, daß $\prod_{i=1}^n K(x_i, x_{i+1}) \neq 0$ ist. Dieser Satz, sowie der entsprechende für endliche Matrizen, wird mittels des Satzes von Vivanti über Potenzreihen mit nicht negativen Koeffizienten bewiesen. H. Wielandt.

Rabinovič, Ju. L.: Über die stetige Abhängigkeit der Eigenwerte linearer Integralgleichungen von einem Parameter. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2, 172—174 (1952) [Russisch].

Bewiesen wird folgender Satz: Besitzt ein (auch unsymmetrischer) Kern $K(x, y; \mu)$ einer linearen Integralgleichung, der in bezug auf den Parameter μ fast überall in einem meßbaren Gebiet B des m -dimensionalen Euklidischen Raumes stetig ist für feste Werte der beiden Sätze der Raumveränderlichen x und y ($x, y \in B$) und der in bezug auf x und y in B meßbar ist, eine Majorante: $|K(x, y; \mu)| < \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine allein von x abhängige, in B integrierbare Funktion ist, so sind seine Eigenwerte stetige Funktionen des Parameters μ . — Der elementare Beweis verwendet die Reihenentwicklung $D(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\mu) \lambda^n$ für den Fredholmschen

Nenner des Kernes, wobei gezeigt wird, daß die Funktionen $d_n(\mu)$ stetig sind (weil die Spuren der iterierten Kerne diese Eigenschaft haben) und daher $D(\lambda, \mu)$ in jedem beschränkten Gebiet der komplexen λ -Ebene gleichgradig stetig in μ ist. Daraus folgt die Behauptung des Satzes. Er wird noch in bekannter Weise durch Übergang zu den iterierten Kernen auf den Fall verallgemeinert, daß für $x = y$ der Kern so

unendlich wird, daß $|K(x, y; \mu)| < A d^{-\alpha}$ gilt, wo A und α Konstanten und d den Abstand der beiden Punkte x und y in B bedeuten. *E. Svenson.*

Bellman, Richard and Richard Latter: On the integral equation $\lambda f(x) = \int_0^a K(x-y) f(y) dy$. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 884—891 (1952).

In der Integralgleichung $\lambda f(x) = \int_0^a K(x-y) f(y) dy$ ($a > 0$) sei $K(z)$ nicht-negativ, gerade und monoton abnehmend für $0 \leq z < \infty$, $\int_0^\infty K(z) dz = c < \infty$; dann strebt mit $a \rightarrow \infty$ der größte Eigenwert $\lambda_M \rightarrow 2c$. Genauer gilt für alle $a > 0$ $2 \int_0^{a/2} K(z) dz \geq \lambda_M \geq 2 \int_0^a K(z) dz - \frac{2}{a} \int_0^a z K(z) dz$. Von den beiden Beweisen benutzt der erste Methoden der Variationsrechnung von Rayleigh-Ritz und Bohnenblust, der zweite solche der Theorie der Integralgleichungen; letzterer liefert eine wichtige Eigenschaft der zu λ_M gehörenden Eigenfunktion mit. *R. Iglisch.*

Gegelija, T. G.: Über einige singuläre Integralgleichungen von spezieller Gestalt. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR **13**, 581—586 (1952) [Russisch].

Einige Ergebnisse über singuläre Integralgleichungen werden für den Fall verallgemeinert, daß jede der einfachen geschlossenen Randkurven des Gebietes folgende Eigenschaft hat: Es gebe eine Zahl $k > 0$, so daß für beliebige Punkte t', t'' der Kurve L gilt: $\varrho(t', t'') \geq k S(t', t'')$; dabei sei $\varrho(t', t'')$ der Abstand von t' und t'' und $S(t', t'')$ die Länge des kürzesten Bogens von L zwischen t' und t'' . *W. Thimm.*

Bose, S. K.: Some sequences of Laplace transforms. Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 127—131 (1952).

Es werden „Sequenzen“ von folgendem Typus aufgestellt: Wenn $\varphi(p)$ mit $h(x)$, $h(p)$ mit $f(x)$, $f(p)$ mit $g(x)$ durch Laplace-Transformation zusammenhängt, so besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen $\varphi(p)$ und $g(x)$. *G. Doetsch.*

Bose, B. N.: On certain theorems in operational calculus. Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 93—110 (1952).

Es sei $\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ (Laplace-Transformation). Es werden Sätze von folgendem Typus bewiesen: Wenn $\varphi(x)$ selbstreziprok in der sin-Transformation und $f(0) = f(\infty)$ ist, so ist $f'(x)$ selbstreziprok in der cos-Transformation, falls $f'(x)$ stetig und $\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$, $\int_1^\infty |f(x)| dx < \infty$. *G. Doetsch.*

Fletcher, H. J. and C. J. Thorne: Sine and cosine transforms. Studies appl. Math. **8**, 44 S. (1952).

Es werden 190 Umkehrungen der endlichen Sinus- und Cosinus-Transformation angegeben, d. h. es werden zu den Fourier-Koeffizienten die Originalfunktionen bestimmt. Im einzelnen sind tabelliert: 55 sin-Transformierte, die rationale Funktionen von n sind oder eine andere einfache Gestalt haben; 46 cos-Transformierte der gleichen Form; 14 sin-Transformierte, die gerade Funktionen von n und 28 cos-Transformierte, die ungerade Funktionen von n sind (deren Originalfunktionen sind durchweg Integrale); 26 sin-Transformierte und 21 cos-Transformierte verschiedenen Charakters. — Im Verzeichnis der von anderen Autoren früher veröffentlichten Tabellen fehlt die von H. Knieß (dies. Zbl. **19**, 23), welche die erste war. *G. Doetsch.*

Bose, N. N.: On MacRobert's E -function. Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 63—68 (1952).

In dieser Arbeit wird eine Reihe von operatorischen Abbildungsfunktionen und Integralen abgeleitet, die MacRoberts E -Funktion enthalten. Verf. verwendet die operatorische Rechenweise. Die Zahl der abgeleiteten Formeln ist zu groß, als daß sie hier alle aufgeführt werden könnten. Es sei nur erwähnt, daß Verf. insbesondere auch zu einer Anzahl von Integralen Whittakerscher Funktionen gelangt.

M. J. O. Strutt.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Ōhira, Keishirō: On some characterizations of abstract Euclidean spaces by properties of orthogonality. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* **1**, 23—26 (1952).

In einem (reellen oder komplexen) normierten linearen Raum B kann eine Orthogonalitätsrelation auf verschiedene Weise eingeführt werden. Folgende vier Orthogonalitätsdefinitionen werden betrachtet: x heißt orthogonal zu y , wenn eine der nachstehenden Bedingungen erfüllt ist: (1) $\|x + y\| = \|x - y\|$, oder (2) $\|x + ky\| = \|x - ky\|$ für alle reellen Zahlen k , oder (3) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, oder (4) $\|x + ky\| \geq \|x\|$ für alle reellen Zahlen k . Diese vier Definitionen sind in Euklidischen Räumen äquivalent. Dabei heißt ein normierter Raum Euklidisch, wenn seine Norm durch ein skalares Produkt erklärt werden kann. Verf. zeigt, daß jede der folgenden Implikationen hinreichend dafür ist, daß B ein Euklidischer Raum ist: (1) \rightarrow (4); (3) \rightarrow (2); (3) \rightarrow (4); (4) \rightarrow (1); (4) \rightarrow (2); (4) \rightarrow (3). Unter Berücksichtigung entsprechender Ergebnisse, die bereits von anderen Autoren gewonnen wurden, bleibt damit nur noch die Frage offen, welche Rolle die Implikation (2) \rightarrow (3) spielt.

H. J. Kowalsky.

Călugăreanu, G.: Remarques sur les normes d'un espace vectoriel. *Acad. Republ. popul. Române, Bul. Ști., Sect. Ști. Mat. Fiz.* **4**, 69—72, russische und französ. Zusammenfassgn. 72—73, 73 (1952) [Rumänisch].

La Note contient quelques remarques sur les normes possibles dans un espace vectoriel X , principalement sur l'effet d'un changement de norme sur la classe des fonctionnelles continues de cet espace. On y donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que la norme $N(x)$ soit continue relativement à une norme initiale $\|x\|$. Quand on change la norme $\|x\|$ en la remplaçant par $N(x)$, continue relativement à $\|x\|$, la classe des fonctionnelles continues peut être restreinte, mais ne peut être élargie. Exemple d'une norme $N(x)$ discontinue relativement à la norme initiale $\|x\|$, avec élargissement correspondant de la classe des fonctionnelles continues. Remarques sur les normes qui sont des fonctionnelles analytiques dans X ; aucune norme n'est analytique au point θ (élément nul de X). Exemple de norme analytique: la norme usuelle de l'espace L^p .

Autoreferat.

Monna, A. F.: Sur une classe d'espaces linéaires normés. *Indagationes math.* **14**, 513—525 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 513—525 (1952).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **46**, 50) hat Verf. eine Abbildung der p -adischen Zahlen in die positiven reellen Zahlen zur Untersuchung des Lebesgueschen Maßes in den p -adischen Zahlkörpern benutzt. Jetzt zeigt er, daß dieselbe Methode mit Erfolg auf eine größere Klasse von linearen normierten Räumen E anwendbar ist, nämlich auf diejenigen, die über einem nichtarchimedisch bewerteten Körper K definiert sind und in denen die Norm $\|\dots\|$ der Ungleichung $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ genügt ($x, y \in E$). [Diese Räume wurden vom Verf. in einer Reihe von Noten untersucht: *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **49**, 1045—1055, 1134—1141, 1142—1152 (1946) und dies. Zbl. **29**, 221, **31**, 361.] Mittels einer ähnlich eingeführten Abbildung T einer Untermenge E^* von E ($E - E^*$ ist abzählbar) in die positiven reellen Zahlen wird eine Funktion $\Lambda(A)$ für jedes $A \in E^*$ erklärt mit der Festsetzung: $\Lambda(A) = \Gamma(T(A))$, wo Γ ein äußeres Carathéodorysches Maß der positiven reellen Zahlen ist. Es werden verschiedene Eigenschaften von Λ bewiesen, und endlich wird gezeigt, daß Λ auch ein äußeres Carathéodorysches Maß in E darstellt.

L. Fuchs.

Sikorski, R.: Generalized limits and means. *Ann. Soc. Polon. Math.* **25**, dédié à H. Steinhaus, 106—109 (1952).

Mit einer (für Gruppen üblichen) Definition der Auflösbarkeit einer Halbgruppe wird in Verallgemeinerung eines früheren Ergebnisses (s. dies. Zbl. **42**, 361) bewiesen: Es sei G eine auflösbare Halbgruppe von Transformationen der Menge T in sich. Dann kann man jeder Abbildung f von T in einen linearen topologischen Raum, für welche die abgeschlossene konvexe Hülle $K(f)$ des Bildes $f(T)$ bikompakt ist, eine Abbildung $\Phi(f, t)$, $t \in T$, in solcher Weise zuordnen, daß (I) $\Phi(f, t) = \Phi(f, \varphi(t)) = \Phi(f \varphi, t)$ für $t \in T$, $\varphi \in G$; (II) $\Phi(f, t) \in K(f \varphi)$ für $t \in T$, $\varphi \in G$; (III) für jede stetige lineare Transformation F des Produktraumes (X_1, \dots, X_j) der lin. top. Räume X_i in den lin. top. Raum Y und für Abbildungen f_i von T in X_i , $i = 1, \dots, j$, mit bikompakten $K(f_i)$ die Gleichung $\Phi(F(f_1, \dots, f_j), t) = F(\Phi(f_1, t), \dots, \Phi(f_j, t))$ für $t \in T$ besteht.

G. Aumann.

Obreanu, Filip: Sur un théorème de Baire. *Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz.* **4**, 285—288, russische und französ. Zusammenfassgn. 288—289, 289—290 (1952) [Rumänisch].

Selon l'A., la marque d'un espace topologique complètement régulier E est le plus petit cardinal représentant la puissance d'un système fondamental d'entourages définissant sur E une structure uniforme compatible avec sa topologie. Soit E un espace topologique, E' un espace uniforme de marque m ; soit I un ensemble ordonné filtrant à droite, de puissance inférieure ou égale à m ; soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions continues, définies sur E , à valeurs dans E' , convergente en tout point de E vers une fonction f suivant le filtre des sections à droite de I . L'ensemble des points de discontinuité de f est alors réunion d'une famille de puissance inférieure ou égale à m de parties rares de E .

T. Ganea.

Lejbenzon, Z. L.: Über den Ring der stetigen Funktionen auf dem Kreise. *Uspechi mat. Nauk* **7**, Nr. 4, 163—164 (1952) [Russisch].

Soit C l'espace des fonctions continues sur la circonférence $|t| = 1$ et A le sous-anneau fermé minimal contenant les théorèmes de Šilov (ce Zbl. **45**, 212), l'A. déduit le résultat suivant: Si $\varphi(t) \in C$ est une fonction de saut, alors l'anneau minimal fermé de C contenant $A \cup \{\varphi\}$ est C . — Une fonction de saut est définie comme la différence entre ses intégrales de Cauchy à l'intérieur et à l'extérieur de $|t| = 1$. Les fonctions qui satisfont à la condition de Lipschitz avec l'exposant $0 < \alpha \leq 1$ rentrent dans cette catégorie.

G. Marinescu.

Nachbin, Leopoldo: Einige Probleme der Funktionalanalysis. *Symposium Problem. mat. Latino América*, 19—21 Dic. 1951, 15—21 (1952) [Spanisch].

Der Weierstraßsche Satz über die gleichmäßige Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch Polynome ist von M. H. Stone [Math. Mag. **21**, 167—184, 237—254 (1948)] im Sinne der Funktionalanalysis verallgemeinert worden. Verf. bespricht verschiedene Formulierungen dieses Satzes im Bereich der reellen stetigen, bzw. mit k stetigen Ableitungen versehenen Funktionen und formuliert analoge Vermutungen für den Raum der in einer offenen oder kompakten Menge analytischen Funktionen.

G. Doetsch.

Braconnier, Jean: Les algèbres de groupes et leurs représentations. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* **15**, 27—34 (1952).

Premier article d'exposition, qui tient compte des résultats de Gelfand, Godement, Mautner, Neumark, Raikov, Segal. La rédaction est condensée. Aucune démonstration n'est donnée. Titres de paragraphes: algèbres associées à un groupe, représentations d'un groupe, représentations unitaires simples et irréductibles, représentations des algèbres de groupes, doubles représentations unitaires d'algèbres et de groupes.

J. Dixmier.

Takeda, Zirō and Takasi Turumaru: On the property „position p' “. *Math. Japonicae* **2**, 195—197 (1952).

Deux projecteurs orthogonaux e_1, e_2 dans un espace hilbertien sont dits en position p' selon le rapporteur si $e_1 \cap (1 - e_2) = (1 - e_1) \cap e_2 = 0$. Les Aa. établissent diverses propriétés simples de cette notion. *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Zirô Takeda: The Radon-Nikodym theorem of traces for a certain operator algebra. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 275—283 (1952).

Les Aa. prouvent directement des cas particuliers de théorèmes de H. A. Dye (ce Zbl. 47, 111). Soient R un anneau d'opérateurs fini, Z son centre, τ une trace complètement additive sur R . Si $z_n \in Z$ tend en croissant vers $z \in Z$, alors $\tau(z_n)$ tend vers $\tau(z)$. Si σ est une trace majorée par τ , on a $\sigma(x) = \tau(xa)$ pour tout $x \in R$, avec un $a \in Z$ unique (au moins si τ est fidèle). *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Takasi Turumaru: Simple algebras of completely continuous operators. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 303—308 (1952).

Soit A une C^* -algèbre simple (= sans idéaux bilatères fermés non triviaux) d'opérateurs complètement continus dans un espace hilbertien; alors H est somme hilbertienne du sous-espace annulé par A et de sous-espaces H_i en nombre fini qui sont des A -modules isomorphes; A est isomorphe à la C^* -algèbre de tous les opérateurs complètement continus sur H_i . En définissant la notion de commutation d'une manière convenable (entre C^* -algèbres d'opérateurs complètement continus d'une part, et C^* -algèbres de dimension finie contenant 1 d'autre part), les Aa. obtiennent alors aisément des énoncés satisfaisants de dualité. *J. Dixmier.*

Umegaki, Hisaharu: Operator algebra of finite class. Kôdai math. Sem. Reports Nr. 4, 123—129 (1952).

Soit \mathfrak{A} une $*$ -algèbre normée complexe. Une application $x \rightarrow x^\natural$ de \mathfrak{A} dans son centre Z est appelée un „centering“ si $(xy)^\natural = (yx)^\natural, (xz)^\natural = x^\natural z, x^\natural x^\natural = x^\natural^*$, $z^\natural = z, \|x^\natural\| \leq \|x\|, (x^*x)^\natural = 0 \Rightarrow x = 0$ pour $x, y \in \mathfrak{A}, z \in Z$. L'A. définit aussi les traces et les caractères sur \mathfrak{A} , et l'expression des traces comme intégrales de caractères sur une certaine C^* -algèbre associée à \mathfrak{A} . Quand \mathfrak{A} est une algèbre d'un groupe G (en un sens assez large), l'A. donne les relations entre l'existence de „centerings“ et celle de voisinages compacts de e invariants par le groupe $I(G)$ des automorphismes intérieurs de G . Quand il existe un système fondamental de tels voisinages, on a une formule de Plancherel et un théorème de réciprocité de Fourier. Si $I(G)$ est précompact, les „centerings“ des différentes algèbres de groupe sont compatibles. Il y a des relations étroites avec un article de Godement (ce Zbl. 43, 32). *J. Dixmier.*

Takenouchi, Osamu: On the structure of maximal Hilbert algebras. Math. J. Okayama Univ. 1, 1—32 (1952).

This paper is a self-contained exposition of the theory of Hilbert algebras (see this Zbl. 45, 213). Proofs are given for the classification theorem stated in the paper cited above. If \mathfrak{H} is separable, the algebras in (3) are shown to be simple (no two-sided proper closed ideals). The non-separable case remains open. *E. Hewitt.*

Sunouchi, Haruo: The irreducible decompositions of the maximal Hilbert algebras of the finite class. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 207—215 (1952).

Soient \mathfrak{A} une algèbre hilbertienne, \mathfrak{H} l'espace hilbertien complété, L, R et S les anneaux d'opérateurs et l'involution associés à \mathfrak{A} dans \mathfrak{H} , \mathfrak{H}^\natural l'ensemble des éléments centraux de \mathfrak{H} ($x \in \mathfrak{H}$ est central si $USUSx = x$ pour tout opérateur unitaire U de L). L'A. caractérise \mathfrak{H}^\natural de diverses manières. Quand L et R sont finies, le projecteur $x \rightarrow x^\natural$ sur \mathfrak{H}^\natural correspond à l'application $^\natural$ canonique de L et R . Les caractères de L et R permettent de décomposer \mathfrak{A} , \mathfrak{H} , et, finalement, L et R eux-mêmes, en sommes continues, les „composantes“ de L et R étant des facteurs. Comme l'A. le signale, beaucoup de démonstrations sont des transcriptions de celles

de Godement (ce Zbl. 43, 32), relatives au cas où \mathfrak{A} est l'algèbre hilbertienne définie par une mesure centrale de type positif sur un groupe localement compact.

J. Dixmier.

Sunouchi, Haruo: An extension of the Plancherel formula to unimodular groups. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 216—230 (1952).

Soit G un groupe localement compact unimodulaire. Une mesure centrale de type positif μ sur G définit une double représentation unitaire $(\mathfrak{S}, U_s, V_s, S)$ de G . Soient R^s et R^d les anneaux d'opérateurs engendrés par les U_s et les V_s ; ils sont semi-finis (= sans composantes purement infinies). Ceci est dû essentiellement à Godement (ce Zbl. 43, 32). — Soit R un anneau d'opérateurs. Moyennant le choix d'un projecteur fini E de support central 1 dans R , une théorie de l'A. (ce Zbl. 46, 119; 47, 358) permet de construire une application¹ sur une certaine sous-algèbre R_E de R . À partir de là, l'A. généralise des résultats de Godement (loc. cit.) sur la correspondance entre idéaux bilatères de R_E et idéaux du centre $R^{\frac{1}{2}}$ de R , entre traces (resp. caractères) de R_E et formes linéaires (resp. caractères) sur $R^{\frac{1}{2}}$. Soit Ω l'espace compact des caractères de $R^{\frac{1}{2}}$. — Supposons que R soit l'anneau R^s défini plus haut à partir de μ . En gros, l'A. définit: 1) une mesure positive $\hat{\mu}$ sur X (qui est un certain espace localement compact déduit de Ω); 2) pour tout $\sigma \in X$, une double représentation unitaire de R^s_σ (l'A. n'étudie pas son irréductibilité); 3) pour certains $x \in \mathfrak{S}$, un champ de vecteurs $\sigma \rightarrow x(\sigma)$, de façon qu'on ait une formule du type $\langle x, y \rangle = \int_X \langle x(\sigma), y(\sigma) \rangle d\hat{\mu}(\sigma)$. [L'A. se ramène au cas d'anneaux d'opérateurs finis en utilisant des projecteurs finis, et utilise son article antérieur (rapport précéd.).] La formule de Plancherel ainsi obtenue ne se réduit malheureusement pas à la formule connue dans le cas abélien. Lorsqu'on change E , on ne sait comment change $\hat{\mu}$ (qui n'est pas une mesure de Radon, étant obtenue par „recollement“ de mesures de Radon construites dans des ouverts de X). Remarque: dans un mémoire non encore publié, Godement a obtenu une formule de Plancherel qui se réduit bien à la formule connue dans le cas abélien; X n'est plus localement compact en général.

J. Dixmier.

Sakai, Shoichiro: A remark on Mautner's decomposition. Kodai math. Sem. Reports Nr. 4, 107—108 (1952).

F. I. Mautner (dies. Zbl. 35, 298) bewies: G sei lokalkompakt und Vereinigung abzählbarvieler kompakter Mengen; zerfällt die unitäre Darstellung $U(g)$ von G nach einem direkten Integral $\mathfrak{S} = \int_{\oplus} \mathfrak{S}_t$ in die Darstellungen $U(g, t)$, so kann man

$\tilde{U}(g, t)$ in denselben Äquivalenzklassen finden, so daß für fast alle t $\tilde{U}(g, t) = V_t(g)$ fast überall auf G gilt, $V_t(g)$ eine stark stetige unitäre Darstellung. Verf. beweist, daß der Zusatz „fast überall auf G “ im Fall einer separabel lokalkompakten Gruppe wegfallen kann. Auf anderem Weg bewies dies bereits R. Godement. *G. Köthe.*

Matsushita, Shin-ichi: On topological groups. J. Inst. polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 3, 27—42 (1952).

The author introduces the concept of the Markoff-extensions of arbitrary topological groups, and intends to prove a general duality theorem which includes Tannaka-Krein's duality theorem (T. Tannaka, this Zbl. 20, 9; M. Krein, this Zbl. 24, 415) as a special case, and also gives a proof of a theorem of Iwasawa concerning the correspondence of the representations of the locally compact groups and their group rings [K. Iwasawa, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 67—70 (1944)]. He first proves the following existence theorem and calls such groups G_0 Markoff-extensions of G : For any topological group G there exists at least one maximally almost periodic group G_0 , with the properties α) there exists a continuous homomorphism Φ of G_0 onto G , β) G is contained in G_0 as a subspace, and generates G_0 algebraically, Φ fixes each element of G invariant. Let $A(G_0)$ be the ring of all almost periodic functions on G_0 with its uniform topology, and \mathfrak{S} be the group of bounded linear operators S , with i) $S(fg) = S(f)S(g)$, ii) $S(f) = \bar{S}(\bar{f})$ ($f, g \in A(G_0)$). Let \mathfrak{S}_0 be the commutator of the group $\mathfrak{S}(G_0) = \{S(a_0)/S(a_0)f(x_0) = f(a_0^{-1}x_0), a_0, x_0 \in G_0\}$ in \mathfrak{S} . Then \mathfrak{S}_0 turns out to a compact group, if we introduce in it the weak topology. G is by right-regular representation Φ continuously and algebraically isomorphic onto $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$. There is a dense subgroup \mathfrak{S}'_0 of \mathfrak{S}_0 , with the normal subgroup \mathfrak{H} such that $\mathfrak{S}_0 \cong \mathfrak{S}'_0/\mathfrak{H}$. If we introduce the functionals \tilde{S} with $\tilde{S}(f) = (Sf)(e)$, $f \in A(G_0)$, e = unit element of G and consider \tilde{S} instead of S , then we have a general duality theorem of Tannaka-Krein's type. However we have to mention one of the essential points of Tannaka-Krein's theorem lies in stating the dual aspects of linear multiplicative functional on the ring of linear aggregates $\sum a_{ij} d_{ji}(x)$ [$x \rightarrow d_{ij}(x)$ being normal representations of G] rather than the ring $A(G)$. In the last section the author applies.

the concept of Markoff-extension to the case of locally compact groups, and gives a proof of the Iwasawa's theorem, which asserts the one-to-one correspondence between the continuous normal representations $x \rightarrow D(x)$ of G and the continuous representations $f \rightarrow D(f)$ of the group ring $L(G)$ by the relation $D(f) = \int f(x) D(x) dx$. T. Tannaka.

Matsushita, Shin-ichi: Multiplicative linear functionals on B -algebras. J. Inst. polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 3, 15—25 (1952).

As is well known multiplicative linear functionals on a commutative Banach algebra \mathfrak{A} can be regarded as continuous functions on a compact space of its maximal ideals. In this paper the author presents a survey of multiplicative linear functionals on not only commutative B -algebras or B^* -algebras with unit e of norm 1. In the chapter (I) he introduces the cohomology groups of Hochschild's type, corresponding to each multiplicative linear function φ with $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, by the coboundary operation $(\delta\varphi \cdot \tau^n)(a_1, \dots, a_{n+1}) = \varphi(a_1) \cdot \tau^n(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \tau^n(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau^n(a_1, \dots, a_n) \varphi(a_{n+1})$, τ^n being multilinear functionals with $\tau^n(a_1^*, \dots, a_n^*) = \overline{\tau^n(a_1, \dots, a_n)}$. $N^n(\mathfrak{A})$ and $\hat{Z}^n(\mathfrak{A}, \varphi)$ denote respectively the space of τ^n with $\tau^n(e, \dots, e) = 0$ and the space of cocycles modulo $N^n(\mathfrak{A})$. For real B -algebras $\hat{Z}^n(\mathfrak{A}, \varphi)$ is a zero group for n even, $\hat{Z}^n(\mathfrak{A}, \varphi)$ ($\varphi \in \Phi = \{\varphi\}$) are mutually disjoint and moreover linearly independent with respect to finite convex combinations for n odd. In the second chapter he introduces the functional-radical $\mathfrak{R}^0 = \{x/\varphi(x) = 0, \varphi \in \Phi\}$ which contains the Jacobson radical \mathfrak{R} . The author calls Φ to be full, semi-full or null, if $\mathfrak{R}^0 = \{0\}$, $= \mathfrak{R}$ or $= \mathfrak{A}$ respectively. For any B^* -algebras \mathfrak{A}^* fullness of $\Phi(\mathfrak{A}^*)$ is equivalent to the commutativity of \mathfrak{A}^* . This can be proved easily by Kadison's representation theorem, and the author presents a proof of this representation theorem without employing spectral theory, as was done by Kadison (R.V. Kadison, this Zbl. 42, 348). In the last chapter he obtains among others the following result. A necessary and sufficient condition for $\Phi^0 = \Phi - \theta$ (\mathfrak{A}^* commutative) to be a compact group is that \mathfrak{A}^* is isometrically isomorphic to an almost periodic algebra over a certain maximally almost periodic group G , and in that case Φ^0 contains G as a dense subgroup. He finally remarks that from the above-mentioned result we can deduce Tannaka's duality theorem, but it seems to the present referee, strictly speaking this is not the case. For the duality theorem concerns essentially multiplicative functionals on the ring of linear aggregates $\sum a_{ij} d_{ij}(x)$ of the coefficients of normal representations $x \rightarrow D(x) = (d_{ij}(x))$, and main difficulty lies in proving the extensibility of such functionals into the ring of all almost periodic functions. T. Tannaka.

Schwartz, Laurent: Théorie des noyaux. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 220—230 (1952).

Bekanntlich lassen sich in der klassischen Analysis nicht alle linearen Operationen durch Integraltransformationen $g(x) = \int K(x, y) f(y) dy$ mit einer Kernfunktion $K(x, y)$ darstellen; so z. B. nicht die Identität, die Multiplikation mit einer Funktion und die Ableitung. Dirac hat es auf illegitimem Weg vermittels seiner Pseudofunktion δ zu erreichen versucht. Verf. zeigt, wie die Theorie der Distributionen alle in der Praxis auftretenden linearen Operationen als Skalarprodukte, die als Integrale geschrieben werden können: $T(\varphi) = T \cdot \varphi = \int_{R^n} T_x \varphi(x) dx$, darzustellen gestattet. Wenn x in X^m , y in Y^n variiert (wo X^m , Y^n reelle Vektorräume bedeuten, die zu R^m , R^n isomorph sind), so wird unter einem Distributionskern (oder kurz Kern) eine Distribution K_{xy} über $X^m \times Y^n$ verstanden. Ein Kern definiert 1° eine Bilinearform $B_K(u, v) = \iint_{X^m \times Y^n} K_{xy} u(x) v(y) dx dy$ (wo das Integral ein skalares Produkt bedeutet), 2° eine lineare Transformation $v \rightarrow \mathfrak{L}_K(v)$ vermittels

$$\int_{X^m} [\mathfrak{L}_K(v)]_x u(x) dx = B_K(u, v) = \iint_{X^m \times Y^n} K_{xy} u(x) v(y) dx dy,$$

3° eine lineare Transformation $u \rightarrow \mathfrak{L}'_K(u)$, welche die Transponierte zu $\mathfrak{L}_K(v)$ ist, vermittels $\int_{Y^n} [\mathfrak{L}'_K(u)]_y v(y) dy = B_K(u, v)$. Ersetzt man v durch f und $\mathfrak{L}_K(v)$ durch g und ist K eine gewöhnliche Funktion, so geht \mathfrak{L}_K in die klassische Integraltransformation über. Daher darf man $\mathfrak{L}_K(f)$ in der Form $K \cdot f$ schreiben:

$$\int_{X^m} [K \cdot f]_x \varphi(x) dx = \iint_{X^m \times Y^n} K_{xy} \varphi(x) f(y) dx dy.$$

Durch solche Transformationen lassen sich speziell Identität, Multiplikation und Ableitung darstellen, und es gilt sogar der allgemeine Satz: Jede stetige lineare Transformation des mit starker Topologie versehenen Raumes $(\mathfrak{D})_y$ in den mit schwacher Topologie versehenen Raum $(\mathfrak{D}')_y$ kann in der Form $f \rightarrow K \cdot f$ dargestellt werden, wo K eindeutig bestimmt ist. — Die Beweise dieses Satzes sowie einer Reihe weiterer Sätze, welche die Themen: Fortsetzung einer Trans-

formation, kompakte und reguläre Kerne, Volterrasche Komposition betreffen, sollen nebst Anwendungen auf elliptische und hyperbolische Differentialoperatoren an anderer Stelle veröffentlicht werden. *G. Doetsch.*

Gates jr., Leslie D.: Differential equations in the distributions of Schwartz. Iowa State College, J. Sci. **27**, 105—111 (1952).

Es wird die Differentialgleichung $p_0(x) T^{(n)} + \dots + p_n(x) T = S$ betrachtet, wo jedes $p_i(x)$ unbeschränkt oft differenzierbar und T eine gesuchte, S eine gegebene Distribution im Sinne von L. Schwartz ist. Die linke Seite wird mit $L(T)$ bezeichnet. L sei der zu L adjungierte Operator. Der Wert der Distribution T für die Testfunktion φ wird mit $T \cdot \varphi$ bezeichnet. Der Operator L bildet den Raum D der Testfunktionen φ auf einen linearen Teilraum D_α von D ab. Das Hauptresultat lautet: Wenn a) die Abbildung $\bar{L}(\varphi) = \alpha$ eine stetige Inverse $\bar{L}^{-1}(\alpha) = \varphi$ hat, b) die Distributionen T_1, \dots, T_n eine Basis für den Teilraum der Lösungen von $L(T) = 0$ bilden, c) aus $T_1 \cdot \varphi = \dots = T_n \cdot \varphi = 0$ folgt, daß φ ein Element von D_α ist, dann hat die Differentialgleichung $L(T) = S$ eine eindeutige allgemeine Lösung der Form $T \cdot \varphi = \sum_{i=1}^n c_i T_i \cdot \varphi +$

$S \cdot L^{-1} \left(\varphi - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right)$, wo $c_i = T_i \cdot \varphi$ und die φ_i eine linear unabhängige Menge von Testfunktionen sind, die $T_i \cdot \varphi_j = \delta_{ij}$ befriedigen. Als Beispiel einer partiellen Differentialgleichung in Distributionen wird die Wärmeleitungsgleichung behandelt. *G. Doetsch.*

Chodžaev, L. S.: Das verallgemeinerte Newtonsche Potential einer unbeschränkten Masse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **86**, 893—896 (1952) [Russisch].

If ϱ and u are distributions in the sense of Schwartz (L. Schwartz, Théorie des distributions I, II., Actual. sci. industr. Nr. 1091 et 1122, Paris 1950 et 1951, ce Zbl. **37**, 73; **42**, 114), then Poisson's equation $\Delta u = \varrho$, (real n -space, $n > 2$), has a solution u defined by $u(\varphi) = \varrho(P\varphi)$ where φ is the test-function and $P\varphi(x) = \int |x-y|^{2-n} \varphi(y) dy \Gamma(\frac{1}{2}n)/(2-n) 2\pi^{n/2}$, provided that ϱ is such that $\varrho(P\varphi)$ has a sense and is continuous in φ . Examples of such ϱ are the Dirac distribution and its derivatives. There are other examples which do not have Fourier transforms in the sense of Schwartz. *L. Gårding.*

Laurikainen, K. V.: Über die Diracsche „ δ -Funktion“ und gewisse divergierende Integrale. Ann. Univ. Turku., Ser. A **9**, Nr. 2, 13 S. (1952).

Systematische Darstellung einiger Methoden, mit denen man in der Quantentheorie divergierenden Integralen bestimmte Werte zuschreibt. *G. Höhler.*

Alexiewicz, A. and W. Orlicz: On the differentials in Banach spaces. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 95—99 (1952).

Let X and Y be two real Banach spaces and $y = F(x)$ an operator from a set $A \subset X$ to Y . If for $x \in A$, $h \in X$ the „differential“ $\delta F(x, h) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(x + \tau h) - F(x)}{\tau}$

exists, it is homogeneous in h but not necessarily additive. The following theorem is proved: Let X be separable and $F(x)$ be continuous in an open set $A \subset X$. If $\delta F(x, h)$ exists for all $x \in A$ and $h \in X$, then it is additive in h and continuous in x for all $x \in R$, where R is a residual set in A . The operator $F(x)$ is called Fréchet-differentiable at x if $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x) - \delta F(x, h)}{\|h\|} = 0$. An example is given of an

$F(x)$ from a separable X to itself, which satisfies a Lipschitz condition and has everywhere differentials $\delta F(x, h)$, jointly continuous in x and h , but which is nowhere Fréchet-differentiable. *W. W. Rogosinski.*

Lorentz, G. G. and M. S. Macphail: Unbounded operators and a theorem of A. Robinson. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III Ser. **46**, 33—37 (1952).

Die bekannten Sätze von Toeplitz u. a. über „konvergenztreue“ Matrixtransformationen $y_m = \sum_{n=1}^{\infty} t_{mn} x_n$ lassen sich auf den Fall erweitern, daß die t_{mn} lineare Operatoren in einem B -Raum sind (angewandt auf die x_n); vgl. Robinson, dies. Zbl. **39**, 62; Melvin-Melvin, dies. Zbl. **42**, 125; Ref., dies. Zbl. **46**, 336; in der

vorliegenden Arbeit Th. 1. Verf. geben einen kurzen Beweis für die verallgemeinerte Fassung, wobei auch die Möglichkeit unbeschränkter Operatoren t_{mn} erfaßt wird. Die Beweismethoden (Th. 3 und 4) sind von allgemeinem Interesse. Eine weitere Anwendung betrifft „absolute Konvergenztreue“. *K. Zeller.*

Kato, Tosio: Notes on some inequalities for linear operators. Math. Ann. 125, 208—212 (1952).

Es sei Q ein linearer abgeschlossener Operator im Hilbertschen Raume und B, A selbstadjungierte Operatoren mit Definitionsbereichen \mathfrak{D}_B bzw. \mathfrak{D}_A , die enthalten sind im Definitionsbereich von Q bzw. seiner Adjungierten Q^* , und es gelte $\|Qx\| \leq \|Bx\|$ und $\|Q^*y\| \leq \|Ay\|$ für $x \in \mathfrak{D}_B$ und $y \in \mathfrak{D}_A$. Wie der Ref. gezeigt hat (vgl. dies. Zbl. 43, 326), ist dann $|(Qx, y)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu x\| \|A^{1-\nu} y\|$ für $0 \leq \nu \leq 1$ und $x \in \mathfrak{D}_B, y \in \mathfrak{D}_A$. Mit Hilfe der v. Neumannschen Theorie der adjungierten Funktionaloperatoren (dies. Zbl. 4, 216) wird gezeigt, daß der Faktor $1 + |2\nu - 1|$ durch 1 ersetzt werden kann. Gleichzeitig wird ein elementarer Beweis für die Tatsache gegeben, daß aus $0 \leq A \leq B$ (A, B selbstadjungiert) die Relation $A^\nu \leq B^\nu$ für $0 \leq \nu \leq 1$ folgt (vgl. ebenso dies. Zbl. 43, 326).

E. Heinz.

Sobolev, V. I.: Über eine Eigenschaft der selbstadjungierten Operatoren im Hilbertschen Raume. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4, 169—172 (1952) [Russisch].

L'A. démontre, directement, c'est-à-dire, sans utiliser la décomposition spectrale, que l'ensemble des opérateurs autoadjoints permutables avec un opérateur donné, considéré comme espace sémi-ordonné, satisfait à l'axiome suivant de Kantorovitch: „chaque sous-ensemble borné supérieurement admet une borne supérieure“.

G. Marinescu.

Sz.-Nagy, Béla: A moment problem for self-adjoint operators. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 285—293 (1952).

Soient X un ensemble compact de nombres réels, $C(X)$ l'espace des fonctions continues réelles sur X , H un espace hilbertien; considérons une mesure opérationnelle ≥ 0 sur X , i. e. une application linéaire μ de $C(X)$ dans l'espace des opérateurs hermitiens continus de H telle que $\mu(f) \geq 0$ pour $f \geq 0$. R. V. Kadison a prouvé (ce Zbl. 47, 357) que $[\mu(x)]^2 \leq \|\mu(1)\| \mu(x^2)$. L'A. montre que μ est définie par une famille croissante $x \rightarrow F(x)$ ($x \in X$) d'opérateurs hermitiens positifs, et, utilisant un théorème de Neumark, obtient la forme générale des mesures μ (d'où une démonstration immédiate du théorème de Kadison et des résultats sur les cas limites). Enonçons le résultat dans le cas plus simple où $\mu(1) = 1$: il existe un espace hilbertien H_+ contenant H et une mesure opérationnelle ≥ 0 μ_+ sur X à valeurs dans l'espace des opérateurs hermitiens continus de H^+ , telle que $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ (i. e. une décomposition de l'unité dans H_+) et telle que $\mu(f) = P_H \cdot \mu_+(f)$.

J. Dixmier.

Gachov, F. D.: Zu einer Bemerkung von I. C. Gochberg. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 6 (52), 181—182 (1952) [Russisch].

Gochberg (dies. Zbl. 46, 121) hat Integraloperatoren vom Typus

$$A\varphi(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + T\varphi(t)$$

in $L^2(\Gamma)$ betrachtet (wo T ein vollstetiger linearer Operator ist), und bewiesen, daß die Bedingung $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ auf Γ notwendig und hinreichend dafür ist, daß A „regularisiert“ werden kann, d. h. daß ein beschränkter linearer Operator M und ein vollstetiger linearer Operator T_1 existiert mit $MA = I + T_1$. Verf. bemerkt, daß in seiner Diss. Kazan 1941 [Isvestija Kazan. fiz.-mat. Obšč. 14, 75—159 (1949)] und in Arbeiten von D. I. Šerman (dies. Zbl. 31, 357; 44, 322) und L. A. Čikin (Singuläre Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe und der singulären Gleichungen, Diss. Kazan 1952) bewiesen wurde, daß die Lösung von $A\varphi(t) = g(t)$,

in allen Fällen, wo diese Gleichung „auflösbar“ ist, auf die Lösung einer Fredholm-schen Integralgleichung zurückführbar ist, und zwar u. U. auch im Falle, daß $a^2(t) - b^2(t)$ nicht überall auf I von 0 verschieden ist. B. Sz.-Nagy.

Weinberger, H. F.: An optimum problem in the Weinstein method for eigen-values. *Pacific J. Math.* **2**, 413—418 (1952).

Die Methode von Alexander Weinstein zur Bestimmung der Eigenwerte λ'_n eines vollstetigen positiv definiten hermiteschen Operators L' in einem Raum \mathfrak{R}' setzt die Kenntnis eines ebensolchen Operators L in einem Raum $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}'$ voraus, für welchen alle Eigenwerte λ_n und Eigenlösungen u_n ($Lu_n = \lambda_n u_n$) bekannt sind und die Projektion von L auf \mathfrak{R}' der gegebene Operator L' ist. Die Methode besteht darin, endlich viele Elemente p_1, \dots, p_m aus $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \ominus \mathfrak{R}'$ zu wählen und \mathfrak{R}' durch den zwischen \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' gelegenen Raum $\mathfrak{R}^{(m)} = \mathfrak{R} \ominus \{p_1, \dots, p_m\}$ zu approximieren; die Eigenwerte $\lambda_n^{(m)}$ von L auf $\mathfrak{R}^{(m)}$ können dann bestimmt werden und sind obere Schranken für die gesuchten Eigenwerte λ'_n . — Verf. verfeinert seine frühere Untersuchung (dies. Zbl. **47**, 112), indem er fragt, wie klein $\lambda_n^{(m)}$ bei gegebenen \mathfrak{R} , L , \mathfrak{R}' , L' und m durch geeignete Wahl der Elemente $p_1, \dots, p_m \in \mathfrak{P}$ gemacht werden kann. Er findet unter diesen Bedingungen $\lambda_n^{(m)} = \max(\lambda'_n, \lambda_{n+m})$ als optimalen (kleinsten möglichen) Wert. Der Beweis im Falle $m > 1$ scheint dem Referenten unvollständig (Formel 26).

H. Wielandt.

Katô, Tosio: On the perturbation theory of closed linear operators. *J. math. Soc. Japan* **4**, 323—337 (1952).

This paper presents further development of the results on the perturbations of closed linear operators in a general Banach space \mathfrak{B} [see B. Sz.-Nagy, this Zbl. **45**, 216, and a paper of the author in Japanese language, *Sugaku (Mathematics)* **2**, 201—208 (1950)]; it has some points of contact with, but was written independently of, a paper of F. Wolf (this Zbl. **46**, 124). — Let T_0 be a closed linear operator in \mathfrak{B} , with domain \mathfrak{D} dense in \mathfrak{B} , and let T_1, T_2, \dots be linear operators with the same domain \mathfrak{D} and such that $\|T_k f\| \leq p^{k-1}(a\|f\| + b\|T_0 f\|)$ ($f \in \mathfrak{D}$; $k = 1, 2, \dots$) with some constants $p, a, b \geq 0$. Suppose C is a closed rectifiable curve in the complex plane, passing entirely in the resolvent set of T_0 . It has been proved by the reviewer (l. c.) that, for $|\epsilon| < (p + \alpha)^{-1}$, where $\alpha = a \max_{z \in C} \|(T_0 - zI)^{-1}\| + b \max_{z \in C} \|I + z(T_0 - zI)^{-1}\|$, the operator $T(\epsilon) = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots$ has domain \mathfrak{D} , is closed, C is contained also in the resolvent set of $T(\epsilon)$, and the spectral projection

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_C [zI - T(\epsilon)]^{-1} dz$$

corresponding to that part of the spectrum of $T(\epsilon)$ which lies in the interior of C , is a power series of the complex parameter ϵ , and therefore the dimension of the corresponding spectral subspace $\mathfrak{M}(\epsilon)$ is constant. It follows that if $\dim \mathfrak{M}(0)$ is finite, $= m$ say, then the spectrum of $T(\epsilon)$ consists, in the interior of C , of a finite number of eigenvalues whose „principal multiplicities“ add to m . In the present paper, the author investigates the function-theoretic comportment of these eigenvalues $\lambda_1(\epsilon), \dots, \lambda_s(\epsilon)$. He shows that the set of these functions of ϵ comprise the total branches of one or several analytic functions which are continuous and bounded in the domain D_0 : $|\epsilon| < (p + \alpha)^{-1}$, and which possess only algebraic singularities. Except at the values of ϵ which are either branch points of $\lambda_k(\epsilon)$, or at which $\lambda_k(\epsilon)$ coincides with some other $\lambda_j(\epsilon)$, the principal multiplicity of $\lambda_k(\epsilon)$ is constant, and we have the representation of the resolvent

$$[T(\epsilon) - zI]^{-1} = S_z(\epsilon) + \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{P_k(\epsilon)}{[\lambda_k(\epsilon) - z]} + \frac{A_k(\epsilon)}{[\lambda_k(\epsilon) - z]^2} + \dots + \frac{A_k^{m-1}(\epsilon)}{[\lambda_k(\epsilon) - z]^m} \right\}$$

($z \in C$), where $S_z(\epsilon)$ is regular analytic in the domain D_0 , while $P_k(\epsilon)$ and $A_k(\epsilon)$ are branches of analytic operator-functions with algebraic singularities only; $P_k(\epsilon)$ is the spectral projection corresponding to the eigenvalue $\lambda_k(\epsilon)$. It is also shown how in case of selfadjoint $T(\epsilon)$ these results yield Rellich's fundamental theorem in perturbation theory. An important part is played in the reasoning by a method, used by the author also in a previous paper [*J. Phys. Soc. Japan* **5**, 435—439 (1950)], and which permits to show that there exists an operator $V(\epsilon)$ with the following properties: $V(\epsilon)$ and $V^{-1}(\epsilon)$ are bounded, everywhere defined in \mathfrak{B} , and depend regularly on ϵ in the domain D_0 , and such that $V(\epsilon)$ maps $\mathfrak{M}(0)$ on $\mathfrak{M}(\epsilon)$ in a one-to-one fashion. (The reviewer has proved this for a domain smaller than D_0 , see B. Sz.-Nagy, this Zbl. **47**, 360).

B. Sz.-Nagy.

Slobodjanskij, M. G.: Eine Abschätzung des Fehlers für die gesuchte Größe bei der Lösung linearer Probleme mit der Variationsmethode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 243—246 (1952) [Russisch].

A sei ein gegebener positiv definiter symmetrischer Operator in einem Hilbertschen Raum und u_0 bzw. v_0 bei gegebenem f und φ die Lösung von $F_f(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \text{Min.}$ bzw. $F_\varphi(v) = (Av, v) - 2(v, \varphi) = \text{Min.}$ Das Ritzsche Verfahren mit einem Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$ ergebe für u_0 die Näherung u_n , für v_0 die Näherung v_n . Es werde die Größe (f, v_0) gesucht und dafür (f, v_n) oder $\frac{1}{2}[(f, v_n) + b_n^*]$ als Näherung verwendet. Dabei ist b_n^* ein aus einer anderen Variationsaufgabe (z. B. nach dem Prinzip von Castigliano) berechneter Näherungswert für (f, v_0) . Der Fehler der Näherungswerte wird abgeschätzt und das Ergebnis auf räumliche Aufgaben der Elastizitätstheorie und auf Beispiele von Durchbiegungen ebener Platten angewendet.

L. Collatz.

Sard, Arthur: Approximation and variance. Trans. Amer. math. Soc. 73, 428—446 (1952).

Let H be the space of complex-valued functions $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, whose squares are integrable with respect a non-decreasing function $m(x)$. A process is an operator T on H to H ; it is used to approximate $f \in H$ in the following way. Given $f + \delta f \in H$, where δf is an error, the author approximates f by $T(f + \delta f)$. Here the error $\delta f = f(x, w)$ is a function of (x, w) , w being a point of a probability space, such that the expectation $E \delta f = 0$ identically in x . For a fixed closed subspace $M \subseteq H$, an approximation operator A is defined as a bounded linear operator satisfying $EA(f + \delta f) = f$ for $f \in M$, and such that $E \|T \delta f\|^2$ is minimal over such A . An operator T is a least square process if, for each f in H , $(W(f - T f) f - T f)$ is minimal among all T such that $T f \in M$. Here the weight operator W is non-negative such that $\|P_M W P_M f\| \geq b \|P_M f\|$ with a positive b . The variance V of δf is an operator which carries $h \in H$ into $Vh = E(h, \delta f) \delta f$. It is proved that a necessary and sufficient condition that the unique least square process be itself an approximation process is that $VWM \subseteq M$. This extends Aitken's result [Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 138—146 (1945)]. It is proved also that a bounded linear operator A is an approximation operator if and only if $VA^*H \subseteq M$ and $(A - I)M' = 0$; the approximation process is unique if V is positive definite on $M^\perp = H \ominus M$.

K. Yosida.

Cherubino, Salvatore: Matrici e sistemi lineari infiniti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 6, 291—315 (1952).

Es werden Auflösungsverfahren für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten angegeben, die auf abschnittsweiser Lösung beruhen. Die Überlegungen sind vielfach nicht stichhaltig. So wird der Begriff der linearen Abhängigkeit unendlich vieler Spalten einer Matrix nicht präzise formuliert, er wird einmal im Sinne der Abhängigkeit endlich vieler dieser Spalten, ein anderes Mal im Sinn des Verschwindens einer unendlichen Linearkombination gebraucht. Nur im ersteren Sinn kann man in einer unendlichen Matrix eine unabhängige Spaltenmenge herausgreifen, aus der sich die übrigen Spalten linear kombinieren lassen. Dies liefert aber gewiß nicht alle unendlichen Lösungen des Gleichungssystems, wie behauptet wird.

G. Köthe.

Praktische Analysis:

● Toft, L. and A. D. D. MacKay: Practical mathematics. II. 3. ed. London: Pitman and Sons 1952. VII, 536 p. 30 s.

Plunkett, R.: On the rate of convergence of relaxation methods. Quart. appl. Math. 10, 263—266 (1952).

Das Relaxationsverfahren wird für den Fall untersucht, daß im Einzelschritt

das größte Residuum auf Null abgebaut wird. Unter der Annahme, daß der Residuenvektor R_m Zufallskomponenten mit dem Mittelwert Null und mit einem quadratischen Mittelwert besitzt, der in festem Verhältnis zum maximalen Komponentenbetrag steht, wird ein Ausdruck für die Erwartung $1 - |R_m|/|R_{m+1}|$ abgeleitet. Hieraus wird gefolgert, daß die Konvergenz des Verfahrens bei der Behandlung mit Hilfe programmgesteuerter Rechenmaschinen nicht besser ist als bei anderen Iterationsverfahren.

H. Bückner.

Minkiewicz, Jan: Sur la résolution approchée de l'équation du cinquième degré. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 5, 93—95, polnische und russ. Zusammenfassgn. 95—96 (1952).

Gegeben sei eine Gleichung fünften Grades in der Normalform $x^5 + Ax + B = 0$ (A, B reell). ξ sei eine reelle Wurzel dieser Gleichung. Sie ist gleichwertig mit $(x^3 - \sqrt{-A}x)(x^2 + \sqrt{-A}) = -B$. Mit noch zu bestimmendem $R (R \geq |\xi|)$ setzt Verf. $\cos \alpha = \xi/R$ und definiert ξ_1 durch $\cos 3\alpha = \xi_1/R$. Indem er nun über R so verfügt, daß $\frac{3}{4}R^2 - \sqrt{-A} = 0$ wird, erhält er $(1) \varphi(\alpha) \equiv \cos 3\alpha (\frac{4}{3} \cos^2 \alpha + 1) = 3\sqrt{3} B/2A \sqrt{-A}$. Durch Tabellierung von $\varphi(\alpha)$ gewinnt man aus (1) das oder ein α , für das dann $\xi = R \cos \alpha$ eine Wurzel ist. Da jedoch $|\varphi(\alpha)| \leq \frac{7}{3}$ ist, ist dieses Verfahren, wie M. Biernacki in einem Zusatz bemerkt, nur dann anwendbar, wenn — außer der Bedingung $A < 0$ — noch die weitere Bedingung $|B| \leq \frac{14}{27} \sqrt{3} (-A)^{5/4}$ erfüllt ist.

E. Mohr.

Urban, P.: Beitrag zum W.K.B.-Verfahren. Acta phys. Austr. 6, 181—194 (1952).

Die Schrödingersche Gleichung in einer Dimension kann bekanntlich in die Riccatische Differentialgleichung $\frac{h}{2\pi i} \frac{d\chi}{dx} = 2m(E - V) - \chi^2$ transformiert werden. Im W.K.B.-Verfahren ergibt sich dann für $h = 0$ die nullte Näherung χ_0 und damit die weiteren Näherungen $\chi_1 - \frac{\chi_0}{2\chi_0}, \chi_2 - \frac{\chi_1^2 + \chi_0'}{2\chi_0}, \dots$. Verf. behandelt nunmehr den Fall analytischer Schrödingerfunktionen $\psi(z)$ im Falle eines diskreten Spektrums. Es gilt $\frac{1}{2\pi i} \oint \chi_1(z) dz = -\frac{1}{2}$,

$\oint_C \chi_0(z) dz = n h$ (Bohr-Sommerfeldsche Quantenbedingung). Von den ungeradzahigen Gliedern liefert nur das erste einen Beitrag. Alle geradzahigen Glieder liefern Beiträge. Durch geeignete andere Transformationen kann die Schrödingergleichung in die Gestalt $\ddot{u} + (\dot{u}/t) + u \left[\lambda^2 - \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2} \frac{p''}{p^3} + \frac{3}{4} \frac{p'^2}{p^4} \right] = 0$ gebracht werden, welche die Form der Besselschen Differentialgleichung $y'' + \frac{y'}{t} + y \left[\lambda^2 - \frac{1}{t^2} \right] = 0$ annähert. In seinen Näherungsrechnungen faßt Verf. die Besselsche Differentialgleichung als 0-te Näherung auf und gewinnt auf diese Weise wiederum die Resultate der vorherentwickelten funktionentheoretischen Methode. Wie Verf. betont, führt indessen diese zweite Methode häufig schneller zum Ziel als die erste. Schließlich diskutiert Verf. allgemein die Differentialgleichung $y''(x) + [\lambda^2 q(x) + p(x)] y = 0$ und unterwirft sie einem der W.K.B.-Methode äquivalenten Verfahren. Unter anderem wird die Gleichung der Besselfunktion vom Argument $\frac{1}{2}$ diskutiert und die sprunghafte Änderung der Koeffizienten der linearen Lösungskombinationen beim stetigen Übergang zwischen zwei Intervallen, die durch eine Nullstelle voneinander getrennt sind (Stokessches Phänomen). Mit Bezug auf Arbeiten von R. L. Langer und E. Hlawka wird gezeigt, wie man asymptotische Entwicklungen gewinnen und dabei das Stokessche Phänomen vermeiden kann (vgl. E. Hlawka, dies. Zbl. 15, 20; 17, 208; R. E. Langer, dies. Zbl. 9, 397).

M. Pinl.

Dungen, F. H. van den: Principe de Rayleigh et regula falsi de Newton. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 695—704 (1952).

Verf. untersucht die Biegungsschwingungen eines auf zwei Stützen frei gelagerten Balkens. Das Problem führt auf die Eigenwertaufgabe mit den Differentialgleichungen $(1) EI y'' = -M$, $M'' = -\lambda m y$, und den Randbedingungen $y(0) = y(L) = 0$, $M(0) = M(L) = 0$. Verf. bestimmt für $\lambda = \lambda_0$ zwei linear unabhängige partikuläre Lösungen des Systems (1), die den folgenden Randbedingungen genügen: $y_1(0) = M_1(0) = 0$, $y_1'(0) = \alpha_1$, $M_1'(0) = \beta_1$, $y_2(0) =$

$M_2(0) = 0$, $y'_2(0) = \alpha_2$, $M'_2(0) = \beta_2$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Die zwei willkürliche Konstanten C_1 und C_2 enthaltende Lösung (2) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, $M = C_1 M_1 + C_2 M_2$ kann durch geeignete Wahl der Konstanten so eingerichtet werden, daß $y(L) = 0$ und $y'(L) = \tau$ (τ beliebige positive Konstante), und es sind dann die Nullstellen von $M(L) = \mu(\lambda_0)$ die Eigenwerte der Aufgabe. — Zur näherungsweise Bestimmung der Nullstellen von $\mu(\lambda_0)$ kann die regula falsi verwendet werden. Als Näherung des ersten Eigenwertes λ_1 ergibt sich dabei $\lambda_N = \lambda_0 - \mu(\lambda_0)/\mu'(\lambda_0)$. Andererseits liefert das Rayleighsche Prinzip eine Näherung von λ_1 . Diese ist $\lambda_R = W_0/T_0$ mit $T_0 = \frac{1}{2} \int_0^L m y^2 dx$, $W_0 = \frac{1}{2} \int_0^L EI y''^2 dx$, wo für y die Lösung (2) einzusetzen ist. Verf. zeigt

mit Hilfe des Clapeyronschen Satzes, daß $\lambda_N = \lambda_R \geq \lambda_1$. Das soeben beschriebene Verfahren ist an die Voraussetzung $\lambda_1 \neq 0$ gebunden. Bei der Eigenwertaufgabe $GI\varphi' = -M$, $M' = \lambda j\varphi$, $M(0) = 0$, $M(L) = 0$, wie sie bei den Drehschwingungen eines an den beiden Enden freien Stabes auftritt, ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. Die hier an die Stelle von $\mu(\lambda_0)$ tretende Funktion ist monoton abnehmend, und das Rayleighsche Prinzip zur Bestimmung von λ_1 nicht mehr verwendbar. Am Schluß weist Verf. darauf hin, daß M. Tolle in seinem Buch „Die Regelung der Kraftmaschinen“, Berlin 1921, schon zu ähnlichen Ergebnissen gelangt ist. *W. Quade.*

● **Bückner, H.:** Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen. (Ergebnisse der Angewandten Mathematik. Bd. 1.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. VI, 127 S.

Trotz der 20 Zahlenbeispiele ist dieses Werk nicht etwa ein Rezeptbuch für den praktischen Rechner, sondern ein Versuch, „die bisher bekannt gewordenen Verfahren zu ordnen und ihre Grundlagen und Zusammenhänge nach Möglichkeit darzulegen“. Behandelt werden ausschließlich lineare Integralgleichungen zweiter Art unter gewissen einschränkenden Stetigkeitsvoraussetzungen über die zugelassenen komplexen Funktionen und unter Vermeidung des Lebesgueschen Integralbegriffes; von funktionalanalytischer Denk- und Schreibweise wird sehr maßvoll Gebrauch gemacht. Die Darstellung ist für ein Heft dieser Reihe verhältnismäßig ausführlich und vor allem in den Kernabschnitten II—IV stellenweise lehrbuchartig, setzt aber eine gründliche mathematische Schulung des Lesers voraus. Durch die Aufnahme unveröffentlichter oder nur schwer zugänglicher Ergebnisse wird das Buch zu einer wertvollen und anregenden Fundgrube für den Mathematiker. — Inhaltsverzeichnis: I. Formeln und Sätze aus der Theorie der Fredholmischen Integralgleichungen (11 S.). II. Die Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe von Formeln und Variationsprinzipien. Einschließungssätze (25 S.). III. Iterationsverfahren (37 S.). IV. Ersatz des Kernes und der Störfunktion (41 S.). V. Spezielle Kerne (8 S.). VI. Literaturverzeichnis (93 Nummern). — Während in I als Grundlage für die folgenden Abschnitte im wesentlichen die klassischen Sätze der Fredholmischen Theorie zusammengestellt sind, wird in II außer älteren Ergebnissen vor allem eine allgemeine Theorie der Einschließung von Eigenwerten mit Hilfe des Begriffs „Einschließungspolynom“ gebracht in Anlehnung an z. T. unveröffentlichte Arbeiten von Wielandt. Der Abschnitt III bringt in erster Linie die umfassende Theorie der Iteration von Wielandt sowie das Verfahren der gemischten Iteration von Wiarda und Bückner. In IV werden unter dem einheitlichen Begriff „Ersatzmethode“ die Störungsrechnung, die sog. Analogieverfahren, bei denen das Integral durch eine Summe approximiert wird, das Ritzsche Verfahren und die praktische Anwendung der Transformation einer Integralgleichung auf ein System linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten behandelt. In V wird u. a. die Lösung der Volterraschen Integralgleichung mittels der Laplace-Transformation betrachtet und zum Schluß ein Ausblick auf den Einsatz von Analogie-Rechengengeräten gegeben.

J. Weissinger.

Birindelli, Carlo: Su nuove formule interpolatorie del Picone per funzioni in piu variabili e loro contributo al calcolo numerico degli integrali multipli. Compositio math. 10, 117—167 (1952).

Die Arbeit knüpft an interessante Ergebnisse von M. Picone (dies. Zbl. 45, 29) an, wonach eine Funktion von mehreren Variablen durch die Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung approximiert wird, die mit der gegebenen Funktion auf dem Rande des Definitionsbereiches übereinstimmt. Je nach der Ordnung der Differentialgleichung kann auch die zusätzliche Übereinstimmung in gewissen Ableitungen verlangt werden. — Der Verf. wendet diese Ergebnisse auf Interpolation und numerische Quadratur im dreidimensionalen Bereich eines Quaders an und dehnt sie z. T. weiter aus. Die über mehrere Seiten gehenden Formeln mit ihren Fehlerausdrücken lassen sich hier nicht wiedergeben. Ihre Länge dürfte indes keine Rolle spielen, wenn man programmgesteuerte Ziffernmaschinen zu ihrer Anwendung benutzt.

H. Bückner.

● Veen, H. J. van: Einführung in die Nomographie. 2. Aufl. Groningen: P. Noordhoff N. V. 1952, 197 S. f 12.50 [Holländisch].

● Thompson, J. E.: The standard manual of the slide rule: its history, principle and operation. 2 ed. London: Macmillan and Co., Ltd. 1952. VIII, 216 p. 15 s.

Oettinger, Anthony G.: Programming a digital computer to learn. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 1243—1263 (1952).

Der Verf. stellt seine Arbeit unter die Frage, ob programmgesteuerte Maschinen denken können, und gibt als Beitrag dazu im wesentlichen zwei Beispiele an: 1. Die Maschine soll kaufen lernen, d. h. ausfinden, wo einzelne Waren in einer Anzahl gegebener Ladengeschäfte anzutreffen sind. Zu diesem Zweck wird der Speicher der Maschine unterteilt. Der eine Teil beschreibt die Situation der Waren und der Geschäfte. Er erhält die Elemente einer Matrix A mit m den Geschäften zugeordneten Zeilen und n den Waren entsprechenden Spalten. Das Element a_{ik} ist dann und nur dann gleich Eins, wenn die Ware Nr. k im Geschäft Nr. i vorhanden ist. Sonst ist es Null. Der andere Speicherteil nimmt die Einkaufserfahrungen in numerischer Form auf. — Das Einkaufen vollzieht sich in der Form, daß die Maschine die Matrix A in gewisser willkürlicher Weise benutzt, um festzustellen, wo man die Ware Nr. k finden kann. Zu diesem Zweck wird ihr als Kaufauftrag ein Spaltenvektor e_k mit m Elementen mitgeteilt. Dieser Vektor ist der Ware Nr. k zugeordnet und enthält als k -tes Element eine Eins, sonst lauter Nullen. Die Maschine berechnet nun die Elemente des Vektors Ae_k in zufälliger Reihenfolge, was dem planlosen Aufsuchen verschiedener Geschäfte entspricht. Das i -te Element von Ae_k ist nur dann von Null verschieden, wenn die Ware Nr. k im Geschäft Nr. i angetroffen wird. Beim ersten von Null verschiedenen Element von Ae_k hört die Maschine auf, weitere Elemente zu berechnen. Sie registriert im zweiten Speicherteil, den man als Erfahrungsspeicher bezeichnen kann, in welchem Geschäft die Ware Nr. k gefunden wurde. Außerdem stellt sie fest, ob die Waren der Nummern $k-1$ und $k+1$ ebenfalls in dem Geschäft vorhanden sind, auf das sie zum erstenmal erfolgreich bei der Suche nach der Ware Nr. k stieß. Auch dieses Ergebnis wird dem Erfahrungsspeicher zugeführt. Damit ist der erste Einkauf beendet. Die weiteren Einkäufe vollziehen sich nach dem gleichen Prinzip, jedoch darf die Maschine zuvor den Erfahrungsspeicher in systematischer Weise befragen. Findet sie, daß die gewünschte Ware dort bereits im Zusammenhang mit einem Geschäft registriert ist, so ist der Einkauf damit beendet, andernfalls begibt sie sich von Neuem auf die Suche. — Dieses Vorgehen läuft darauf hinaus, die Elemente von A im Erfahrungsspeicher erneut nach Waren und Geschäften zu ordnen. Wenn die Matrix A auf diese Weise vollständig im Erfahrungsspeicher aufgebaut ist, ist der Vorgang des Lernens beendet. — Vielleicht sollte man das Verhalten der Maschine nicht als Lernen bezeichnen, denn man verbindet mit dem Begriff Lernen mehr oder weniger die Vorstellung, daß er die geordnete Erwerbung von Wissenswerten bedeutet. Zweckmäßiger wäre es, vom Ordnen planlos erworbener Erfahrung zu sprechen. 2. Die Maschine soll lernen, eine bestimmte Antwort zu geben. Auf die Zeiten $t = 1, 2, \dots, k, \dots$ bezogen, wird der Zustand gewisser noch zu beschreibender ganzzahliger Größen durch den Index k gekennzeichnet. Als Antworten stehen sechs Möglichkeiten $R^{(0)}, R^{(1)}, \dots, R^{(5)}$ zur Verfügung, von denen $R^{(0)}$ soviel wie „Ich weiß die Antwort nicht“ bedeutet. Die Antwort zur Zeit $t = k$ sei $R_k = R^{(m)}$. Sie wird durch Angabe von m mitgeteilt, nachdem ein Reiz s_k zuvor auf die Maschine ausgeübt wurde. Eine Beurteilung der Antwort a_k beeinflusst die zukünftigen Antworten. Die Berechnung der Antworten erfolgt noch mit Hilfe einer Konstanten T ($T = 7$) und mit Hilfe gewisser Schwellwerte $S_k^{(i)}$, die den Antworten $R_k^{(i)}$ zur Zeit $t = k$ zugeordnet sind, dabei ist $i \neq 0$. Sei $\text{Max}_i S_k^{(i)} = S_k^{(m)}$, wobei m in planloser Weise bestimmt wird, falls mehrere Indizes dieser Eigenschaft existieren. Dann ist $R_k = R^{(0)}$ für $S_k^{(m)} + s_k - T < 0$, andernfalls $R_k = R^{(m)}$. Es ist weiterhin $S_{k+1}^{(i)} = S_k^{(i)} + N_{k+1}^{(i)} - N_k^{(i)}$ für $R_k = R^{(0)}$ und $S_{k+1}^{(i)} = S_k^{(i)} + N_{k+1}^{(i)} - N_k^{(i)} + d(S_k^{(m)}, k)$ für $R_k = R^{(m)}$, $m \neq 0$, $i \neq m$ und $S_{k+1}^{(m)} = S_k^{(m)} + N_{k+1}^{(m)} - N_k^{(m)} - d(S_k^{(m)}, k) + a_k + 1$, mit

$$d(S_k^{(m)}, k) = \text{sgn}(S_k^{(m)} - 1) \cdot \left\{ 1 - \text{sgn} \left[2 \min_n |k - 5n - \frac{1}{2}| - 1 \right] \right\},$$

wobei $N_k^{(0)} = 0$ und sonst $N_k^{(i)}$ eine Pseudozufallsvariable im Bereich $|N_k^{(i)}| \leq 5$ ist. — Experimente mit der Maschine zeigen: Die erwünschte Antwort $R^{(a)}$ wird durch eine gute Beurteilung (a_k groß) häufiger provoziert als andere Antworten. Wenn das einmal erreicht ist, genügen kleine Reize. Unerwünschte Antworten können durch negatives a_k ausgemerzt werden. Die Zahlen $N_k^{(i)}$ überlagern dieser Tendenz eine gewisse Störung. Die Zahlen $d(\dots)$ führen zu Ermüdungserscheinungen beim Antworten. Die Maschine kann auch die Gewohnheit annehmen, ständig dieselbe falsche Antwort zu geben, wenn die Beurteilung a_k nicht streng genug ist. —

Auch bei diesem Beispiel sollte man weniger von Lernen als — nach einem Vorschlag von L. Couffignal — von der Imitation oder Approximation eines tierischen Dressuraktes sprechen. — Zur Erzeugung von Zufallsvariablen durch die Maschine sei beispielsweise auf die Arbeit D. F. Votaw jr. und J. A. Rafferty, dies. Zbl. 45, 67 hingewiesen. *H. Bückner.*

Ostrowski, A. M.: On the rounding off of difference tables for linear interpolation. *Math. Tables Aids Comput.* 6, 212—214 (1952).

In seinen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Bd. 2, S. 294—296 (dies. Zbl. 44, 275) hatte Verf. gezeigt, daß der Berechnung von partes proportionales Hilfstafeln zur linearen Interpolation in Tabellenwerken die Differenz der in der Tabelle gegebenen Werte und nicht die richtig abgerundete Differenz der genauen Funktionswerte zugrunde gelegt werden sollte. Für diese Aussage wird in der vorliegenden Note ein weiterer, leicht modifizierter Beweis mitgeteilt.

H. Bilharz.

● **Tables of the Bessel functions $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $0 \leq x \leq 1$.** (National Bureau of Standards, Appl. Math. Series 25.) Washington: Government Printing Office D. C., 1952. 60 p. 40 cents.

Die Tafel enthält für $x = 0(0,0001)0,05(0,001)1$ die Neumannschen Funktionen $Y_0(x)$ und $Y_1(x)$ mit 8 Dezimalen bzw. 8—9 gültigen Ziffern, für $x = 0(0,0001)0,033(0,001)1$ die modifizierten Hankelfunktionen $K_0(x)$ und $K_1(x)$ mit 7 Dezimalen bzw. 7—8 gültigen Ziffern. Für $x > 0,005$ liefert kubische Interpolation bei Y_0 und Y_1 die volle Genauigkeit, für $x > 0,0025$ bei K_0 und für $x > 0,0041$ bei K_1 . Weiter sind bei den Neumannschen Funktionen für $x = 0(0,0001)0,005$ die Hilfsfunktionen $C_n(x)$ und $D_n(x)$ mit 8 Dezimalen und ersten Differenzen angegeben, bei K_0 und K_1 für $x = 0(0,001)0,03$ die Hilfsfunktionen $E_n(x)$ und $F_n(x)$ mit 7 Dezimalen und ersten Differenzen. *H. Unger.*

Olekiewicz, M.: Tables of expected values and variances of numbers of runs in random sequences with probabilities of exceeding expected values. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A* 5, 147—159 (1952).

Olekiewicz, M.: An extended table of Student's t -distribution for one-sided and two-sided tests of significance at 5 and 1% probability levels. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A* 5, 161—163 (1952).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Levinson, H. C.:** The science of chance. From probability to statistics. London: Faber and Faber Ltd. 1952. 3 fig., 304 p. Bound 30 s. net.

Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden grundsätzlich mittels numerischer, gut ausgedrückter Beispiele aus dem Gebiete der Glücksspiele erklärt (Kopf-Adler, Roulette, Poker, usw.). Ihre Anwendung in den verschiedenen Bereichen der Statistik wird ferner beschrieben (mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen im Geschäftsgebiet). — Die Darstellung ist immer in nicht-mathematischer Form gehalten; doch ist die Sorgfalt bemerkenswert, mit welcher die begriffliche Schärfe gewahrt und jedem möglichen Mißverständnis mittels zahlreicher geeigneter Bemerkungen vorgebeugt wird. *B. de Finetti.*

Bukovszky, Ferenc: Versuche zur Wahrscheinlichkeitstheorie. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 765 und russische Zusammenfassg. 766 (1952) [Ungarisch].

Verf. berichtet über das Problem des Suchens von Karten, über das Buffonsche Problem und auch über seine Versuche im Zusammenhang mit dem Spiel „Kopf oder Schrift“ und vergleicht die Ergebnisse mit dem Gesetz der großen Zahlen. *Autoreferat.*

Richter, Hans: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. I. *Math. Ann.* 125, 129—139 (1952).

Verf. stellt sich die Aufgabe, einen Neuaufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie zu geben. Es wird gehofft, u. a. durch Aufsuchung des Gemeinsamen „allgemein Anzuerkennenden“ be-

stehender Theorien Gültiges zu finden. — Ref. stimmt voll überein mit der I. These, daß eine bloß mathematische Axiomatik dem Problem nicht gerecht wird. Wahrscheinlichkeit ist nach Richter deubar als „Grad der Richtigkeit einer Aussage“ über Versuchsergebnisse (kurz bezeichnet als E/H , d. h. Ereignis, E , das zu einer Versuchsvorschrift, H , gehört). Es folgen weitere Thesen, insbesondere eine als besonders wichtig bezeichnete über „physikalische Abgeschlossenheit“ von Versuchen, — ein Begriff, der der Missessen Verbindbarkeit von Kollektiven verwandt ist. — Verf. hält sich in erster Linie an die Theorie von M. G. Kendall, dessen Ausführungen zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie der Ref. oft unzureichend erschienen. Andererseits (obgleich anfangs „die beiden durch die Namen von Mises und Jeffreys zu bezeichnenden“ Richtungen als Hauptrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie genannt werden) wird in diesem ersten — doch als „vergleichende Betrachtung bestehender Theorien“ geplanten — Teil auf Häufigkeitsdefinition oder Regellosigkeit überhaupt nicht eingegangen. — Die kritische Betrachtung und wenn mögliche „Versöhnung“ bestehender Theorien scheint Ref. soweit unbefriedigend. Der Neuaufbau ist weiteren Arbeiten vorbehalten.

H. Geiringer.

Bergström, Harald: On some expansions of stable distribution functions. Ark. Mat. 2, 375—378 (1952).

Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilungsfunktion $G_{\alpha\beta}(x)$ kann nach P. Lévy bei passender Normierung in der Form

$\gamma_{\alpha\beta}(t) = e^{-|t|^\alpha (\cos \beta - i \sin \beta \operatorname{sgn} t)}$, $\cos \beta \geq 0$, $|\sin \beta \cos(\pi\alpha/2)| \leq \cos \beta \sin(\pi\alpha/2)$, $0 < \alpha \leq 2$ geschrieben werden. Verf. verallgemeinert eine Entwicklung von P. Humbert und erhält

$$G'_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{x \cdot |x|^{\alpha k}} \sin k \left(\frac{\alpha\pi}{2} + \beta - \alpha \arg x \right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Die Reihe ist divergent für $\alpha \geq 1$, die n -te Partialsumme ist aber für jedes n eine asymptotische Entwicklung für $|x| \rightarrow \infty$ im Fall $1 \leq \alpha < 2$. Ferner wird für $G'_{\alpha\beta}(x)$ eine für $\alpha > 1$ konvergente Reihe und eine für $0 < \alpha < 2$, $|x| \rightarrow 0$ gültige asymptotische Entwicklung angegeben. Der Beweis benutzt Fouriertransformationen.

G. Schulz.

Sugiyama, Hiroshi: On the asymptotic behavior of Σp_m^2 in case of certain probability distributions. I. Math. Japonicae 2, 187—192 (1952).

Einer in $|z| < R$ regulären analytischen Funktion $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ ordnet Verf. die diskrete Verteilung $p_m = \operatorname{Pr}(X = m) = a_m z^m / f(z)$ ($m = 0, 1, \dots$) zu und beweist A) $E(X) = z f'(z) / f(z)$, B) Stichprobenmittelwert = Maximum-likelihood-Schätzung von $E(X)$, C. Charakteristische Funktion: $\varphi(t) = f(z e^{it}) / f(z)$,

D) $\sum_{m=0}^{\infty} p_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \varphi(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2 dt$. — Für $f(z) = e^z$, $z = \lambda$, und $f(z) = (1+z)^n$, $z = p/q$, erhält man als Spezialfälle Poisson- und Binomial-Verteilung und aus D) die von R. M. Redheffer (dies. Zbl. 42, 373) gefundenen Formeln

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m^2 = \frac{e^{-2\lambda}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2\lambda \cos \theta} d\theta \quad \text{bzw.} \quad \sum_{m=0}^{\infty} p_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p^2 + 2pq \cos \theta + q^2)^n d\theta.$$

Aus der Reihenentwicklung von $\ln \varphi(t)$ wird ferner in diesen beiden Fällen das asymptotische Verhalten von Σp_m^2 erschlossen: $\sum_{m=0}^{\infty} p_m^2 \sim \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$ für großes λ bzw. n .

M. P. Geppert.

Rosenblatt, M.: Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic. Ann. math. Statistics 23, 617—623 (1952).

The author considers a multivariate analogon of the „ ω^2 -statistics“ for a k -dimensional uniform distribution. Let \bar{X}_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), with component X_{ix} ($x = 1, 2, \dots, k$) be a sample from a k -dimensional uniform distribution, let $S_n(t_1, \dots, t_k) = S_n(t)$ be the sample distribution function and $Y_n(t) = \sqrt{n} [S_n(t_1, \dots, t_k) - t_1 \cdots t_k]$, ($0 \leq t_x \leq 1$). The new statistics proposed is:

$\int_0^t Y_n^2(\bar{t}) \, d\bar{t}$ and its limiting distribution, as $n \rightarrow \infty$, is shown to be equal to the distribution of the weighted (infinite) sum of independent χ^2 -variates. Next a two-sample test, suggested before by some authors is considered. Let $X_{1,i}$, ($i = 1, \dots, n$), $X_{2,j}$, ($j = 1, \dots, m$) be samples of sizes n and m respectively from the same collective with continuous distribution function $F(x)$, and $S_1(t)$, $S_2(t)$ the corresponding sample distribution functions. It is proved that the statistics,

$$\frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_1(t) - S_2(t)]^2 d\left(\frac{S_1(t) + S_2(t)}{2}\right)$$

has the same limit distribution as the ω^2 -statistics, as $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $m/n \rightarrow \lambda > 0$. — Like the original χ^2 - and ω^2 -statistics, these „variants“ have asymptotic distributions of v. Mises' „type two“ (this Zbl. 37, 84).

H. Geiringer.

Lévy, Paul: Fractions continues aléatoires. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 170—208 (1952).

Bedeutet $(0, a_1, a_2, \dots)$ die Kettenbruchentwicklung einer Zahl u aus $(0, 1)$ und wird u nach einem absolut stetigen Verteilungsgesetz L gewählt, sind weiter F_n Verteilungsfunktionen der Variablen $x_n = (a_n, a_{n+1}, \dots)$ und G_n diejenigen von $y_n = (a_n, \dots, a_1)$, so stellt sich heraus, daß $F_n(x)$ und $G_n(x)$ gleichmäßig in $x > 1$ nach einer wohlbestimmten von L unabhängigen Verteilungsfunktion F streben. Diese Konvergenz ist auch in bezug auf die Verteilungsfunktion innerhalb gewisser Klassen solcher Funktionen gleichmäßig; gegebenenfalls erstreckt sie sich auf die Dichten F'_n und es läßt sich auch ihre Schnelligkeit abschätzen. Die Abhängigkeit der Variablen x_{n+v} von y_n erweist sich als verschwindend klein für große v . Es folgt eine Untersuchung der Summen $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ von unabhängigen zufälligen Variablen mit derselben Verteilung und unendlicher Streuung. Ist f eine meßbare Funktion und bedeuten x'_i unabhängige zufällige Variablen, von denen jede die Verteilungsfunktion F hat, so werden die Summen T_n mit $Y_i = f(x'_i)$ gebildet und mit $S_n = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ verglichen. Es werden gewisse Sätze ausgesprochen, angedeutet, bewiesen oder vermutet, welche ein asymptotisch ähnliches Verhalten von T_n und S_n zum Ausdruck bringen.

S. Hartman.

Ríos, Sixto: Einige aus einem Laplace-Stieltjes-Integral abgeleitete Wahrscheinlichkeitsgesetze und stochastische Prozesse. Revista Acad. Ci. Madrid 36, 487—490 (1952) [Spanisch].

Si determina la funzione caratteristica corrispondente alla funzione di distribuzione definita da: $\frac{1}{f(s)} \int_{-\infty}^x e^{\lambda s} dA(\lambda)$ ove è l'integrale di Laplace-Stieltjes $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda s} dA(\lambda)$,

che include come casi particolari diversi legge di probabilità discrete e continue fra le quali si sofferma l'A. in quella dal tipo $a_n z^n / g(z)$. Anche si dà l'espressione della funzione caratteristica di una funzione di variabile aleatoria. Le formole ottenuti permettono sintetizzare i calcoli dei momenti e funzioni generatrice corrispondenti a qualche leggi di distribuzione (Poisson, Pearson, Yule, etc.). J. M^a. Orts.

Jensen, Arne: Distribution patterns, composed of a limited number of exponential distributions. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 210—215 (1952).

Für einen stochastischen Prozeß mit den Zuständen $0, 1, \dots, n$ bedeute $P_{ij}(t_0, t)$ mit $t_0 \leq t$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das betrachtete System zur Zeit t im Zustand j ist, sofern es zur Zeit t_0 im Zustand i war. Es werden solche Prozesse untersucht, für die das Gleichungssystem $\frac{\partial P_{ij}(t_0, t)}{\partial t} = \sum_{s=0}^n P_{is}(t_0, t) a_{sj}$ besteht. Für die Matrix \mathfrak{A} der konstanten a_{ij} gilt $a_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$ und $a_{ii} \leq 0$. Die Lösung ist durch $\mathfrak{P}(t_0, t) = e^{\mathfrak{A}(t-t_0)}$, $\mathfrak{P} = \{P_{ij}\}$ gegeben. Die Klasse der so erhaltenen Verteilungen enthält die binomische sowie die Verteilungen von Pólya

und Erlang. Verf. untersucht insbesondere näher den Fall $a_{ij} = 0$ ($j < i$; $i = 1, \dots, n$; $j = 0, \dots, n-1$). Dann besteht $P_{ij}(t_0, t)$ aus einer endlichen Zahl von Exponentialausdrücken. Transformationen der Zeit führen auf Pearsonsche Verteilungen. Die Verteilungen der untersuchten Klasse lassen sich mannigfachen Problemen, insbesondere solchen aus der Versicherungsmathematik, gut anpassen.

G. Schulz.

Consael, R.: Sur les processus composés de Poisson à deux variables aléatoires.

Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8^e 27, Nr. 6, 44 S. (1952).

Verf. erstreckt gewisse von O. Lundberg gefundene Ergebnisse über Prozesse mit einer zufälligen Veränderlichen auf den Fall von zwei solchen und verallgemeinert von ihm selbst entwickelte und veröffentlichte Methoden für zusammengesetzte Poissonsche Verteilungen. Die diskutierte Funktion lautet

$$P_{n,m}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(x+y)} \frac{(tx)^n}{n!} \cdot \frac{(ty)^m}{m!} dU(x, y).$$

Dabei sind x und y voneinander unabhängige Veränderliche, $U(x, y)$ eine willkürliche Verteilungsfunktion. Im ersten Teile werden die fundamentalen Eigenschaften der betrachteten Prozesse entwickelt, insoweit als diskontinuierliche Markoffsche Prozesse von einem kontinuierlichen Parameter, t , abhängen. Die erzeugende und die charakteristische Funktion und die Momente, sowie Intensitätsfunktionen und Grenzverteilungen werden ermittelt. Im zweiten Abschnitt des ersten Teils behandelt Verf. die Wahrscheinlichkeit $P_{(n,m)}^{(v,\mu)}(s, t)$,

daß bis zum Zeitpunkt t v Ereignisse der ersten Art und μ der zweiten Art eingetreten sind, unter der Voraussetzung, daß zu einem Zeitpunkt $s < t$ die Zahlen der eingetretenen Ereignisse n und m waren. Im dritten Abschnitt behandelt er eine von drei Parametern abhängige, zusammengesetzte Poissonsche Verteilung, indem er in den Poissonschen Verteilungen des Integranden t durch tp bzw. tq ersetzt, und im vierten Abschnitt verallgemeinert Poissonsche Prozesse, ausgehend von einem Theorem von Feller. Im zweiten, mit „Anwendungen“ überschriebenen Teile werden verschiedene Beispiele des betrachteten Typs behandelt. Insbesondere wird gezeigt, daß die A -Verteilung von Neyman mit drei Parametern aus der behandelten Klasse von Prozessen hervorgeht.

P. Lorenz.

Davis, R. C.: On the theory of prediction of nonstationary stochastic processes.

J. appl. Phys. 23, 1047—1053 (1952).

Let $S(t)$ be a signal and $N(t)$ be a noise disturbance. The problem of prediction is to predict $S(t + \Delta)$ or more generally a linear functional of $S(t)$ in a certain optimum sense when $S(t) + N(t)$ is observed during the time interval $0 \leq t \leq T$. The author shows the existence of the optimum predictor under some appropriate assumptions and extends the result obtained by L. Zadeh and J. Ragazzini (this Zbl. 35, 362) to the case of nonstationary processes by making use of the theory of covariance functions developed by M. Loève [C. r. Acad. Sci., Paris 222, 469—470 (1946)] and by K. Karhunen (this Zbl. 30, 165). Finally the author gives an exposition of a method of prediction by conditional probabilities which is applicable to the case that the form of joint distribution of the signal and noise is known.

K. Itô.

Lévy, Paul: Complément à l'étude des processus de Markoff. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 203—212 (1952).

The paper is concerned with the simple Markoff process with an enumerable number of states, and the processes of type ≤ 5 (in the terminology of the author's previous paper: this Zbl. 44, 338) are discussed. Let A_0 be an instantaneous state and let $\tau(t)$ be the intervals of time elapsed in the state A_0 during the time interval (t_0, t) . Let $\tau'(t)$ be defined similarly for the state A_1 and let $\tau(t)$ and $\tau'(t)$ increase to ∞ with t almost certainly (a. c.). Then $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau'(t)/\tau(t) = \lambda_{01}/\lambda_{10}$ a. c. Here λ_{ij} denotes the expectation of the intervals of time in (t_0, t) elapsed in the state A_j starting from A_i at t_0 . It is proved that, if A_0 is the only instantaneous state, the process $X(\tau) = t - \tau(t)$ is of independent stationary increments, increasing only by jumps; and the probability of a jump greater than x ($x > 0$) during when τ varies the

amount $d\tau$ is given by $d\tau \sum_k \lambda_{0k} \exp(-\lambda_k x)$. It is shown that the characteristic function $E(\exp(i z X(1)))$ completely determines the law of the evolution of the process in case λ_k 's are distinct; in the general case, however, the knowledge of the characteristic functions $E(\exp(i z X(\tau)))$ is not sufficient to determine the process.

K. Yosida.

Harris, T. E.: First passage and recurrence distributions. Trans. Amer. math. Soc. 73, 471—486 (1952).

In einer Markoffschen Kette mit abzählbar unendlich vielen Zuständen $0, 1, 2, \dots$ sei x_ν der nach ν Schritten erreichte Zustand, und es seien $P^{(n)}(i, j) = \text{prob}(x_n = j | x_0 = i)$ die zeit-unabhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten. Für jedes (i, j) gebe es eine ganze Zahl $n = n(i, j)$ derart, daß $P^{(n)}(i, j) > 0$. Ferner sei N_{ij} die kleinste positive Zahl n derart, daß $x_n = j$, falls $x_0 = i$ (first-passage-time). Für $i = j$ erhält man die Wiederkehrzeit des Zustandes i . Vorausgesetzt wird $E[N_{ii}] < \infty$, woraus die Existenz stationärer Wahrscheinlichkeiten π_i folgt. ϑ_{ij} bedeute die Wahrscheinlichkeit, daß der Zustand, von i ausgehend, mindestens einmal den Wert j hat, bevor er wieder zu i zurückkehrt. Für seltene Zustände ($\pi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$) gilt ($u > 0$ fest) $\text{prob}(\pi_k \vartheta_{k0} N_{kk} > u) = \vartheta_{k0}(e^{-u} + \varepsilon_k(u))$, wobei $\varepsilon_k(u) \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$. Schließlich werden explizite Ausdrücke für π_i und ϑ_{ij} , $E[N_{ij}]$, $E[N_{ii}]$ und höhere Momente in dem Fall gegeben, daß die Markoffsche Kette eine Irrfahrt ist ($P_{i,i+1}^{(1)} = p_i$, $P_{i,i-1}^{(1)} = 1 - p_i$). Auf einen interessanten Zusammenhang zwischen Irrfahrten und den in der Topologie untersuchten „Bäumen“ wird hingewiesen.

G. Schulz.

Montroll, Elliott W.: Markoff chains, Wiener integrals and quantum theory. Commun. pure appl. Math. 5, 415—453 (1952).

An expository paper dealing with R. P. Feynman's [Reviews modern Phys. 20, 367—387 (1948)] probabilistic foundation of the quantum theory. The contents read as follows. § 1 Characterisation of Markoff and Quantum Chains. § 2 Averages over Markoff and Quantum Chains. § 3 Evaluation of Several Types of Wiener Integrals. § 4 Function Space Formulation of Quantum Theory. § 1 is devoted to the exposition of the analogy between the transition probability of the simple Markoff chain and the transition amplitude of the quantum mechanical chain. In particular, the Fokker-Planck equation is compared with the Schrödinger equation as was introduced by Feynman. The Wiener integral is exposed in § 3 together with its explicite evaluation for several important cases which were studied by M. Kac (this Zbl. 45, 70) and R. H. Cameron-Martin [Bull. Amer. math. Soc. 51, 73—90 (1945) and this Zbl. 35, 73]. The analogy between the Gaussian kernel function in Wiener integral and the Feynman kernel function in quantum theory is discussed in detail in the final § 4.

K. Yosida.

Karhunen, Kari: Über ein Extrapolationsproblem in dem Hilbertschen Raum. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 35—41 (1952).

Im Anschluß an Untersuchungen von H. Wold über „stationäre“ Folgen $\{x_n\}$ im komplexen Hilbertschen Raum H , d. h. Folgen, für die das skalare Produkt (x_{n+k}, x_n) von n nicht abhängt (A study in the analysis of stationary time series, Diss. Uppsala 1938, dies. Zbl. 19, 356), sowie an Arbeiten von A. Kolmogorov über „Wienersche Spiralen“ (dies. Zbl. 22, 360) untersucht Verf. „stationäre“ Kurven $x(t)$ in H ($-\infty < t < \infty$), d. h. Kurven, für die das skalare Produkt

$$r(t, h) = (x(u + t) - x(u + t - h), x(u) - x(u - h))$$

von u nicht abhängt. Sei H_s der durch die Elemente $x(t)$ mit $t \leq s$ aufgespannte Unterraum. Ist $x(t) \in H_s$ für ein $t > s$, so folgt aus der Stationarität, daß $H_t = H_s$ für beliebige s, t ; die Kurve wird dann aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen „deterministisch“ genannt. Gegenfalls ist sie „indeterministisch“. Wenn die Projektion von $x(t)$ auf H_s für $s \rightarrow -\infty$ gegen einen von t unabhängigen Grenzwert strebt, so wird die Kurve „rein indeterministisch“ genannt. Es wird gezeigt: Zu jeder solchen Kurve S gehört eine wohl bestimmte nichtabnehmende Funktion

$$F(\lambda) \text{ mit } (*) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{1 + \lambda^2} < \infty, \text{ so daß } (**) r(t, h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \left(\frac{\sin \lambda h/2}{\lambda/2} \right)^2 dF(\lambda); \text{ jede nichtab-}$$

nehmende Funktion $F(\lambda)$ mit (*) bestimmt durch (**) eine Kurve S bis auf Isometrie; S ist in-

deterministisch, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log F'(\lambda)|}{1 + \lambda^2} < \infty$, und sie ist rein indeterministisch, wenn dazu $F(\lambda)$

totalstetig ist. Am Ende der Arbeit werden Beispiele angegeben.

B. Sz.-Nagy.

Benson, F.: Further notes on the productivity of machines requiring attention at random intervals. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 14, 200—210 (1952).

Es handelt sich um die Fortsetzung einer Arbeit von F. Benson und D. R. Cox, dies. Zbl. 45, 81. Die neuen Untersuchungen erfassen den Umstand, daß der Maschinenwärter einer Anzahl Textilmaschinen Nebenpflichten hat, die er teilweise ohne Rücksicht auf den Zustand der Maschine ausübt. Die Untersuchung führt zu einer Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse. H. Bückner.

Shannon, C. E.: Some topics in information theory. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 262—263 (1952).

Statistik:

● Wilks, S. S.: Elementare statistische Analyse. Übersetzt von Sixto Ríos und José Royo. Madrid: Superior de Investigaciones Científicas 1952. 328 p. 90 ptas. [Spanisch].

● Hald, A.: Statistical theory with engineering applications. (Wiley Publications in Statistics.) New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1952. XII, 783 p. \$ 9,—.

Das vorliegende Lehrbuch ist durch Erweiterung eines 1948 erschienenen dänischen Buches aus Vorlesungen hervorgegangen, die Verf. für Ingenieure gehalten hat. Sein Ziel ist daher nach seinen eigenen Worten eine „elementare“ Darstellung derjenigen statistischen Methoden, die für die tägliche Arbeit des Ingenieurs von Wichtigkeit sind, wobei nur die einfachsten Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt werden. Es ist erstaunlich und erfreulich, mit welcher Gründlichkeit Verf. zu Werke geht und wie weit er trotz dieser bescheiden formulierten Zielsetzung den Umkreis des zu behandelnden Stoffes spannt. Nach kurzer axiomatischer Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Herleitung der bi- und multinomialen, hypergeometrischen und Pascal-Verteilung werden die Grundbegriffe empirischer und theoretischer ein- und zweidimensionaler Verteilungen dargelegt, und anschließend die wichtigsten speziellen Prüf-Verteilungen eingehend behandelt: Normalverteilung (auch gestutzte und zensierte), Variablentransformation und schiefe Verteilungen, χ^2 -, F -, Student-Verteilung. Ihre Anwendungen auf die Stichprobenverteilungen von Mittelwert, Varianz, Spannweite etc. werden durch sorgfältige Vorbereitung (χ^2 -Additions- und Cochrans Zerlegungssatz der χ^2 -Verteilung, Begriff der Freiheitsgrade) hier wie auch im folgenden sehr vereinfacht und vereinheitlicht. Sehr exakte Begründung und Darstellung erfahren zwei inhaltsreiche Kapitel über Varianzanalyse und über die darauf aufbauende Versuchs- und Stichproben-Planung, bei welcher auch die Theorie geschichteter, mehrstufiger usw. Stichproben aus endlichen Gesamtheiten berücksichtigt wird. Es folgen zwei- und mehrdimensionale Regressions- und Korrelationstheorie, dann besondere Kapitel über Binomial-Verteilung und ihre Arcsinus-Transformation, Poisson-Verteilung und stochastische Prozesse, Multinomial-Verteilung und χ^2 -Test; schließlich eine kurze Darstellung der praktisch wichtigsten Sequenzteste. — Überall folgt der mathematischen Deduktion der betreffenden Verteilungen unmittelbar ihre Anwendung auf Hypothesenprüfung und Parameterschätzung durch Punktschätzungen und Fiduzialgrenzen, wobei stets Potenzfunktion (power-function) und Eigenschaften der Schätzparameter sorgfältig untersucht werden. (Die einschlägigen Grundbegriffe werden in den Anfangskapiteln klar definiert.) Als außerordentlich klärend und praktisch für die Beschreibung der Signifikanzteste sowie für den Gebrauch der zugehörigen Verteilungstabellen (vgl. folgendes Referat) erweist sich die konsequente Benutzung

von Fraktile x_p [definiert durch $\int_{-\infty}^{x_p} dF(x) = P$]. Erschwert ist dem Verf. andererseits seine

Aufgabe durch die Vermeidung der in der modernen mathematischen Statistik heutzutage üblichen Verwendung von Matrizenkalkül und charakteristischen Funktionen. Trotzdem werden fast alle Ergebnisse einwandfrei bewiesen (z. B. χ^2 -Verteilung durch Induktion). Verf. bewältigt eine Fülle von Stoff und stattet den Leser mit einer wohl allen in der Technik auftauchenden, verschiedensten Fragen praktisch gerecht werdenden Reihe moderner Tests und Verfahren aus (z. B. Bartlett's Test, Hotellings T^2 -Test, Run-Tests). Zahlreiche eingehend diskutierte Beispiele aus Technik und Industrie erläutern die theoretischen Ausführungen. — Fremdartig erscheinen die Bezeichnungen v^2 für F -Verteilung, $M\{x\}$ statt $E(x)$. Auf Seite 729 vermißt man die Klärung des einfachen Zusammenhanges der hier als „compound“ Poisson-Verteilung aufgefundenen negativen Binomialverteilung mit der auf Seite 39 erörterten Pascal-Verteilung. — Das gründliche Studium des Werkes ist jedenfalls nicht nur dem statistisch interessierten Ingenieur, sondern jedem angehenden Statistiker aufs wärmste zu empfehlen. M.-P. Geppert.

● **Hald, A.:** *Statistical tables and formulas.* (Wiley Publications in Statistics.) New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1952. 97 p. \$ 2,50.

Dieses Tafelwerk bildet die notwendige Ergänzung des oben besprochenen Lehrbuches (vgl. vorstehendes Referat), ist aber darüber hinaus auch ohne Lektüre desselben für den praktischen Gebrauch des industriellen (oder sonstigen) Statistikers geeignet, da den Tafeln eine Einführung beigegeben ist, in der die für ihre Verwendung wesentlichen Formeln und Ergebnisse aus dem Lehrbuch ohne Begründung kurz rekapituliert sind. Die Tafeln geben: Ordinaten und Flächen der Normalverteilung, deren Fraktile (Probit), Fraktile der Student-, χ^2 -, χ^2/f -, $v^2(F)$ -, Spannweiten-Verteilung, die für die Parameterschätzung von gestutzten und zensierten Normalverteilungen erforderlichen Funktionen, Fiduzialgrenzen für den Parameter der Binomialverteilung, Arcsinus-Transformation, $\log n!$, $\log \binom{n}{x}$, n^2 ,

\sqrt{n} , $\frac{1}{n}$, Logarithmen und Zufallszahlen.

M.-P. Geppert.

Azorín, F.: Über die nichtzentrale t -Verteilung. *Revista Acad. Ci. Madrid* 46, 491—495 (1952) [Spanisch].

Partendo della definizione di t come rapporto fra due variabili casuali indipendenti la prima con distribuzione normale e la seconda con quella data da $\sqrt{\chi^2/n}$, si deduce la legge di distribuzione di ottenendosi una formola che, in fondo, risulta equivalente ad altre già studiate da Johnson-Welch e Craig. Si dà anche l'espressione dei momenti di quella distribuzione, così come formole approssimate per il suo calcolo.

J. M^a. Orts.

Mahalanobis, P. C.: Some aspects of the design of sample surveys. *Sankhyā* 12, 1—7 (1952).

Ottestad, Per: On the analysis of variance of percentage fractions. *Skand. Aktuarietidskr.* 1952, 152—159 (1952).

Verf. geht von der folgenden Sachlage aus. Man hat N Experimente gemacht. Jedes Experiment besteht aus y Einzelversuchen. Beobachtete zufällige Veränderliche x ist die Zahl der Einzelversuche, die ein bestimmtes Ereignis A hervorgerufen haben. Die N Experimente seien in k Klassen verteilt worden. Das Problem ist, zu prüfen, ob die k Klassen von Experimenten zufällige Stichproben aus einem und demselben Universum sein können. — Im allgemeinen Fall muß die Reihenlänge y als zufällige Veränderliche betrachtet werden. Dann treten aber Schwierigkeiten bei der Berechnung der Inner- und Zwischen-Klassen-Streuung für die Größen $u = x/y$ auf, weil die zur Zeit vorhandenen mathematischen Hilfsmittel (die F - oder die z -Tafel) keine Rücksicht auf den möglichen Zufallscharakter von Gewichten nehmen. Diese Schwierigkeiten diskutiert Verf. eingehend und gibt unter gewissen Voraussetzungen über die Gewichte einige Formeln. *P. Lorenz.*

Young jr., Gail S.: A footnote to „Statistical decision functions“. *Michigan math. J.* 1, 186—188 (1952).

Clarification of the connection between a theorem of Wald and a lemma of Zorn. *G. Elfving.*

Kitagawa, Tosio: Successive process of statistical inferences. II, III. *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ.*, Ser. A 6, 55—95 (1951), 131—155 (1952).

Im Anschluß an Teil I [Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 5, 139—180 (1950)] baut Verf. auf dem schon von M. Greenwood [Biometrika 9, 69—90 (1913)] benutzten und in der deutschen Literatur mit dem Namen „Transponierungsschluß“ bezeichneten Grundgedanken, von einer Stichprobe auf weitere Stichproben zu schließen, eine Theorie sukzessiver statistischer Erkenntnisse auf. Unter genau formulierten Voraussetzungen wird der R. A. Fishersche Begriff der Effizienz (efficiency) verallgemeinert zu der für die Prognose wichtigen „relativen Effizienz“ eines Schätzparameters einer Stichprobe in bezug auf den einer anderen. Im Drei-Stichproben-

Problem wird von 2 beobachteten Stichproben auf eine künftige dritte geschlossen. Hier wird die Schätzung des zugehörigen Mittelwertes auf Grund von Student-Verteilung und diejenige der Varianz auf Grund 2-dimensionaler F -Verteilung besprochen. Schließlich werden die Gedankengänge auf Stichproben aus endlichen Gesamtheiten ausgedehnt. — Die Zwei- und Drei-Stichprobentheorie wird in Teil III auf einige spezielle Aufgaben der Schätzung von Populationsparametern und der Prognose von Stichprobenparametern angewandt. Sodann dehnt Verf. Walds Begriffe der Risikofunktion und Entscheidungsfunktionen auf den allgemeineren Fall sukzessiver Erkenntnisse aus, der R. A. Fishers und Neyman-Pearsons klassische Theorie der Schätzung und Hypothesenprüfung und Walds Sequenzanalyse als Spezialfall („lokale“ Theorie statistischer Erkenntnis) enthält.

M. P. Geppert.

Kitagawa, Tosio: Successive process of statistical inferences. IV. Bull. math. Statist. 5, 35—50 (1952).

Verf. wendet seine Theorie der sukzessiven statistischen Erkenntnisse (vgl. vorsteh. Ref.) auf die Prognose von Stichprobenmittelwerten mit Hilfe einer aus m anderen Stichproben gewonnenen mittleren Spannweite (mean range) an, sowie auf die bei der statistischen Qualitätskontrolle mittels Kontrollstreifen wichtige Prognose künftiger Stichprobenmittelwerte auf Grund des Mittelwertes der m Mittelwerte von m Stichproben und der mittleren Spannweite derselben Proben. Ferner versucht Verf. die Kluft zwischen R. A. Fishers Fiducial- und Neymans Confidenzgedanken zu überbrücken, indem er den Behrens-Fisher-Test in Anlehnung an G. A. Barnard und C. Stein vom Standpunkt sukzessiver statistischer Erkenntnisse deutet.

M. P. Geppert.

Kitagawa, Tosio: Successive processes of statistical controls I. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 7, 13—28 (1952).

Die vorliegende Arbeit eröffnet eine Reihe von weiteren, die der Übertragung der Begriffe und Resultate der Theorie sukzessiver statistischer Erkenntnisse (vgl. vorsteh. Ref.) auf die Probleme der Fabrikationskontrolle dienen sollen. In Teil I werden in enger Anlehnung an Walds Theorie der Entscheidungsfunktionen „Sequenz-Prozesse“ statistischer Kontrollen definiert, in Teil II einige fundamentale Kontroll-Verhaltensregeln stochastisch approximiert, die Erreichung eines vorgegebenen Fertigungsniveaus bezwecken.

M. P. Geppert.

Uranisi, Hisao: On the statistical inferences in finite populations by two sample theory. Bull. math. Statist. 5, 9—20 (1952).

In seiner Anwendung der Zwei-Stichproben-Theorie auf endliche Populationen hatte T. Kitagawa (vgl. drittletztes Referat) postuliert, daß die endliche Population als zufällige Stichprobe aus einer umfassenderen Gesamtheit zu deuten sei, die er als normal verteilt annahm. Verf. läßt diese Voraussetzung fallen und untersucht die approximative Gültigkeit der von Kitagawa bewiesenen Sätze unter der allgemeineren Annahme, daß die Ausgangsgesamtheit einer Gram-Charlier-Typ A -Verteilung folge.

M. P. Geppert.

Boer, J. de: Sequenz-Tests mit drei möglichen Entscheidungen zum Testen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit. Math. Centrum. Amsterdam, Rapport ZW 1952—014, 16 S. (1952) [Holländisch].

The author derives a sequential decision procedure for choosing one out of three (overlapping) intervals within which an unknown probability lies. The method is based on that used by Sobel and Wald (this Zbl. 34, 230), who dealt with the mean of a normal distribution, and leads to a combination of two probability ratio tests. The characteristic curves (power functions) of the procedure are studied and an approximation to the expected number of observations is given. Some remarks are added concerning truncation. Finally, the author compares his procedure, by means of examples, with a classical (fixed sample) procedure for the same problem.

S. Vajda.

Kōno, Kazumasa: On inefficient statistics for measurement of dependency of normal bivariates. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 7, 1—12 (1952).

In questa memoria sono studiati nuovi metodi per l'analisi delle mostre o col-

lettivi sotto condizioni riguardanti l'ordine statistico che permettono affermare la convergenza asintotica della distribuzione verso la legge normale in due variabili. Questa proprietà è dimostrata valendosi di certi statistici collegati ai primi momenti della distribuzione che conducono a alcuni notevole teoremi intorno al comportamento asintotico della covarianza e dal coefficiente di correlazione. Le conclusioni e risultati esposti, sono di particolare interesse per la semplificazione che introduce in molti casi per la misura della covarianza, come fa vedere l'A. in alcune applicazioni.

J. M^a. Orts.

Elteren, Ph. van: Eine Verallgemeinerung der Methode der m Rangordnungen. Math. Centrum. Amsterdam, Rapport ZW 1952—022, 9 S. (1952) [Holländisch].

Let $x_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, k_{\mu\nu}$) be a sample from the population of the variable $x_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, \dots, m; \nu = 1, \dots, n$) and let the nul-hypothesis be the equality of the distributions of the $x_{\mu\nu}$ for all ν and given μ (not necessarily the same for different μ), and independence of the observations for different μ . The author replaces each observation by its rank within the sample [as in the Wilcoxon test, Biometrics Bull. 1, 80—83 (1945)] and obtains a matrix of reduced rankings. The test of the hypothesis is based on the ratio of two determinants, containing the variances and covariances of the column totals of the matrix, and the author derives the asymptotic distribution of this ratio. If all $k_{\mu\nu} = 1$, then the problem reduces to that considered by Friedman in J. Amer. statist. Assoc. 32, 675—699 (1937). S. Vajda.

Terry, Milton E.: Some rank order tests which are most powerful against specific parametric alternatives. Ann. math. Statistics 23, 346—366 (1952).

W. Hoeffding hat (dies. Zbl. 44, 342) einen nichtparametrischen Test zur Prüfung der Hypothese, daß N Beobachtungen der gleichen Gesamtheit entnommen worden sind, angegeben, der auf den Erwartungswerten der Orderstatistiken der Normalverteilung beruht. In dieser Arbeit wird bewiesen, daß das Prüfmaß dieses Tests asymptotisch normal verteilt ist. Für den Spezialfall des Zweistichprobentests wird die Verteilung des Prüfmaßes für die Beobachtungszahlen m und n mit $m + n \leq 10$ angegeben, die Approximation der Verteilung durch einen Pearson-Typ II untersucht, die Powerfunktion empirisch geschätzt und gezeigt, daß die Korrelation des Prüfmaßes mit Wilcoxon's T [Biometrics Bulletin 1, 80—83 (1945)] asymptotisch $\sqrt{3/\pi}$ beträgt.

E. Walter.

Kruskal, William H.: A nonparametric test for the several sample problem. Ann. math. Statistics 23, 525—540 (1952).

Nachdem M. Friedman [J. Amer. statist. Assoc. 32, 675—701 (1937)] die Anwendung der Ranganalyse auf das Zweiwegschema der Varianzanalyse beschrieben hat, führt Verf. eine entsprechende Untersuchung für das Einwegschema durch. Aus C Gesamtheiten mit den Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_C seien n_1, \dots, n_C Beobachtungen entnommen und allen $N = \sum n_i$ Beobachtungen durchlaufend Rangzahlen zugeordnet worden. Zum Testen der Hypothese $F_1 = \dots = F_C$ wird das Prüfmaß

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_i \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

vorgeschlagen, wobei R_i die Summe der Rangzahlen der i -ten Stichprobe ist. Es wird die Streuung von H unter der Nullhypothese berechnet und gezeigt, daß der Test consistent ist und daß die Verteilung von H mit wachsenden n_i gegen die Chi-Quadrat-Verteilung mit $C - 1$ Freiheitsgraden strebt.

E. Walter.

Okamoto, Masashi: On a non-parametric test. Osaka math. J. 4, 77—85 (1952).

F. N. David beschrieb (dies. Zbl. 37, 366) einen Test zur Prüfung der Hypothese, daß N Beobachtungen aus einer Gesamtheit mit der speziellen Verteilungsfunktion $F(x)$ entnommen wurden (Anpassungstest). Bei diesem Test werden n Intervalle

(a_{i-1}, a_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) durch die Bedingungen $F(a_i) = i/n$ festgelegt und als Prüfmaß die Anzahl v der Intervalle, in die keine Beobachtung hineinfällt, verwendet. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß der Test consistent und „unbiased“ gegen eine allgemeine Klasse von Alternativen ist und daß die Verteilung von v mit wachsendem N gegen die Normalverteilung strebt. Ein anderer Beweis für diese asymptotische Eigenschaft von v befindet sich bei G. Arfwedson (dies. Zbl. 45, 71).

E. Walter.

Okamoto, Masashi: Unbiasedness in the test of goodness of fit. Osaka math. J. 4, 211—214 (1952).

Verf. betrachtet allgemeine Anpassungstests, die auf der im vorhergehenden Referat angegebenen Einteilung des Variationsbereichs in n gleichwahrscheinliche Intervalle beruhen. Der N -dimensionale Stichprobenraum wird durch diese Einteilung auf die Menge der n -dimensionalen Gitterpunkte (k_1, \dots, k_n) mit $\sum k_i = N$ reduziert, wobei k_i die Anzahl der Beobachtungen bedeutet, die in das i -te Intervall fallen ($i = 1, \dots, n$). Es wird bewiesen, daß ein derartiger Test „unbiased“ ist, wenn er einen Annahmebereich besitzt, der mit (k_1, \dots, k_n) auch alle Gitterpunkte enthält, die durch Permutationen der k_i entstehen, und falls $k_j \geq k_i + 2$ auch den Gitterpunkt $(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_j - 1, \dots, k_n)$ umfaßt. Als Spezialfall ergibt sich, daß der Chi-Quadrat-Test bei dieser Einteilung des Variationsbereichs „unbiased“ ist.

E. Walter.

Okamoto, Masashi: Some combinatorial tests of goodness of fit. Osaka math. J. 4, 215—228 (1952).

Es wird die spezielle Gruppe von Anpassungstests untersucht, die durch die Prüfmaße $M_k = \sum_i \binom{N_i}{k}$ ($k = 2, \dots$) definiert sind. N_i bedeutet die Anzahl der in das i -te Intervall fallenden Beobachtungen bei der Einteilung in gleichwahrscheinliche Intervalle. Der auf M_2 beruhende Test ist mit dem Chi-Quadrat-Test identisch. Verf. zeigt, daß M_k asymptotisch normalverteilt ist, und daß die Tests „unbiased“ und consistent sind.

E. Walter.

Olekiewicz, M.: On certain improved estimates of the mean. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 5, 139—146 (1952).

In the spirit of an earlier paper (this Zbl. 36, 94) the author investigates estimates of minimum sum of squared deviations, without requiring them to be unbiased. In particular, if a function of n observations is given, he finds the factor by which this function should be multiplied to produce an estimate which has smallest sum of squared deviations of all such products. The factor depends, in general, on the true, unknown value of the parameter to be estimated, but it is sometimes possible to make use of additional information. This is shown, in some detail, for the estimation of population means.

S. Vajda.

Shellard, G. D.: Estimating the product of several random variables. J. Amer. statist. Assoc. 47, 216—221 (1952).

Sind x_1, \dots, x_n unabhängige Zufallsvariable, so folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz, daß unter einigen Voraussetzungen $X = \prod_{i=1}^n x_i$ asymptotisch logarithmisch normal verteilt ist. Verf. betrachtet kürzeste Zufallsintervalle für die Verteilung von X , wobei er die Grenzverteilung als Näherung benutzt. *E. Walter.*

Terpstra, T. J.: Bestimmung eines Konfidenzintervalls für die Wahrscheinlichkeit, daß eine normal verteilte Größe einen gewissen Wert überschreitet, aus dem Mittelwert und dem Mittelwert der Variationsbreite einer Anzahl von Stichproben. Math. Centrum. Amsterdam, Rapport ZW 1952—002, 9 S. (1952) [Holländisch].

The author considers the problem of finding a confidence interval for the area under a normal curve, between a and ∞ , when the mean and the variance of the curve are unknown. This can be done by basing estimates of these parameters either

on mean and standard deviation of a sample, or on mean and range. The limits are derived from a non-central t -distribution, which is in the second case an approximation. Numerical illustrations are given.

S. Vajda.

Yamamoto, Sumiyasu: On the estimation of the coefficient of variation by the ratio of two quantities in large samples. *Kôdai math. Sem. Reports* Nr. 4, 115—122 (1952).

Sind ζ_1, ζ_2 durch $F(\zeta_i) = \varrho_i$ ($i = 1, 2$) definierte Quantile ϱ_i -ter Ordnung einer Verteilung $F(x)$, so folgen die entsprechenden Stichprobenquantile z_1, z_2 der gleichen Ordnung einer asymptotisch normalen Verteilung mit Mittelwerten ζ_1, ζ_2 und bekannten Varianzen σ_1^2, σ_2^2 und Kovarianz $\varrho \sigma_1 \sigma_2$. Aus dieser Simultanverteilung gewinnt man für $\xi = z_2/z_1$ im Falle $F(x) =$ Normalverteilung eine schon von E. C. Fieller (dies. Zbl. 6, 21) angegebene Mischverteilung, aus der Verf. unter gewissen Annahmen approximative Normalität der Variablen $\eta = (\zeta_1 \xi - \zeta_2)/\sqrt{\sigma_1^2 \xi^2 + \sigma_2^2 - 2\varrho \sigma_1 \sigma_2 \xi}$ herleitet. Dieses Resultat wird zur Herstellung einer Punktschätzung für den unbekannten Variationskoeffizienten $\bar{V} = \sigma/m$ der Ausgangsverteilung benutzt, und darauf aufbauend zur Prüfung von Hypothesen bez. \bar{V} und zur Bestimmung eines Confidenzintervalls für \bar{V} . Schließlich werden die für diesen Zweck optimalen Quantilenordnungen bestimmt, d. h. diejenigen ϱ_1, ϱ_2 , die das kürzeste Confidenzintervall liefern. *M. P. Geppert.*

Miyasawa, Kôichi: Minimax estimations. *Bull. math. Statist.* 5, 59—76 (1952).

The following sequential estimation problem is treated: The observations X_1, X_2, \dots are independent and normal (θ, σ^2) with known σ . The successive sampling stages may comprise any number of observations. The terminal decisions are statements of form $L_1 \leq \theta \leq L_2$; the interval (L_1, L_2) may be (a) arbitrary, (b) of prescribed length, (c) of length zero. The total loss is of form $c n + k(L_2 - L_1) + W(\theta, L_1, L_2)$ where n is the number of observations, c and k are constants, and $W = (\theta - L_1)^2$ for $\theta < L_1$, $W = (\theta - L_2)^2$ for $\theta > L_2$, $W = 0$ inside (L_1, L_2) . — The minimax solution turns out to be a fixed sample size procedure. The optimum sample size and the interval or point estimates are indicated for the cases (a)-(c).

G. Elfving.

Wolfowitz, J.: Consistent estimators of the parameters of a linear structural relation. *Skand. Aktuarietidskr.* 1952, 132—151 (1952).

Ausgang der Untersuchungen sind zwei durch eine lineare Gleichung mit den Parametern θ und p verbundene zufällige Veränderliche ξ und ξ_0 , von denen wenigstens eine nicht normal verteilt ist. Verf. führt zwei neue, von ξ und ξ_0 unabhängige zufällige Veränderliche u und v mit gemeinsamer Normalverteilung ein und setzt $X = \xi + u$ und $Y = \xi_0 + v$. Es seien nun $x_i; y_i$ für $i = 1, \dots, n$ voneinander unabhängige Paare von Beobachtungswerten für X und Y . Dann konstruiert Verf. zwei Folgen von Funktionen $\theta_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ und $p_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ derart, daß sie für $n \rightarrow \infty$ stochastisch nach θ bzw. p konvergieren. Das sind Schätzfunktionen für θ und p . — Die Methode des Verf. hat vor anderen Methoden die folgenden Vorzüge: 1. Sie gibt übereinstimmende Schätzfunktionen für beide Parameter ohne eine andere Voraussetzung als die unentbehrliche Annahme der Nichtnormalverteilung für eine der Veränderlichen ξ und ξ_0 . 2. Die Schätzfunktion für θ ist grundsätzlich gültig für alle Werte von θ . 3. Die Methode kann auf die Schätzung der Parameter einer linearen Relation zwischen mehr als zwei zufälligen Veränderlichen ausgedehnt werden. Zu der (nicht einfachen) Beweisführung werden vier Lemmata benötigt, die an und für sich Interesse beanspruchen dürfen.

P. Lorenz.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. XIII₁, XIII₂. Estimation of genotypes. *Proc. Japan Acad.* 28, 432—437, 438—443 (1952).

(Parts XII₁, XII₂, this Zbl. 48, 122). The problem is to estimate the genotype of an individual if his own phenotypes and the phenotypes of children are known, with or without reference to the phenotype of the spouse. In addition we assume that we know whether the character in question is dominant or recessive.

H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. XIV. Decision of biocular twins. *Proc. Japan Acad.* 28, 444—449 (1952).

Both members of a pair of monovular twins possess the same type with respect to any inherited character, whereas biovular twins behave like ordinary brethren. The problem is investigated to decide by means of an inherited character whether or not a pair of twins be biovular.

H. Geiringer.

Komatu, Yâsaku: Probability theoretic investigations on inheritance. XV₁. Detection of interchange of infants. Proc. Japan Acad. 28, 517—520 (1952).
Komatu, Yâsaku: Probability theoretic investigations on inheritance. XV₂, XV₃, XV₄. Detection of interchange of infants. Proc. Japan Acad. 28, 521—526, 527—532, 533—537 (1952).

Consider two triples, each consisting of two parents and a child. The problem is to decide whether by investigation of certain inheritable characters it is possible to assert or to compute a probability for the „interchange“ of the infants. — First a direct method of A. S. Wiener [Z. f. indukt. Abstammungs- und Vererbungslehre 59, 227—235 (1931)] is used. — In XV₂, Wiener's procedure is considered in a more systematic way, carried through in XV₃. So far it has been assumed that genotypes were known. The problem is complicated if phenotypes only can be observed (XV₄).

H. Geiringer.

Krooth, Robert S.: The fertility of the parents of abnormals. Ann. Eugenics 17, 79—89 (1952).

The author discusses the problems in the measurement of the fertility of parents ascertainable through their children affected with a hereditary condition, in cases of exhaustive as well as enumerative ascertainment. He derives in either case precise approximate formulae for the unbiased estimate of mean sibship size and its variance. He then uses the formulae to compute corrected mean family sizes in several previously published series of data. Some criticisms are made of a number of papers published in this field.

Y. Komatu.

Theil, H.: On the time shape of economic microvariables and the Munich business test. Revue Inst. internat. Statist. 20, 105—120 (1952).

Eyraud, Henri: Théorie mathématique des changes. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 15, 47—54 (1952).

Le phénomène du change, en dehors de ce que l'A. appelle, avec une charitable modération, les „décisions arbitraires et incohérentes de gouvernements éphémères ou d'offices plus ou moins compétents“, est étudié sur les schemas simplifiés suivants: 1° Cas de deux pays dont l'un est débiteur de l'autre, avec des lois de demande et de prix de revient linéaires. L'équation du change ne dépend que des coefficients de ces lois et du revenu. 2° Cas de deux pays, chacun ayant le monopole d'un produit qui trouve une loi de demande dans l'autre; le change dépend d'une équation du 3^{ième} degré dont une seule racine est positive. 3° Influence des droits d'exportation et d'importation; les premiers abaissent le cours du change du pays qui les établit, les seconds le relèvent. 4° Cas de n pays produisant m marchandises. Il y a $n - 1$ équations, indépendantes, des changes.

A. Sade.

Isard, Walter: A general location principle of an optimum space-economy. Econometrica 20, 406—430 (1952).

Die Rohstoffquellen und die Abnehmer (Märkte) einer Produktionsstätte mögen sich an l diskreten Punkten des 2-dimensionalen Wirtschaftsraumes befinden. Die gesamten Transportkosten sind $K = r_A m_A s_A + r_B m_B s_B + \dots + r_L m_L s_L$, worin die r_i die Transportraten (Kosten je Einheit der Menge und des Weges), die m_i die zu transportierenden Mengen und die s_i die Entfernungen der l Punkte von der Produktionsstätte sind. Für einen Standort minimaler Transportkosten, der nicht mit einem der l Punkte zusammenfällt, ist die Grenz-Substitutionsrate zwischen irgend 2 der l Punkte umgekehrt proportional zum Verhältnis der zugehörigen Transportraten, wenn die Gesamtheit aller anderen Transportkosten

unverändert bleibt, $-d(m_j s_j)/d(m_i s_i) \Big|_{\sum_{k \neq i, j} m_k s_k = \text{const.}} = r_i/r_j$. — Verf. erkennt

hierin ein wichtiges Prinzip jeder allgemeinen Standorttheorie, das auch für Rohstoff- und Abnehmergebiete (statt diskreter Punkte) und für den Fall mehrerer Produktionsstätten gilt, wie er zeigt.

H. Härten.

Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz: The inventory problem. II. Case of unknown distributions of demand. *Econometrica* 20, 450—466 (1952).

(Teil I, dies. Zbl. 46, 376.) Das Bevorratungsproblem für den Fall, daß die Verteilungsfunktionen F der künftigen Nachfrage nicht vollständig bestimmt sind, sondern nur soweit, daß sie einer gegebenen Klasse Ω angehören, wird von den Verff. mit den Mitteln der Waldschen Entscheidungstheorie behandelt. Sei x_i der zu Beginn des i -ten Zeitintervalls vorhandene Vorrat; Y die „Auftragspolitik“, die für jedes i den Betrag festsetzt, um den bei Beginn des Intervalls x_i zu erhöhen ist, Y die Klasse der Y ; ξ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über Ω , definiert für alle Borel-Mengen von Ω , mit $\xi(\Omega) = 1$, Ξ die Klasse der ξ . Mit Diskontierungsfaktoren α_i wird der Gegenwartswert der gesamten zu erwartenden Verluste $A(F, Y|x_1)$ als die zu Y und x_1 gehörige meßbare „Risikofunktion“ von F definiert. Sei ferner $A(\xi, Y|x_1) = \int_{\Omega} A(F, Y|x_1) d\xi$.

Das Bevorratungsproblem ist determiniert, wenn $\inf_{Y \in Y} \sup_{\xi \in \Xi} A(\xi, Y|x_1) = \sup_{\xi \in \Xi} \inf_{Y \in Y} A(\xi, Y|x_1)$.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn eine Kompaktheitsvoraussetzung über Ω und die Beschränktheitsvoraussetzung $A(F, Y|x_1) < M \sum_i \alpha_i$ mit $\sum_i \alpha_i < \infty$ gelten. — Die Verff. führen die

Entwicklung für endlich und für unendlich viele Zeitintervalle durch und deuten die Verallgemeinerungsmöglichkeiten entsprechend dem ersten Teil der Arbeit an.

H. Härten.

Ríos, Sixto: Neue Anwendungen der Statistik: Operative Forschung. *Trabajos Estadíst.* 3, 255—272 (1952) [Spanisch].

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Järnefelt, G. and Paul Kustaanheimo: An observation on finite geometries.

11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 166—182 (1952).

Sia L_p il campo di Galois delle classi resto rispetto a un modulo primo p , e si definisca nel modo consueto il piano euclideo sopra L_p . Gli AA. dimostrano innanzitutto che, in tale piano, si possono dividere tutte le $p^2 + p$ rette in due classi, (α) e (β) , composta ciascuna da $p(p+1)/2$ rette, a seconda che la forma: $(*) \Delta x^2 - k \Delta y^2$ è, o no, un residuo quadratico di p (nella $(*)$, k è non residuo; $\Delta x, \Delta y$ sono le differenze tra le coordinate omonime di due punti sulla retta che si prende in considerazione). A secondo che due punti $P(x, y)$, $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ siano congiunti da una retta della classe (α) o (β) , sarà risp. in L_p : $\Delta x^2 - k \Delta y^2 = s^2$ o $\Delta x^2 - k \Delta y^2 = ks^2$. Nel primo caso, si dirà allora che la lunghezza del segmento PP_1 è definita da s o dal suo opposto $-s$, in L_p ; nel secondo, che essa è definita da $s(\beta)$ o $-s(\beta)$. Nel piano euclideo sopra L_p si può allora introdurre una nozione di congruenza, chiamando congruenti due segmenti di uguale lunghezza. — È noto che esiste un gruppo I di assiomi monomorfo che riproduce il piano euclideo lineare sopra L_p , che cioè lo caratterizza (nella presente nota I comprende l'esistenza di almeno due rette, il fatto che esiste una ed una sola retta per 2 punti, che su ogni retta giacciono p punti, il postulato delle parallele, il teorema di Desargues). Ad essi, nella 2ª parte della nota, P. Kustaanheimo aggiunge un gruppo III di assiomi, relativi a una nozione astratta di congruenza, e dimostra che essi, insieme a I, caratterizzano la nozione di congruenza prima concretamente definita nel piano euclideo sopra L_p . Si tratta di 5 assiomiche esprimono alcune proprietà delle ordinarie congruenze nel piano euclideo reale. Ad essi va aggiunto o un teorema ausiliario non dimostrato (pag. 180) o un sesto assioma. Non è discussa la questione della sovrabbondanza o meno di tale sistema. — Questa ricerca fa parte di un piano di lavoro, proposto da G. Järnefelt, che mira alla approssimazione della geometria euclidea ordinaria per mezzo della geometria finita sopra L_p (facendo tendere p all'infinito in modo opportuno: v. P. Kustaanheimo, questo Zbl. 39, 156), e alla eventuale applicazione di essa per la creazione di una „fisica finita“ che abbia come limite la fisica ordinaria.

L. Lombardo-Radice.

Berman, Gerald: Finite projective geometries. *Canadian J. Math.* 4, 302—313 (1952).

In einer endlichen projektiven Geometrie $PG(t, p^n)$ der Dimension t über dem endlichen Koordinatenkörper $K(p^n)$ von p^n Elementen werden die linearen Unterräume und Kollineationen untersucht. Die Punkte von $PG(t, p^n)$ sind in natür-

licher Weise den Elementen des Körpers $K(p^{(t+1)n})$ zugeordnet, da dieser Körper als Erweiterungskörper $(p+1)$ -ten Grades von $K(p^n)$ durch die Koeffizientenvektoren (a_0, a_1, \dots, a_t) bezüglich einer Basis von $K(p^{(t+1)n})$ über $K(p^n)$ dargestellt werden kann. Hieraus ergeben sich weitere Darstellungen der Punkte von $PG(t, p^n)$, z. B. durch die Exponenten von α^k , wenn α ein primitives Element von $K(p^{(t+1)n})$ ist. Diese Darstellungen werden benutzt, um zu jedem gegebenen $s < t$ gewisse $t-s$ Kollineationen $\sigma_t, \sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{s+1}$ zu konstruieren, so daß die von ihnen erzeugte Gruppe transitiv auf der Menge der s -dimensionalen Unterräume von $PG(t, p^n)$ ist. Diese Unterräume selbst lassen sich damit algebraisch kennzeichnen und beschreiben. E. Sperner.

Bompiani, Enrico: *Sulle geometrie non-euclidee. Alcune costruzioni relative al piano iperbolico.* Archimede 4, 89—97 (1952).

Durch eine ganz einfache, außerordentlich anschauliche Konstruktion zeigt Verf. wie man die hyperbolische Metrik auf den bekannten Umdrehungsflächen im dreidimensionalen Raum verwirklichen kann. Verf. bedient sich dabei einer Korrespondenz zwischen einer Schar von konzentrischen hyperbolischen Kreisen und einer Schar von Kreisen in der Euklidischen Ebene, welche als Niveaulinien der gesuchten Fläche betrachtet werden. Je nachdem man in der hyperbolischen Ebene Horizykeln oder endliche Kreise wählt, erhält man die drei bekannten Typen der Umdrehungsflächen konstanter negativer Krümmung. J. C. H. Gerretsen.

Bompiani, Enrico: *Sulle geometrie non-euclidee. II. Alcune costruzioni relative al piano iperbolico.* Archimede 4, 143—147 (1952).

Fortsetzung des vorangehenden Aufsatzes. Es wird die Konstruktion eines Dreiecks aus gegebenen Winkeln ausführlich diskutiert. J. C. H. Gerretsen.

Bompiani, Enrico: *Sulle geometrie non-euclidee. Metrica iperbolica sulle superfici regolari chiuse di genere ≥ 2 .* Archimede 4, 228—235 (1952).

Abschluß der beiden vorangehenden Aufsätze. Der Verf. gibt eine anschauliche Konstruktion der Euklidischen und hyperbolischen orientierbaren geschlossenen zweidimensionalen Raumformen. J. C. H. Gerretsen.

Leisenring, Kenneth: *The natural map of the hyperbolic plane into the Euclidean circle.* Michigan math. J. 1, 5—10 (1952).

Ein Sonderfall und Vorläufer des Cayley-Kleinschen Modells der hyperbolischen Geometrie ist das von Beltrami stammende nichtkonforme Modell, wo hyperbolische Geraden als Sehnen eines gewöhnlichen Kreises erscheinen. Die Arbeit zeigt eine Abbildung der hyperbolischen Ebene auf dieses Modell, die am einfachsten im Cayley-Kleinschen Modell erläutert werden kann. Eine Horosphäre φ_1 berühre die absolute Fläche φ in U . Projiziert man das Innere eines ebenen Schnittes m von φ aus U auf φ_1 , so geht m in einen ebenen Schnitt m_1 von φ_1 über, denn φ , φ_1 und der Kegel aus U durch m haben die durch U gehenden Erzeugenden gemein und der Restschnitt des Kegels mit φ_1 ist ein Kegelschnitt m_1 . Da auf φ_1 euklidische Metrik gilt, entspricht der von m_1 begrenzte Teil von φ_1 , der U nicht enthält, dem Inneren eines euklidischen Kreises. F. Hohenberg.

Lauffer, R.: *Die Eulersche Gerade bei nichteuklidischer Maßbestimmung.* J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, 70—76 (1952).

Lauffer, R.: *Die Schwerpunkte eines nichteuklidischen Dreiecks.* J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, 119—124 (1952).

In diesen beiden Noten werden einige bekannte elementargeometrische Begriffe projektiv verallgemeinert und bezüglich einer Cayleyschen Metrik gedeutet. J. C. H. Gerretsen.

Emanuele, Maria Antonietta: *La trigonometria generale secondo Giovanni Bolyai.* Matematiche 7, 18—20 (1952).

Als Formeln der absoluten Trigonometrie bezeichnete Joh. Bolyai diejenigen allgemeinen trigonometrischen Beziehungen, die für alle drei Ebenen, die Euklidische, die Riemannsche und

die von Bolyai-Lobačevskij gelten. Die vorliegende Note zeigt, wie man diese für alle drei Ebenen, die euklidische, hyperbolische und elliptische, geltenden allgemeinen trigonometrischen Formeln unmittelbar erhalten kann. Unter Verwendung gewisser Symbole, die Bolyai (1832) und DeTilly (1870) eingeführt haben, gibt Verf. zwei Formeln an, auf welche die allgemeine Trigonometrie gegründet werden kann und die als eine Verallgemeinerung der Sätze anzusehen sind, die man in der euklidischen Geometrie als Sinussatz und Winkelsinussatz bezeichnet. Der letztere kann besonders leicht aufgestellt werden, wenn man die hyperbolische Geometrie als Geometrie der Pseudosphäre auffaßt oder wenn man sie unmittelbar mit Hilfe euklidischer Bilder konstruiert. Zu der vom Verf. angegebenen Literatur kann noch hinzugefügt werden das Buch von F. Schilling, Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie, I. Teil, 2. Aufl., Leipzig 1935 (dies. Zbl. 11, 170).

E. Löffler.

Szász, Paul: Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene. Acta Sci. math. 14, 174—178 (1952).

Die Formeln der hyperbolischen Trigonometrie werden auf eine auf H. Liebmann zurückgehende Weise hergeleitet. In manchen Hinsichten gelingt es dem Verf. Vereinfachungen zu erzielen, indem er eine klassische Konfiguration von Bolyai zur Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes benutzt und einen Kunstgriff von M. Réthy verwendet, der auch schon in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 39, 365) zu finden ist.

J. C. H. Gerretsen.

Szász, Paul: Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch Verwendung der Grenzkugel. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 327—333 (1952).

Es sei $p(a)$ der Grenzkreisbogen von der Höhe a , und es bezeichne $II(a)$ den Parallelwinkel, der dem Abstand a angehört. In der Note wird durch Verwendung einer Konfiguration von V. F. Kagan der Satz $p(a) \operatorname{tg} II(a) = k$ einfacher bewiesen — die Höhe dieses Grenzkreisbogens k ist der Abstand x vom Parallelwinkel $II(x) = 45^\circ$ —, aus der mitgewonnenen hyperbolischen Winkeltrigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks die Gleichung $\operatorname{tg} [II(a)/2] = e^{-a/l}$ hergeleitet und endlich gezeigt, daß l gleich der Bogenlänge von k ist.

F. Kárteszi.

Elementargeometrie:

● **Altshiller-Court, N.:** College geometry. An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle. 2. ed. New York: Barnes and Noble 1952. XIX, 313 p. \$ 4.00.

Toscano, L.: Sur les triangles podaires orthogonaux. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 21, 550—556 (1952).

In einem Dreieck ABC seien G der Schwerpunkt und G_1 sein inverser Punkt bezüglich des Umkreises (O, R) , ω der Brocardsche Winkel des Dreiecks ABC und ω_g der Brocardsche Winkel des senkrechten Fußpunktdreiecks von G (oder G_1). Sind t, t' die Torricellischen Strecken von ABC , so gilt die bekannte Gleichung $\operatorname{tg} \omega = (t^2 - t'^2)/\sqrt{3}(t^2 + t'^2)$. Verf. ordnet dem Brocardschen Winkel den Winkel δ durch die Gleichung $\operatorname{tg} \delta = (t^2 + t'^2)/\sqrt{3}(t^2 - t'^2)$ zu und beweist die Beziehung $\omega + \delta + \omega_g = 90^\circ$. ω und δ sind die Steinerschen Winkel des Fußpunktdreiecks von G . Für dieses werden viele metrische Beziehungen errechnet. M. Zacharias.

Toscano, L.: Points remarquables d'un triangle sur le cercle de Brocard et sur la droite de Lemoine. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 557—573 (1952).

Unter dem zirkumpedalen Dreieck (z. D.) eines Punktes P in der Ebene eines Dreiecks ABC versteht Verf. das Dreieck, dessen Ecken A_1, B_1, C_1 die Schnittpunkte der Geraden AP, BP, CP mit dem Umkreis (O, R) sind. Soll das z. D. dem Dreieck ABC kongruent sein, so können seine Seiten a_1, b_1, c_1 den Seiten a, b, c nach den 6 Permutationen dieser Seiten gleich sein. Von den zugehörigen Punkten P liegen 6 auf dem Brocardschen Kreis und 6 auf der Lemoineschen Geraden. Soll das z. D. dem aus den Medianen (Seitenhalbierenden) von ABC ähnlich sein, so liegen wieder 6 Punkte P auf dem Brocardschen Kreis und 6 auf der Lemoineschen Geraden. Die 24 Punkte P sind teils bekannt, teils neu. Unter den neuen Punkten sind zwei besonders bemerkenswerte Punkte ϑ, ϑ' , die in manchen Beziehungen den Brocardschen Punkten Ω, Ω' analog sind. Ebenso wie diese liegen sie symmetrisch bezüglich OK (K Lemoinescher

Punkt). Der Gleichung $\Omega \Omega' = [t t' (t^2 - t'^2) R \sqrt{3}] / [t^4 + t^2 t'^2 + t'^4]$ entspricht $\vartheta \vartheta' = [t t' (t^2 - t'^2) R \sqrt{3}] / [t^4 - t^2 t'^2 + t'^4]$ (t, t' die Torricellischen Strecken). Ist δ der in der vorstehend referierten Arbeit definierte Winkel und sind $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ die Winkel der Höhen mit den entsprechenden Medianen, so ist $\vartheta CA = \delta - \delta_a, \vartheta AB = \delta - \delta_b, \vartheta BC = \delta - \delta_c, \vartheta' BA = \delta + \delta_a, \vartheta' CB = \delta + \delta_b, \vartheta' AC = \delta + \delta_c$.
M. Zacharias.

Labra, Manuel: Eigenschaften der Winkelhalbierenden eines einbeschriebenen Vierecks. *Revista Soc. Cubana Ci. Fis. Mat.* 2, 179—187 (1952) [Spanisch].

Verf. berechnet die Abschnitte, die eine Winkelhalbierende (W.) eines Sehnenvierecks auf jeder der beiden gegenüberliegenden Seiten bildet, findet daraus die Länge der W. und beweist die Sätze: Das Doppelverhältnis der von einer W. auf den Gegenseiten gebildeten Abschnitte ist gleich dem Verhältnis der den halbierten Winkel bildenden Seiten. Die Schnittpunkte der vier Paare benachbarter W. sind die Ecken eines Sehnenvierecks. Seiten und Inhalt dieses neuen Sehnenvierecks werden berechnet.
M. Zacharias.

Barlotti, Adriano: Le formule di prostaferesi e il teorema di addizione delle funzioni circolari. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 30, 269—271 (1952).

● **Hart, Walter W. and Veryl Schult:** *Solid geometry*. Boston: D. C. Heath and Co. 1952. X, 198 p. 12 s. 6 d.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Grimm, G. und M. Rueff:** *Analytische Geometrie der Ebene*. 1. Teil. Zürich: Orell Füssli 1952. 147 S. mit 106 Fig. S. Fr. 7.30.

Dieses Buch ist im Auftrag des Schweizerischen Mathematikervereins verfaßt worden. Es ist der letzte Leitfaden im Unterrichtswerk dieses Vereins und enthält den Stoff, der als Abschluß für den Unterricht in Geometrie auf der Mittelschulstufe behandelt wird. Das Buch ist in die fünf folgenden Kapitel gegliedert: Punkt, Gerade, Vektor; der Kreis; geometrische Orte; Mittelpunktskegelschnitte in einfacher Lage; die Parabel. Als wesentliche Neuerung ist die Behandlung der linearen Geometrie auf Grund der Vektormethode zu erwähnen, die zum ersten Male durch diesen Leitfaden offiziell in der Schweiz für die Mittelschulstufe empfohlen wird. Die Vektoren werden sorgfältig eingeführt und für die Gerade konsequent verwendet. Sie kommen zum Teil auch bei der Behandlung des Kreises zur Anwendung. Das Buch ist trotzdem verwendbar für einen Lehrgang, der die Vektoren vermeidet, weil in den ersten Abschnitten die analytische Geometrie mit der reinen Koordinatenmethode entwickelt wird. Als bemerkenswert sei besonders hervorgehoben: Die Diskussion von einfachen Kurven höherer Ordnung als geometrische Orte, bevor die analytische Geometrie der Kegelschnitte in Angriff genommen wird; die vielseitige Verwendung von Parameterdarstellungen; eine knappe aber inhaltsreiche Behandlung projektiver Fragen. — Im ganzen Leitfaden stellt man eine große Sorgfalt in der Präzision der Begriffe, der Beweisführung und der Formulierung der Resultate fest. Der Verlag präsentiert das Buch in einem übersichtlichen, klaren Druck. Die zahlreichen, einwandfreien Figuren verdienen, besonders erwähnt zu werden.
H. P. Künzi.

Egerváry, Jenő: Über das orthozentrische Koordinatensystem und seine Anwendungen. *C. r. I. Congr. Math. Hongr.* 1950, 387—395 und russische Zusammenfassung. 396 (1952) [Ungarisch].

Bei der Untersuchung von Figuren, die mit einem orthozentrischen Simplex in Zusammenhang stehen, wendet man zweckmäßigerweise orthozentrische Koordinaten an, d. h. baryzentrische Koordinaten, deren Grundsimplex orthozentrisch ist. Wenn die Parameter, die ein $(n-1)$ -dimensionales orthozentrisches Grundsimplex bestimmen, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sind, wenn ferner die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ durch $\sum x_i = \sum y_i = 1$ normiert sind, so ist die Formel für den Abstand $X Y^2 = \sum \lambda_i (x_i - y_i)^2$. Als Anwendung hiervon kann man zeigen, daß die Carnotschen Hyperquadriken, die die Gleichung $\sum \lambda_i x_i^2 - (\sum \lambda_i x_i) (\sum x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) haben, Kugeln sind, die die Höhenschnittpunkte und die Schwerpunkte aller $(k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexe enthalten und daher als Verallgemeinerungen des Feuerbachschen Kreises angesehen werden können. — Ferner gelangt man zu folgendem dreidimensionalen Analogon des Satzes von Ptolemäus: Wenn die Diagonalen eines einer Kugel einbeschriebenen Hexaeders sich in einem Punkt schneiden, so ist die Quadratsumme der geometrischen Mittel homologer Kanten gleich dem Quadrat des geometrischen Mittels der Diagonalen. Vgl. die folgenden Arbeiten des Verf.: dies. Zbl. 18, 371; 22, 383; 23, 157; 39, 159.

Autoreferat.

Kárteszi, Ferenc: On spheres touching the sides of skew quadrangles. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 613—617, russische und engl. Zusammenfassgn. 617, 618 (1952) [Ungarisch].

The paper is concerned with quadrangles $A_1 A_2 A_3 A_4 = A$ defined by four non-coplanar vertices. The configuration of the spheres touching all of the straight lines $|A_1 A_2|$, $|A_2 A_3|$, $|A_3 A_4|$, $|A_4 A_1|$ is discussed. — The planes $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$ and the planes $\omega''_1, \omega''_2, \omega''_3, \omega''_4$ bisecting the angles of the quadrangle A internally resp. externally, are in general the planes of two tetrahedra ω' and ω'' . Three of the planes ω'_i and the plane ω''_4 in the fourth vertex of A pass through one point. The four points thus defined are the vertices of the tetrahedron ω' . Again, three of the planes ω''_i and the plane ω'_4 in the fourth vertex of A pass through one point; these four points are the vertices of ω'' . Hence the tetrahedra ω' and ω'' are in a so-called Moebius configuration. The eight vertices of these tetrahedra are the centres of the eight spheres touching all of the four lines considered. — If a sphere touches each of the lines between the two vertices, then it is called an inscribed sphere. The number of the inscribed spheres is either zero or infinite. Inscribed spheres exist if and only if the sum of the lengths of two opposite sides of A is equal to that of the two other sides of A . In this case the four points of contact are coplanar and the tetrahedron ω' degenerates into four planes of a pencil of planes. Autoreferat.

Federici Casa, Carlos: Über die analytische Geometrie der „zusammengesetzten Örter“. I. Revista Mat. element. 1, 55—69 (1952) [Spanisch].

Lorent, H.: Sur un ou deux ensembles de circonférences de plan ou de sphères de l'espace. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 24—39 (1952).

In der Oxy -Ebene seien P, Q solche Punkte, daß $OP = PQ$ und PQ der x -Achse parallel sei. Man studiert den Ort von P (bzw. Q), falls Q (bzw. P) einige einfache ebene Kurven durchläuft. Verallgemeinerungen in der Ebene und im Raum werden betrachtet. M. Benedicty.

Lorent, H.: Courbes construites à partir de deux coniques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 232—246 (1952).

In der Ebene sind zwei Kegelschnitte K, K' gegeben. Man studiert den Ort des Schnittpunktes der Tangenten bzw. der Normalen der Kurve K' in den Punkten, die auf einer variablen Tangente der Kurve K liegen. Spezielle metrische Fälle werden betrachtet. M. Benedicty.

Lorent, H.: Courbes construites à partir de deux lignes dépendant de deux paramètres liés. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 540—549 (1952).

Seien K, K' zwei ebene Kurven, welche von zwei Parametern a, b abhängen, die einer Relation genügen; sei $A(\xi, \eta)$ ein gemeinsamer Punkt von K, K' , und P der Schnittpunkt der Geraden $x = \xi$ und $b x = a y$. Es wird der Ort von P studiert, falls K, K' Gerade, Kegelschnitte, Lamésche Kurven, usw. sind. M. Benedicty.

Ylitch-Daiovitch, Militsa: Quelques théorèmes de la géométrie projective. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3—4, 43—47 [Serbisch] mit französ. Zusammenfassg. 48 (1952).

L'A. démontre une propriété intéressante d'un faisceau (P) des demidroites concourantes en un point P : chaque couple de demidroites (P) et les droites $l_i (i = 1, 2, 3, 4)$, qui ont un point commun L , forment de l'un côté du point L des quadrilatères complets; alors les points d'intersection des diagonales de tous ces quadrilatères sont situés sur une droite qui passe par le point L . — De même, étant formés les quadrilatères complets par deux droites $l_i (i = 1, 2)$ concourantes en un point L et deux des demidroites (P) qui passent soit des côtés opposés du point L , soit d'un côté du point L les points d'intersection des diagonales et les points de rencontre des côtés opposés des tous ces quadrilatères appartiennent à une droite qui passe par le point L . Autoreferat.

Fenchel, W.: A generalization of spherical trigonometry. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 139—147 (1952).

Detta A una collineazione di uno spazio proiettivo complesso ad n dimensioni in sè, e detti $a_{q\sigma}$ i coefficienti della sostituzione lineare che realizza la A , l' A . pone $\text{mr } A = \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^n a_{qe}$ e definisce poi un numero, che chiama $\cos A$ mediante la relazione $\cos A = \text{mr } A / \det A$. Dette poi B e C altre due collineazioni dello stesso

spazio ed introdotti per esse dei simboli analoghi, l'A. dimostra il Teorema: Se sono verificate le tre condizioni seguenti $C = A \cdot B$, $\det C = \det A \cdot \det B$, $\text{mr}(A \cdot B) = \text{mr} A \cdot \text{mr} B$, allora si ha $\cos C = \cos A \cos B$. Questo Teorema risulta essere generalizzazione di un altro che vale per $n = 1$ e che esprime una nota relazione di trigonometria sferica (o, se si vuole, dei movimenti rigidi di una sfera in sè) mediante proprietà delle proiettività su una variabile complessa. — L'A. inoltre interpreta proiettivamente le relazioni espresse nell'enunciato del Teorema mediante relazioni tra i gruppi di punti uniti delle proiettività A e B . *F. Manara.*

Bottema, O.: Eine Abbildung der Polar dreiecke eines Kegelschnittes auf die Punkte des Raumes. *Simon Stevin* 29, 131—139 (1952) [Holländisch].

Die ∞^3 Polar dreiecke eines Kegelschnittes K lassen sich, wie bereits Schaaake gezeigt hat [Nederl. Akad. Wet., Proc. 27, 584—600 (1924)], auf die Punkte eines R_3 abbilden. Verf. bespricht einen besonderen Fall dieser Abbildung, dem Begriffe der Euklidischen Metrik zugrunde liegen. Hier werden die Polar dreiecke mit drei zusammenfallenden Ecken auf eine rationale C^6 abgebildet. Die Punkte ihrer Tangentenfläche entsprechen den Polar dreiecken, bei denen zwei Eckpunkte zusammenfallen. Weitere Untersuchungen führen auf die Diskriminantenfläche einer Gleichung vierten Grades. *R. W. Weitzenböck.*

Bompiani, Enrico: Sulle coordinate di Grassmann. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 13, 329—335 (1952).

Entro uno spazio proiettivo S_n si consideri uno spazio subordinato S_k individuato mediante $k + 1$ punti linearmente indipendenti: i determinanti di ordine $k + 1$ estratti dalla matrice delle coordinate di detti punti sono le coordinate di Grassmann di S_k . Tali coordinate omogenee costituiscono un sistema alternante ed essendo sovrabbondanti soddisfano ad un insieme di relazioni quadratiche di cui le più semplici sono quelle, a tre termini, estensioni della relazione che intercede fra le coordinate di Plücker di una retta in S_3 . Bompiani, ripartendo le coordinate di S_k in diversi gruppi, prova che le coordinate del primo gruppo, in numero di $(k + 1)(n - k)$, determinano già lo S_k e quindi anche tutte le rimanenti coordinate; prova poi che le relazioni a tre termini sono sufficienti a determinare tutte le coordinate in funzione di quelle del primo gruppo, se si aggiunge che le coordinate da esse non determinate devono essere nulle. Assegna infine, in funzione delle rispettive coordinate, un sistema di condizioni perchè un S_h e un S_k si seghino in S_i : esse sono necessarie e sufficienti e perciò in numero minore di quelle solo sufficienti già date da Buzano (questo Zb. 14, 225 e 17, 129). *P. Buzano.*

Rozenfel'd, B. A.: Die Geometrie der Mannigfaltigkeit der Unterräume eines projektiven Raumes als projektive Punktgeometrie. *Trudy Sem. vektor. tenzor. Analiz* 9, 213—222 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet als geometrisches Objekt die Menge aller Systeme von m Vektoren ε_α ($\alpha = 1, \dots, m$) des linearen L_{nm} und erklärt zwischen diesen Systemen Addition und linksseitige Multiplikation mit m -reihigen, reellen Matrizen in leicht ersichtlicher Weise. Dadurch ergibt sich ein n -dimensionales lineares Vektorgebilde L_m^n über dem Ring der reellen m -reihigen Matrizen. Lineare Transformationen in L_{nm} induzieren solche in L_m^n und umgekehrt. Teilgebilde L_p^n ($p < n$) lassen sich in L_m^n ebenfalls leicht erklären. Wie üblich wird dann aus einem L_{m+1}^n ein projektiver Raum P_m^n erklärt mit einer Kollineationsgruppe. Zwei Punkte in diesem P_m^n können jedoch unendlich viele Geraden bestimmen und ebenso zwei Geraden sich in unendlich vielen Punkten schneiden. Dies sieht man leicht ein, wenn man beachtet, daß die Punkte eines P_{m+1}^{n+1} auf die P_m eines P_{nm+n+m} abgebildet werden können. Jedoch gilt die Dualität, und man kann 4 Punkten einer Geraden ein verallgemeinertes Doppelverhältnis zuordnen, das als Äquivalenzklasse einer $(m + 1)$ -reihigen Matrix erscheint. Auch nichteuklidische Geometrien lassen sich in den P_m^n erklären. Verf. erwähnt davon zwei Typen, die beide im P_{2n+1} gedeutet werden können, wenn darin noch zusätzlich eine Nullkorrelation ausgezeichnet ist, mit deren Hilfe man leicht verallgemeinerte Doppelverhältnisse erklären kann. Beim 1. Typus liegt ein P_{n+1}^{n+1} vor, und das Absolute wird auf die Komplexgeraden des P_{2n+1} abgebildet; beim 2. Typus liegt ein P_1^{n+1} vor, und die autopolaren P_m der Nullkorrelation des P_{2m+1} bilden das Absolute. Dieser Typus findet sich bereits bei Hua-Lookeng [Trans. Amer. Math. Soc. 57, 441—481 (1945)] behandelt. *W. Burau.*

Blaschke, Wilhelm: Conessioni fra varietà di C. Segre e la geometria dei tessuti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 259—261 (1952).

Die Segresche V_3 des projektiven R_7 mit der Parameterdarstellung $x_0 = 1$, $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_3$, $x_4 = t_2 t_3$, $x_5 = t_3 t_1$, $x_6 = t_1 t_2$, $x_7 = t_1 t_2 t_3$ enthält bekanntlich die drei Scharen von Quadriken $t_i = \text{konst.}$ Schneidet man die V_3 mit einer Hyperebene genügend allgemeiner Lage, so entsteht eine V_2 , auf der die Kurven $t_i = \text{konst.}$ Kegelschnitte sind. Verf. zeigt, daß diese drei Kegelschnittscharen ein Sechseckgewebe bilden.

G. Bol.

Thalberg, Olaf M.: „Conic involutions“ with a conic as coincident curve. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I, Nr. 1, 10 S. (1952).

L'A. étudie les involutions planes I ainsi définies: 1° deux points homologues sont toujours sur une même conique K du faisceau linéaire (K) défini par 4 points donnés a, b, c, d ; 2° le lieu des points doubles de I est une conique C passant par a, b mais non c, d . Toute conique K coupe C en deux points de coïncidence de I ; deux K particulières touchent C , l'une en e , l'autre en f . Appelons δ le point (ab, cd) , $\delta_1(ac, bd)$, $\delta_2(ad, bc)$; à tout point p de ac (ou bd) correspond un point q de cette droite, le point δ_1 et celui où ac (ou bd) coupe C étant conjugués par rapport à p, q ; de même pour la droite ad (ou bc) et le point double δ_2 . Les deux points δ_1, δ_2 seront donc appelés les points isolés de coïncidence. Soit g le conjugué harmonique de δ par rapport aux intersections α, β de cd avec C : chacune des ∞^2 sextiques ayant a, b pour points triples, c, d, e, f pour points doubles, g pour point simple coupe C en deux points restants p_1, p_2 , la tangente de la sextique en p_1 (p_2) étant conjuguée de p_1, p_2 par rapport à la tangente à C et à la tangente à la conique $ab cd p_1 p_2$. La conique $ab ef c d$ est la courbe F (fondamentale) de $d(c)$. La cubique a^2, b, c, d, e, f, g (a point double) touche C en b , coupe la droite bc en un troisième point, conjugué harmonique de b par rapport à δ_2 et à la nouvelle intersection de C avec cette droite. Même résultat pour la droite bd . La conique $ab def$ coupe ac en un nouveau point conjugué harmonique de c par rapport à δ_1 et au nouveau point (C, ac); de même pour bc ; la conique en jeu coupe cd au conjugué de c par rapport aux points α, β communs à C et cd . De même pour la conique $ab cef$. Les deux droites ae, af coupent cd en deux points conjugués par rapport à α et β ; et $d c (b d)$ en deux points conjugués par rapport à δ_2 et au nouveau point commun à C et $bc (b d)$. La droite ef et la conique $ab efg$ coupent cd en deux nouveaux points conjugués par rapport à α et β . La droite ce et la conique $ab c f g$ coupent C au même nouveau point. Les 7 points fondamentaux a, b, c, d, e, f, g et les deux points doubles isolés δ_1, δ_2 sont les neuf points de base d'un faisceau de cubiques se correspondant chacune à elle-même. L'A. définit ainsi la „courbe polaire harmonique“ d'une courbe (C) donnée, par rapport à un quadruple de points (a, b, c, d) : une conique variable K issue de a, b, c, d coupe (C) et la courbe polaire harmonique en deux couples variables de points conjugués harmoniques sur K . Il existe 8 faisceaux de cubiques auto-conjuguées, $a^2 c d e f g, b^2 c d e f g, a^2 b c e f \delta_2, a^2 b d e f \delta_1, b^2 a c e f \delta_2, b^2 a d e f \delta_1, a b c^2 e f g, et a b d^2 e f g$, chaque cubique étant polaire harmonique de C par rapport à (a, b, c, d) . Il existe 4 systèmes à deux paramètres de quartiques auto-conjuguées de genre 1, polaires harmoniques de C relativement à (a, b, c, d) . Se faisceau de quartiques $a^3 b c d e f$ qui touchent une conique K en l'une de ses intersections restantes avec C sont toutes auto-conjuguées et polaires harmoniques. On peut de même prouver l'existence de ∞^3 quintiques auto-conjuguées, etc.

B. Gambier.

Spampinato, Nicolò: Teoremi fondamentali sulle falde bidimensionali con l'origine in un punto o in una curva. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. I), 70—84 (1952).

Sei $x_i = f_{i0}(u, v) + f_{i1}(u, v) + f_{i2}(u, v) + \dots$ ($i = 1, 2, 3, 4$) die auf homogene Punktkoordinaten bezogene und in der Umgebung von $u = 0, v = 0$ nach Taylorreihen entwickelte Parameterdarstellung eines Flächenstücks im projektiven R_3 ; die f_{ik} sind also Formen k -ten Grades in u und v mit konstanten Koeffizienten. Verf. betrachtet nun die „Reduzierten“ F_k , d. s. jene die Fläche approximierenden geometrischen Gebilde, die durch Abbruch der Reihen nach dem k -ten Glied erklärt sind. Im allgemeinen Fall (in welchem insbesondere nicht alle f_{i0} verschwinden) ist F_0 ein Flächenpunkt, F_1 die zugehörige Tangentialebene, F_2 eine Steinerfläche, allgemein F_k eine rationale Fläche der Ordnung k^2 , deren Ebene Schnitte sich auf ein lineares System 3. Stufe von Kurven k -ter Ordnung in der (u, v) -Ebene abbilden. Sind jedoch alle $f_{i0} = 0$, so existiert kein F_0 ; wenn in diesem Falle nicht auch alle f_{i1} verschwinden, so ist F_1 im allgemeinen eine Gerade, F_2 eine kubische Regelfläche mit der (einfachen) Leitgeraden F_1 , allgemein F_k eine rationale Fläche der Ordnung $k^2 - 1$. Verschwinden nun alle f_{ik} bis zur $(h - 1)$ -ten Ordnung, hingegen nicht mehr alle f_{ih} , so beginnen die Reduzierten mit der rationalen Kurve h -ter Ordnung F_h , während F_k für $k > h$ im allgemeinen eine F_h enthaltende rationale Fläche der Ordnung $k^2 - h^2$ ist, auf welcher, den Geraden der (u, v) -Ebene entsprechend, ∞^2 rationale Erzeugende $(k - h)$ -ter Ordnung verlaufen. — Verf. weist ausführlich nach, daß die Reduzierten einer Fläche einander in F_0 , bzw. (für $h > 0$) längs F_h berühren. Es findet sich jedoch keinerlei Hinweis auf

die naturgemäß zu erwartenden und im Wesen der vorliegenden Approximation liegenden Oskulationseigenschaften der höheren Reduzierten. Die Arbeit schließt mit zwei Bemerkungen über mehrdimensionale Verallgemeinerungen.

W. Wunderlich.

Algebraische Geometrie:

Rozenfel'd, B. A. und Z. A. Skopec: Quadatische Cremona-Transformationen auf der Ebene und komplexe Zahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 801—804 (1952) [Russisch].

Unter komplexen Zahlen sind hier Zahlen $a + be$ zu verstehen, wobei a und b reelle Zahlen und $e^2 = +1, 0$, oder -1 ist. Jede quadratische Cremona-Transformation der Ebene läßt sich bis auf eine Kollineation eindeutig durch eine gebrochen-lineare Transformation in einem der drei genannten Zahlensysteme darstellen, je nachdem ob die Cremona-Transformation reelle, zusammenfallende oder komplexe Fundamentalpunkte hat.

Ott-Heinrich Keller.

Vest, M. L.: Cremona transformations associated with the chords of a twisted cubic. Duke math. J. 19, 397—408 (1952).

Es seien Cremona-Transformationen des R_3 in sich betrachtet. Wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Kongruenz bilden, ist diese linear und besteht entweder aus allen Geraden durch einen Punkt oder aus allen Geraden, die eine feste Gerade und eine sie $(m-1)$ -fach treffende Kurve m -ten Grades schneiden, oder aus allen Sehnen einer Kurve 3. Grades. Die ersten beiden Fälle behandelte Verf. in Duke math. J. 12, 621—628 (1945) und 13, 401—409 (1946). Den dritten Fall behandelt Verf. in vorliegender Arbeit. Er betrachtet eine gewundene kubische Raumkurve r und ein Büschel von Flächen $(2n+2)$ -ter Ordnung, die n -fach durch r gehen. Dieses hat dann außerdem noch eine Basiskurve von der Ordnung $n^2 + 8n + 4$. Durch einen allgemeinen Punkt P geht eine Fläche F des Büschels und eine Sehne von r . Diese trifft F außer in P und den Punkten von r noch in einem Punkt Q . Verf. betrachtet die involutorische Cremona-Transformation, die in der Zuordnung von P und Q besteht, und bestimmt ihre Fundamentalkurven, ihren Grad, ihre Gleichungen, ihre charakteristischen Zahlen. Durch eine kleine Abänderung der Definition bekommt Verf. auch nicht-involutorische Transformationen ins Blickfeld, die er unter den gleichen Gesichtspunkten behandelt.

Ott-Heinrich Keller.

Chisini, Oscar: Sulla costruzione a priori delle trece caratteristiche. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 353—366 (1952).

Verf. beschäftigt sich mit einem speziellen Problem aus der von ihm und seinen Schülern entwickelten Theorie der charakteristischen (oder algebraischen) Zöpfe. Eine gute Einführung in diesen Fragenkreis gibt eine Arbeit von M. Dedô [Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 83, 227—248 (1951)]. Es wird bewiesen: Der charakteristische Zopf einer von einem Parameter λ abhängigen Kurve φ mit drei Rückkehrpunkten, die sich für $\lambda = 0$ reduziert auf eine doppelt gezählte Kurve γ mit dem Verzweigungspunkt O und Restbestandteil ψ , die γ in O berührt, hat eine typische Gestalt, welche in einer Figur dargestellt wird. Dieser Fall ergibt sich, wenn φ die Verzweigungskurve einer mehrfachen Ebene ist, aber es ist möglich, den allgemeinen Fall (d. h. den Fall, daß φ nicht notwendig Verzweigungskurve ist, jedoch die oben erwähnten Eigentümlichkeiten aufweist) auf diesen zurückzuführen.

J. C. H. Gerretsen.

Manara, Carlo Felice: Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 54—65 (1952).

Verf. zeigt daß alle dreifachen Ebenen mit derselben Verzweigungskurve birational identisch sind. Es ist möglich, für zwei dreifache Ebenen mit derselben Verzweigungskurve φ sogenannte projektive Hauptmodelle zu erhalten, dargestellt durch $z^3 + 3Pz + Q = 0$, $z^3 + 3P_1z + Q_1 = 0$, derart daß die Kurven $P = 0$ und $P_1 = 0$ dieselbe Ordnung haben und die Kurve φ in derselben Punktgruppe

berühren. Es wird nun bewiesen, daß die dreifachen Geraden über einer allgemeinen Geraden der (x, y) -Ebene birational identisch sind, und das gibt die Möglichkeit, das angezeigte Ergebnis zu erhalten. — In einer späteren Arbeit (dies. Zbl. 45, 242) hat Verf. gezeigt, daß dieser Beweisgedanke verallgemeinerungsfähig ist.

J. C. H. Gerretsen.

Andreotti, A.: Recherches sur les surfaces irrégulières. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8^o, 27, Nr. 4, 56 p. (1952).

On sait que Picard a démontré que si la variété des groupes de n points d'une surface algébrique F d'irrégularité $q > 0$ est une variété (abélienne) de Picard, on a $n = 1$ et F est une surface de Picard. L'A. donne deux démonstrations de ce théorème dont l'une, géométrique, est particulièrement simple. Le résultat de Picard signifie que l'on ne peut étendre aux surfaces le théorème d'inversion de Jacobi relatif aux courbes. Severi a cependant montré que ce théorème, sous une forme plus restreinte, pouvait s'étendre aux surfaces. Le théorème d'inversion de Severi fait correspondre à une surface irrégulière soit une courbe, soit une surface tracées sur la variété de Picard relative à la surface. L'A. étend le théorème de Severi au cas où la surface possède un système régulier d'intégrales réductibles. — Si F , d'irrégularité $q > 0$, possède un système régulier ∞^{p-1} d'intégrales réductibles ($p \leq q$), l'A. considère les groupes de points où ces intégrales prennent des valeurs congrues par rapport aux périodes. Ou bien la surface F contient un faisceau irrational de genre π ($p \leq \pi \leq q$) ou bien les groupes de points en question forment sur F une involution d'irrégularité π ($p \leq \pi \leq q$) et il existe une image de cette involution tracée sur la variété de Picard construite en partant de la matrice de Riemann des périodes des intégrales réductibles considérées. L'A. démontre ce théorème en partant des fonctions θ . Il donne plusieurs applications intéressantes de ce théorème. — L'A. aborde ensuite la classification des surfaces d'irrégularité q dont l'image sur la variété de Picard est simple. Il exclut de ses considérations les surfaces possédant un faisceau de genre q de courbes. La méthode est basée sur l'emploi des fonctions θ et du théorème de la base de Hilbert. — Les surfaces d'irrégularité 3 sont découpées sur la variété de Picard V_3 par la variété des zéros d'une fonction intermédiaire. Pour le cas $q \geq 4$, l'A. considère l'anneau homogène formé par les fonctions θ attachées à une matrice de Riemann (qu'il suppose réduite à la forme canonique introduite par Krazer) et le théorème de la base d'Hilbert pour ces fonctions. Après avoir développé les éléments essentiels de cette théorie, il étudie les idéaux de fonctions θ attachés à une surface irrégulière. Il considère ensuite plus particulièrement les surfaces d'irrégularité 4 de V_4 qui sont intersections complètes de deux hypersurfaces de cette variété et les surfaces qu'il appelle de résiduel ϱ fini. Une telle surface fait partie de l'intersection de deux hypersurfaces de V_4 , intersection qui est complétée par une troisième surface, et ainsi de suite. Après ϱ opérations, on obtient une dernière surface intersection complète de deux hypersurfaces. Dans chaque cas, l'A. détermine les genres des surfaces envisagées et le nombre de modules dont elles dépendent. Il montre enfin comment on peut étendre ses résultats au cas où $q \geq 5$.

L. Godeaux.

Andreotti, A.: Recherches sur les surfaces algébriques irrégulières. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8^o, 27, Nr. 7, 36 p. (1952).

F étant une surface d'irrégularité q les systèmes continus formés de ∞^q systèmes linéaires de courbes tracées sur F sont représentés par une variété de Picard V' introduite par Castelnuovo. Soit d'autre part V la variété de Picard, introduite par Severi, relative à la matrice des périodes des intégrales de Picard de première espèce attachées à F . L'A. avait démontré que les systèmes continus formés de ∞^q systèmes linéaires d'hypersurfaces tracées sur V étaient représentés par V' . Il établit que cette propriété est réciproque. Cela lui permet d'obtenir une démonstration simple du théorème de R. Torelli, à savoir que si deux courbes algébriques ont même tableau de périodes de leurs intégrales abéliennes, elles sont birationnellement identiques. — Partant ensuite d'une surface F irrégulière dont l'image sur la variété de Picard est une surface F' , il suppose qu'il existe entre F' et F une correspondance $(1, n)$. Dans le mémoire précédent, il avait considéré le cas $n = 1$. Sous une hypothèse donnée, il démontre que si $n > 1$, F' est une surface elliptique dont il détermine la courbe de diramation, ou bien il n'y a pas de diramation. Pour obtenir ce résultat, il démontre que si le diviseur de Severi d'une surface est > 1 , elle est l'image d'une involution privée de points unis appartenant à une surface algébrique, donnant ainsi la réciproque d'un théorème établi par Godeaux [Bull. Acad. Sci. Cracovie (A) 1914, 362—368].

L. Godeaux.

Godeaux, Lucien: Sur un faisceau de surfaces algébriques irrégulières. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 314—319 (1952).

Etude de la surface $F: \sum_1^4 x_i^{12} - \sum_{i,j} 2 x_i^6 x_j^6 + a(x_1 x_2 x_3 x_4)^3 = 0$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) et $a \neq \pm 8$, dotée de 36 points doubles tacnodaux, 6 à 6 sur les arêtes du tétraèdre de référence, par lesquels les adjointes passent avec même plan tangent, contenant l'arête opposée. En formant leur équation, on trouve $p_g = 63$, $p_a = 57$. Les surfaces F forment donc un faisceau de surfaces d'irrégularité 6. *B. d'Orgeval.*

Burniat, Pol: Surfaces algébriques à système canonique pur dégénéré. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 1030—1043 (1952).

L'A. dimostra l'esistenza di piani doppi a sistema canonico riducibile per tutti i valori di $p_g > 3$; il genere lineare può assumere uno dei seguenti valori: $4p_g - 5$, $4p_g - 4$, $4p_g - 3$; il bigenere, i valori $5p_g - 5$, $5p_g - 4$, $5p_g - 3$. Le curve del sistema canonico sono (a parte una componente fissa) composte con curve di genere 2 di un fascio lineare; l'involuzione del secondo ordine, che porta la superficie sul piano doppio, subordina su quelle curve una involuzione ellittica (e il sistema bi-canonico non risulta composto con essa, a differenza di precedenti esempi addotti da Enriques e Pompilj) o la g_2^1 canonica. La dimostrazione consiste nel determinare i caratteri della curva di diramazione e quindi la sua esistenza. *A. Andreotti.*

Godeaux, Lucien: Mémoire sur les surfaces multiples. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° **27**, Nr. 3, 80 p. (1952).

Ce mémoire constitue une mise au point complète de la méthode initiée par l'A. pour étudier la structure d'un point uni isolé d'une involution cyclique sur une surface algébrique et la structure du point de diramation correspondant sur la surface image de l'involution. Les résultats les plus saillants, ainsi que l'exposé de la méthode ont déjà été exposés séparément dans de nombreuses notes, en particulier, ce Zbl. **33**, 210; **36**, 376; **37**, 387; **38**, 315, 316 et 317; **39**, 375; **40**, 233, 234 et 373; **41**, 86; **43**, 149; **44**, 168; **46**, 390. *B. d'Orgeval.*

Scott, D. B.: Correspondences of dimensions two and three between algebraic surfaces. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 1—21 (1952).

Von Albanese und Severi ist der Begriff „algebraische Korrespondenz der Wertigkeit Null“ zwischen zwei Flächen definiert worden. Es handelt sich um Abbildungen, in denen Punkte zu Punkten gehören. Im Albanesischen Sinne hat eine Korrespondenz die Wertigkeit Null, wenn Kurven eines stetigen Systems in Kurven eines linearen Systems übergeführt werden. Im Severischen Sinne ist die Wertigkeit Null, wenn das Bild eines veränderlichen Punktes einer festen Äquivalenzschar angehört. — Eine Korrespondenz T einer Fläche auf sich selbst hat die Wertigkeit v , wenn $T + vI$, wo I die Identität bedeutet, eine Korrespondenz der Wertigkeit Null darstellt. Severi hat auch Korrespondenzen betrachtet, die einem Punkt eine Kurve zuordnen, und definiert, wenn solche Korrespondenzen die Wertigkeit Null haben. Es ist nicht so leicht ersichtlich, wann eine derartige Korrespondenz die Wertigkeit $v \neq 0$ haben soll, da das Hilfsmittel der identischen Korrespondenz jetzt fehlt. Verf. hat eine befriedigende Definition vorgeschlagen, die auch in dieser Arbeit diskutiert wird. — Man kann nun Punkt-Punkt-Korrespondenzen betrachten, die sich als Durchschnitte von zwei Punkt-Kurve-Korrespondenzen darstellen lassen. Diese Korrespondenzen werden vom Verf. eingehend topologisch untersucht und die Ergebnisse auf einige speziellen Fragen angewandt. — Besonders hervorgehoben sei die in dieser wichtigen Arbeit vom Verf. geübte Kritik an einer von Albanese herrührenden Behauptung, daß eine (Punkt-Punkt-) Wertigkeitskorrespondenz und ihre Inverse dieselbe Wertigkeit haben. Verf. entwickelt Gründe, die die Richtigkeit der Behauptung zweifelhaft machen, und macht plausibel, daß es eine offene Frage ist, ob die Inverse einer Wertigkeitskorrespondenz überhaupt immer eine Wertigkeit hat. *J. C. H. Gerretsen.*

Hutcherson, W. R.: Voisinage du cinquième ordre d'une involution de période 13. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 483—487 (1952).

L'A. considère une surface du quatrième ordre invariante pour une homographie cyclique de période 13 et étudie la structure d'un point uni, simple pour la surface (configuration des points unis pour l'homographie infiniment voisins de point uni considéré). *L. Godeaux.*

Baldassarri, M.: Le $I^3_{n,2}$ ed una classe di varietà rappresentative. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 143—151 (1952).

L'A. determina le condizioni sotto le quali una $I^3_{n,2}$ (involuzione piana triplamente infinita di gruppi di n punti) è rappresentabile su una involuzione J^3_n di una varietà M_3 a tre dimensioni contenente una congruenza di indice uno di curve razionali; di qui Egli deduce la esistenza di $I^3_{n,2}$ normali nel piano. Inoltre Egli dimostra che una $I^3_{2,2}$ ammette sempre un modello $I^3_{2,3}$ birazionalmente equivalente ed infine dimostra il seguente Teorema: Una varietà V_3 risulta unirazionale secondo una $I^3_{2,3}$ se contiene una congruenza K di indice uno di curve razionali e se ammette una trasformazione involutoria J^3_2 in sé stessa tale che su una curva di K non cadano genericamente coppie della J^3_2 . F. Manara.

Gaeta, Federico: Sui sistemi lineari appartenenti al prodotto di più varietà algebriche. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 91—118 (1952).

In questa memoria l'A. tratta della varietà prodotto W_t di k varietà algebriche V_{d_i} irriducibili non singolari, $W_t = V_{d_1} \times \dots \times V_{d_k}$ estendendo alcuni risultati precedentemente stabiliti da Maroni e facendone applicazione al prodotto di varietà di tipo particolare ed allo studio di alcuni modelli minimi. L'A. parte dalla considerazione di k sistemi lineari di ipersuperficie $|L^i|$ sulle V_{d_i} e del sistema lineare $|L|$ somma minima dei sistemi prodotto delle varietà L^i per varietà $V_{d_1} \times \dots \times V_{d_k}$. Per il sistema $|L|$ di cui si determina la dimensione dimostra: a) condizione necessaria e sufficiente perchè $|L|$ sia completo è che lo siano i sistemi fattori (rispetto a un gruppo di punti basi dedotto da quelli dei fattori), b) condizione necessaria e sufficiente perchè quel sistema sia privo di punti basi è che lo siano i fattori, c) il multiplo k -uplo minimo di $|L|$ coincide col sistema analogo ad $|L|$ definito sui multipli k -upli minimi dei fattori, d) riferendosi a modelli proiettivi per le V_{d_i} , la postulazione $\chi(l)$ di W_t è uguale a $1/l \cdot \chi_i(l)$, essendo $\chi_i(l)$ le postulazioni delle V_{d_i} . Come applicazione di d) si deduce che 1) il genere aritmetico p_t di W_t è dato da $p_t = \prod_i [p_{i,d_i} + (-1)^{d_i}] + (-1)^{t-1}$ (essendo p_{i,d_i} i generi aritmetici delle V_{d_i}) e analoghe formule per i generi aritmetici delle sezioni spaziali di W_t ; 2) il sistema canonico di W_t coincide col sistema $|L|$ relativo ai sistemi canonici dei fattori. — In particolare a) per il prodotto di più spazi lineari si ritrovano note formule numerative, b) per il prodotto di una curva per uno spazio lineare si ritrova il teorema di Riemann-Roch stabilito da Maroni, c) per il prodotto di più curve algebriche a moduli generali, si deduce l'ordine del modello minimo estendendo una formula data dal censore, nell'ipotesi che ogni corrispondenza di dimensione massima sia a valenza nulla. A. Andreotti.

Kodaira, Kunihiko: The theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on 3-dimensional algebraic varieties. Ann. of Math., II. Ser. 56, 298—342 (1952).

In der Besprechung dieser Arbeit soll bereits diejenige Terminologie teilweise verwendet werden, die sich auf Grund neuerer Ergebnisse als zweckmäßig erwiesen hat. [Vgl. Kodaira-Spencer, Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 641—649, 660—669, 865—877, 1268—1278 (1953); Hirzebruch, Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 951—956 (1953).] Es sei V_n eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit von n komplexen Dimensionen (nicht notwendigerweise zusammenhängend).

Das Π -Geschlecht wird folgendermaßen definiert: $\Pi(V_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i g_i$; hier bezeichnet g_i

die Anzahl der linear-unabhängigen i -fachen Differentiale erster Gattung auf V_n . Es ist g_0 gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von V_n und g_1 gleich der halben ersten Bettischen Zahl von V_n . Es seien c_i , ($c_i \in H^{2i}(V_n, \mathbb{Z})$), die Chernschen Klassen von V_n . Es sei ferner $T_k(c_1, \dots, c_k)$ das k -te Toddsche Polynom. Dann definiert man das Toddsche Geschlecht $T(V_n)$ durch die Gleichung $T(V_n) = T_n(c_1, \dots, c_n) \cdot [V_n]$. Das virtuelle Toddsche Geschlecht einer

beliebigen Cohomologie-Klasse $d \in H^2(V_n, \mathbb{Z})$ wird durch die Gleichung $T(d) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!} d^i$

$T_{n-i}(c_1, \dots, c_{n-i}) \cdot [V_n]$ definiert. Wenn d dual zu einer singularitätenfrei in V_n eingebetteten Kählerschen Mannigfaltigkeit D_{n-1} ist, dann ergibt sich leicht aus der Whitney'schen Multiplikationsformel (adjunction formula) und aus der Tatsache, daß T_k die zur Potenzreihe $-x/(e^{-x}-1)$ gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist (Ref., loc. cit.), die Gleichung: $T(D_{n-1}) = T(d)$. Ein selbst für algebraische Mannigfaltigkeiten noch ausstehendes zentrales Problem ist, zu beweisen, daß $\Pi(V_n) = T(V_n)$. Nach diesen Vorbemerkungen lassen sich die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bequem formulieren. Es sei V eine zusammenhängende kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit von 3 komplexen Dimensionen. Eine Fläche S auf V ist eine abgeschlossene Teilmenge von V , die lokal durch $f=0$ gegeben werden kann, wo f eine lokale holomorphe Funktion ist. Es werde vorausgesetzt, daß S nur gewöhnliche

Singularitäten hat (double, triple or ordinary cuspidal points). In natürlicher Weise wird ein singularitätenfreies Modell \tilde{S} von S konstruiert. \tilde{S} ist nach Konstruktion eine komplexe Mannigfaltigkeit von 2 komplexen Dimensionen. Verf. beweist, daß \tilde{S} eine Kählersche Metrik besitzt. Die Doppelkurve von S besitzt ebenfalls ein singularitätenfreies Modell, das mit \tilde{A} bezeichnet werde. (\tilde{S} und \tilde{A} sind nicht notwendigerweise zusammenhängend.) Verf. definiert nun das virtuelle Π -Geschlecht $\Pi(S)$. Ziel ist natürlich, $\Pi(S)$ so zu definieren, daß man die Gleichung $\Pi(S) = T(s)$ erwarten kann, wo s die zu S duale Cohomologie-Klasse ist. Wenn S singularitätenfrei ist, d. h. also $S = \tilde{S}$, dann muß man demnach definieren: $\Pi(S) = \Pi(\tilde{S})$. Wenn S singular ist, dann müssen gewisse von den Singularitäten stammende Korrekturglieder hinzugefügt werden. Verf. definiert daher für den Fall, daß S nur gewöhnliche Singularitäten hat, daß virtuelle Π -Geschlecht folgendermaßen: $\Pi(S) = \Pi(\tilde{S}) - \Pi(\tilde{A}) + t + c/2$. Dabei ist t die Anzahl der triple-Punkte und c die Anzahl der cuspidal-Punkte. Nun sei $\mathfrak{B}(S)$ der komplexe Vektorraum aller dreifachen meromorphen Differentiale von V , die Vielfache von $-S$ sind, d. h. deren Polfläche in S enthalten ist. Der Hauptsatz des Verf. ist eine Formel für die Dimension von $\mathfrak{B}(S)$, die hier nur für singularitätenfreies S formuliert werde (S ist nicht notwendigerweise zusammenhängend). Fundamental theorem (F): Es sei δ_i die deficiency von S bezüglich der i -fachen Differentiale erster Gattung, d. h. $\delta_i = \text{Dimension der } i\text{-fachen Differentiale von } S \text{ minus Dimension derjenigen } i\text{-fachen Differentiale von } S, \text{ die von } i\text{-fachen Differentialen von } V \text{ induziert werden können. Ferner sei } k_i \text{ die Dimension der } i\text{-fachen Differentiale von } V, \text{ die auf } S \text{ verschwinden. Dann gilt: } \dim \mathfrak{B}(S) = \Pi(S) - \Pi(V) - k_1 + k_2 - \delta_0 + \delta_1$. Offenbar ist δ_0 gleich $m - 1$, wo m die Anzahl der Komponenten von S ist. [In der hier im Referat angegebenen Form (S singularitätenfrei) läßt sich (F) übrigens für beliebige Dimensionen formulieren und beweisen. (F) ergibt sich einfach aus einer gewissen exakten Folge von Cohomologie-Gruppen (Faisceau-Theorie). Vgl. Kodaira-Spencer, loc. cit.] Von nun an wird vorausgesetzt, daß V eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension 3 ist. Für einen Divisor D von V wird mit $\mathfrak{F}(D)$ der komplexe Vektorraum aller meromorphen Funktionen von V bezeichnet, die Vielfache von $-D$ sind. Mit $|D|$ wird das lineare System aller effektiven Divisoren bezeichnet, die „linear äquivalent“ mit D sind. Man hat: $\dim |D| = \dim \mathfrak{F}(D) - 1$. Der Divisor eines beliebigen dreifachen Differentials heißt kanonischer Divisor und wird mit K bezeichnet. Alle K sind linear äquivalent. K ist dual zu der Chernschen Klasse $-c_1$. Nun sei S wieder eine Fläche von V mit gewöhnlichen Singularitäten. Wegen der natürlichen Isomorphie von $\mathfrak{F}(K + S)$ und $\mathfrak{B}(S)$ ergibt sich aus dem Theorem (F) eine Formel für $\dim |K + S|$. Unter Verwendung des Satzes von Lefschetz über Hyperebenen-Schnitte ergibt sich jetzt weiter: S' sei eine Fläche von V mit gewöhnlichen Singularitäten, E sei ein allgemeiner Hyperebenen-Schnitt, und es werde $S = S' + E$ gesetzt ($S = E$ ist zugelassen). Es gilt: $\dim |K + S| + 1 = \Pi(S) - \Pi(V)$. Verf. beweist nun, daß für eine algebraische V und eine Fläche S von V mit gewöhnlichen Singularitäten das Π -Geschlecht und das virtuelle Toddsche Geschlecht übereinstimmen. Dieser Satz ist hauptsächlich interessant für den Fall, daß S wirklich Singularitäten hat. [Nach Thom gilt für eine beliebige kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit V_2 : $\Pi(V_2) = T(V_2)$]. In der oben erwähnten Formel für $\dim |K + S|$ kann jetzt $\Pi(S)$ durch $T(s)$ ersetzt werden ($s = \text{duale Cohomologie-Klasse von } S$). Verf. setzt $1 - p_a(V) = 2T(V) - \Pi(V)$ und erhält jetzt den Satz von Riemann-Roch for the adjoint system $|D| = |K + S|$ of an arbitrary surface S on V with ordinary singularities only. Die Formel wird hier im Referat wieder nur für singularitätenfreies S angeben. „ \circ “ bedeutet Schnitzzahl. $\pi(D^2)$ ist das übliche virtuelle Kurvengeschlecht des Durchschnitts „von D mit sich selbst“. Die Formel lautet: $\dim |D| = D \circ D - \pi(D^2) + T(d) + 1 - p_a(V) - k_1 + k_2 - \delta_0 + \delta_1$. Verf. zeigt, daß für irreduzibles S die Glieder δ_0 und k_1 der obigen Gleichung verschwinden, wenn $\dim |S| \geq 1$. Auf diese Weise ergibt sich eine Ungleichung von Severi für $\dim |D|$. Ferner ergibt sich, daß im Falle $D = K + E + S$ (S eine Fläche mit gewöhnlichen Singularitäten) alle Korrekturglieder verschwinden, so daß $\dim |D| = D \circ D - \pi(D^2) + T(d) + 1 - p_a(V)$. Als Anwendung ergeben sich die postulation formulas: E sei ein allgemeiner Hyperebenen-Schnitt von V . $\dim |K + nE| + 1$ ist für $n \geq 1$ und $\dim |nE| + 1$ ist für große n ein Polynom in n . Das absolute Glied des ersten Polynoms ist gleich $-\Pi(V)$, daß des zweiten ist gleich $1 - p_a(V)$. — Die Arbeit enthält ferner einen ausführlichen Abschnitt über die deficiency eines Divisors D von V in bezug auf die Fläche S . Hier muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. In einem Abschnitt Arithmetic genera of 3-dimensional algebraic varieties wird schließlich bewiesen, daß $1 - p_a(V) = \Pi(V) = T(V)$. Dies ergibt den Satz von Severi, daß die absoluten Glieder in den beiden postulation formulas bis aufs Vorzeichen übereinstimmen, ferner die Vermutung von Severi, daß $1 - p_a(V) = \Pi(V)$ und die Toddsche Formel $1 - p_a(V) = T(V)$. Inzwischen haben Kodaira-Spencer (loc. cit.) für beliebige Dimensionen bewiesen, daß die absoluten Glieder in den beiden postulation formulas bis aufs Vorzeichen übereinstimmen, und zwar mit $\Pi(V_n)$ identisch sind. Daher sind sozusagen drei der vier möglichen Definitionen für das arithmetische Geschlecht als identisch erwiesen, ein strenger Beweis für $T(V_n) = \Pi(V_n)$ steht im Falle $n > 3$ noch aus. Verf. beweist ferner, daß auf einer algebraischen V_3 genau $2g_1$

linear-unabhängige einfache Picardsche Integrale zweiter Gattung existieren. Im letzten Abschnitt der Arbeit wird eine Formel für $\dim |S|$ für singularitätenfreies S angegeben, die Verf. aber nicht als „Satz von Riemann-Roch“ anerkennt, da in der Formel ein Glied auftritt, dessen Verhalten nicht gut bekannt ist. Die Beweise in der vorliegenden Arbeit stützen sich auf die Theorie der „harmonic integrals“. F. Hirzebruch.

Chow, Wei-Liang: On the fundamental group of an algebraic variety. Amer. J. Math. **74**, 726—736 (1952).

In dieser Arbeit beschäftigt sich Verf. mit einer Anwendung der neueren topologischen Begriffsbildungen auf gewisse Fragen der algebraischen Geometrie. — Es ist bekannt, daß irgend ein 1-Zykel in einer algebraischen Fläche in einen 1-Zykel deformiert werden kann, der in einem allgemeinen ebenen Schnitt der Fläche liegt. Dieser Satz läßt sich leicht topologisch beweisen. In der transzendenten Theorie gibt es eine Verallgemeinerung, die sich folgendermaßen fassen läßt: Es gibt wenigstens $2p$ unabhängige 1-Zykeln in einer algebraischen Fläche, die nicht homolog zu 1-Zykeln sind, welche einer allgemeinen Kurve einer irrationalen Schar des Geschlechtes p angehören. Verf. zeigt nun, daß dieser Satz ein Spezialfall einer noch allgemeineren Behauptung über die sogenannte Fundamentalgruppe einer algebraischen Mannigfaltigkeit ist. Die Fundamentalgruppe wird betrachtet als die Gruppe der Abbildungsklassen einer Strecke in einen topologischen Raum mit irgendeinem festen Bezugspunkt. Seine Betrachtungen sind rein topologisch. Der Grundgedanke besteht darin, daß, obzwar eine rationale Transformation im allgemeinen nicht fasertreu ist, das Überdeckungshomotopietheorem jedoch richtig ist in einer etwas modifizierten Form für die Abbildung eines 1-Simplexes. Dazu führt der Verf. das sogenannte Fasersystem ein und zeigt, daß gewisse Teilsysteme eines algebraischen Systems als Fasersysteme gedeutet werden können. Der Begriff des Fasersystems ist allgemeiner als der des Faserraumes, aber mehr auf die Anwendungen in der Geometrie zugeschnitten. Wie Verf. selbst bemerkt, hat B. Eckmann schon früher (dies. Zbl. **26**, 93) dieselbe Begriffsbildung unter dem Namen „retrahierbare Überdeckung“ eingeführt. — Es seien U und V topologische Räume, und es sei $G(y)$ eine Funktion, welche jedem Punkt y in V eine Teilmenge $G(y)$ von U zuordnet. Das System der Teilmengen $G(y)$ ist ein Fasersystem in U , wenn es eine offene Überdeckung $N = \{N\}$ von V gibt derart, daß für jede Menge N eine stetige Funktion $\Phi_N(x, y)$ existiert, die für alle Punkte $x \in G(N)$, $y \in N$ im Produktraum $U \times V$ definiert ist mit Werten in U und die Eigenschaften hat: $\Phi_N(x, y) \in G(y)$, $[x \in G(N), y \in N]$, $\Phi_N(x, y) = x$, $[x \in G(y), y \in N]$. Es mögen nun $f(z)$ und $g(z)$ stetige Abbildungen bezeichnen eines topologischen Raumes Z in bzw. U und V , derart, daß für jeden Punkt $z \in Z$ die Beziehung $f(z) \in G(g(z))$ gilt, und es bedeute $g(z, t)$, $0 \leq t \leq 1$, eine Homotopie der Abbildung $g(z)$ in V . Dann heißt eine Homotopie $f(z, t)$, $0 \leq t \leq 1$, von $f(z)$ in U eine überdeckende Homotopie von $g(z, t)$, wenn wir haben $f(z, t) \in G(g(z, t))$ für alle z, t . Der Überdeckungshomotopiesatz (in der schwachen Fassung) behauptet: Wenn V ein normaler Hausdorffscher Raum ist und wenn Z kompakt ist, dann gibt es immer eine überdeckende Homotopie. — Zunächst untersucht der Verf. die von ihm eingeführten Begriffe und erwähnt die darunter fallenden algebraisch geometrischen Gebilde. Der entwickelte Apparat setzt den Verf. instand, folgenden Satz zu beweisen: Es sei U eine nicht-singuläre algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension r , und es möge eine Teilmannigfaltigkeit G der Dimension d einem irreduziblen algebraischen System $G(y)$, $y \in$ algebraische Mannigfaltigkeit V , angehören, mit U als Trägermannigfaltigkeit, das wenigstens einen Basispunkt hat und dessen allgemeines Exemplar irreduzibel ist. Wenn $f(z)$ eine stetige Abbildung der Einheitsstrecke I in U ist mit $f(0) = f(1) = x^{(0)}$ in G , dann ist eine endliche Potenz dieser Abbildung homotop rel. $z = 0, 1$ zu einer stetigen Abbildung von I in G . Dabei wird unter der m -ten Potenz von $f(z)$ die Abbildung $\bar{f}(z)$ von I verstanden, erklärt durch $\bar{f}(z) = f(mz - i)$, für $i/m \leq z \leq (i+1)/m$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. — Wenn außerdem $G(y)$ involutorial ist, d. h. wenn das System $G(y)$ durch eine rationale Transformation von U in V induziert wird, dann ist $f(z)$ selbst homotop rel. $z = 0, 1$ zu einer stetigen Abbildung von I in G . — Eine weitere Anwendung bezieht sich auf die Fundamentalgruppe $F(U)$ des Raumes U . Wenn W und X zwei Teilmengen in U sind, dann wird die identische Abbildung von $W \cap X$ in W ein Homomorphismus von $F(W \cap X)$ in $F(W)$ induzieren, sobald der Bezugspunkt ein und derselbe in $W \cap X$ ist. Mit $F(W, X)$ wird die Untergruppe von $F(W)$ bezeichnet, die das Bild von $F(W \cap X)$ in diesem Homomorphismus ist. Es sei Φ eine rationale Transformation einer nicht-singulären Mannigfaltigkeit V der Dimension s mit den Eigenschaften: (1) Für einen allgemeinen Punkt η in V ist die Mannigfaltigkeit $\Phi^{-1}(\eta)$ irreduzibel, und (2) die Menge H von allen Punkten, die nicht halb-regulär bezüglich Φ sind, ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $\leq s-2$ in V . [Ein Punkt heißt halb-regulär bezüglich der Korrespondenz Φ , wenn es einen eindeutig bestimmten Spezialisierungszykel von $\Phi^{-1}(\eta)$ über die Spezialisierung $\eta \rightarrow y$ gibt und dieser Spezialisierungszykel keine mehrfachen Bestandteile hat.] Die Behauptung lautet: Es gibt einen Homomorphismus von $F(U)$ auf $F(V)$, und der Kern dieses Homomorphismus ist die Untergruppe $F(U, \Phi^{-1}(y^{(0)}))$, wo $y^{(0)}$ irgendeinen genügend allgemeinen Punkt in V bedeutet. J. C. H. Gerretsen.

Weil, André: On Picard varieties. Amer. J. Math. **74**, 865—894 (1952).

Let V be a Kähler manifold (compact complex-analytic manifold carrying at least one

Kähler metric), A_0 one-dimensional real homology group of V and Δ its subgroup of integral homology classes. Moreover let A'_0 be the one-dimensional real cohomology group of V and Δ' its subgroup of integral cohomology classes. We then get two real tori $\mathfrak{H} = A_0/\Delta$ and $\mathfrak{H}' = A'_0/\Delta'$. A fundamental existence theorem of Hodge implies that A'_0 is the underlying space of the complex vector-space of Picard differentials of the first kind on V ; the conjugate complex structure of this space converts \mathfrak{H}' into a complex torus. Let J' be the automorphism of A'_0 corresponding to the scalar multiplication by i in this complex structure, then its transposed inverse J can be used to determine a complex structure in A_0 converting \mathfrak{H} also into a complex torus. It is clear that the relation of complex tori \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' are dual. Now if one of the fundamental forms invariantly attached to Kähler metrics on V is an integral cocycle, V is called a Hodge manifold. In this case \mathfrak{H}' , hence also its dual \mathfrak{H} , satisfies the conditions of Riemann-Weierstrass theorem; hence they are Abelian varieties according to a theorem of Lefschetz. The Abelian variety \mathfrak{H}' is the Picard variety of V and its dual \mathfrak{H} is called the dual Picard variety of V . There exists a complex-analytic mapping F of V into \mathfrak{H} , which is unique up to a translation in \mathfrak{H} . On the other hand let G_a be the group of analytic divisors on V which are homologous to 0 with integral coefficients. Each element Z of G_a defines uniquely a character of Δ by a previous theorem of the author (this Zbl 34, 358), hence an element $c(Z)$ of \mathfrak{H}' . The mapping $Z \rightarrow c(Z)$ of G_a into \mathfrak{H}' is a homomorphism onto whose kernel G is nothing but the group of analytic divisors attached to one-valued meromorphic functions on V . This theorem, named by the author as Igusa's first duality theorem, is proved first for \mathfrak{H} using theta-functions and the general case is reduced to this case by the canonical mapping F of V into \mathfrak{H} . Igusa's second duality theorem including torsion cycles is only valid when every homology class of dimension $2n - 2$ of finite order on V^n contains an analytic divisor. The above is an introductory part of the paper and the main part is devoted to the proof of „analyticity“ of the canonical mapping c . To do this the author constructs a sort of „Poincaré family“ on V in a very strong form. He proves in fact the existence of an analytic divisor W of the product $V \times \mathfrak{H}'$ such that the intersection-product $W \cdot (V \times u') = W(u') \times u'$ is defined for every $u' \in \mathfrak{H}'$ and that $c[W(0) - W(u')] = u'$. The proof is accomplished using theta-functions after delicate considerations. Now if X is a divisor of the product $V \times S$ of V and a complex-analytic manifold S , then the point s of S such that the intersection-product $X \cdot (V \times s)$ is defined forms a connected open subset S' of S . Therefore S' itself may be considered as a complex-analytic manifold. The „main theorem“ states that if $X(s)$ is homologous to 0 for one, then for all, s of S' , the mapping $s \rightarrow c[X(s)]$ is a complex-analytic mapping of S' into \mathfrak{H}' . This is so-to-speak a local, hence far more general form of the analyticity of the canonical mapping c than that of Igusa [J. math. Soc. Japan 3, 345–348 (1951)]. The author uses in several steps Cartan's quantitative precision of Rückert's theorem (Cartan, this Zbl. 35, 171) as a basic tool of the proof. The author proves also the existence of a „complete linear system“ on any compact complex-analytic manifold as a lemma. Moreover he proves also that the positive divisors in a given homology class on V make up a finite number of algebraic families. The final part of the paper shows a feature of an Appendix. The author defines a sequence of complex tori $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_{n-1}$ invariantly attached to any Kähler variety V_n in the similar way as \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' . Thereby \mathfrak{H}_p and \mathfrak{H}_{n-p-1} are dual for $p = 0, 1, \dots, n-1$ and that $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_{n-1} = \mathfrak{H}'$; they are all Abelian varieties when V is a Hodge manifold. Moreover let $G_h^{(p)}$ be the group of analytic cycles of complex dimension p on V which are homologous to 0 with integral coefficients, then the author defines a canonical mapping c_p of $G_h^{(p)}$ into \mathfrak{H}_p under a very plausible assumption. Thereby c_0 coincides with the additive extension of F and c_{n-1} is seen to be the same as c by Kodaira's formula (Harmonic integrals, Mimeographed notes, Princeton 1950). However c_p does not in general give a homomorphism of $G_h^{(p)}$ onto \mathfrak{H}_p for $0 < p < n-1$. It seems to the reviewer that the investigation of this phenomenon is just one task in algebraic geometry which must be done before one attacks to the „equivalence theories“ of intermediary dimensions.

J. Igusa.

Chow, Wei-Liang: On Picard varieties. Amer. J. Math. 74, 895–909 (1952).

Let V be a non-singular projective model in the algebraic geometry with the universal domain of all complex numbers. Let P be the Picard variety of V , which is defined as the „dual Abelian variety“ of the Albanese variety of V . Let $\mathfrak{G}_h(V)$ be the group of V -divisors which are homologous to 0 with integral coefficients. Every element D of $\mathfrak{G}_h(V)$ defines uniquely a character of the first integral Betti group of V , hence a point $G(D)$ of P , according to Weil's generalization of Lefschetz' theorem. The author proves that the mapping G of $\mathfrak{G}_h(V)$ into P is „holomorphic“, which is the main theorem of this paper. Unfortunately this basic concept is not explained and is used with the following contents. A function f on an algebraic variety W is holomorphic when f can be considered locally as the trace on W of some holomorphic function of the ambient space. [If W is a germ of an algebraic variety W^* and f a function on W^* , then f is holomorphic on W if and only if f is „defined“ everywhere on W .] Now let $w \rightarrow X(w)$ be a parametrization of a subfamily of $\mathfrak{G}_h(V)$ with the parameter variety

W , then we can write it in the form $X(w) = X_1(w) - X_2(w)$ with $X_1, X_2 > 0$. Let c be Chow's canonical mapping of positive cycles of the given dimension and degree to the points in some projective space, then the parametrization $w \rightarrow X(w)$ is called „regular“ when the two mappings $w \rightarrow c(X_1(w))$, $w \rightarrow c(X_2(w))$ are both holomorphic on W . The mapping G is holomorphic in the sense that the mapping $w \rightarrow G(X(w))$ is holomorphic on W whenever $w \rightarrow X(w)$ is a regular parametrization of a subfamily of $\mathcal{G}_h(V)$ with the parameter variety W . This theorem is a generalization of Weil's „main theorem“ (cf. the previous review), where the parameter variety W is assumed to be non-singular. Chow's main theorem is much more useful than Weil's one, although this concerns with the possibly more general case of Hodge manifold. [In a footnote is remarked that Weil's result can be generalized by some results of the author to the case of arbitrary parameter variety, which was hoped and conjectured by Weil himself.] The proof is reduced to the case when V is a curve. In this case it depends on a theorem of van der Waerden that the Chow variety of m points on a non-singular curve is non-singular. The final section of the paper is devoted to the construction by purely algebraic means [which however can not be applied immediately to the case of characteristic $p \neq 0$ since there are „purely inseparable homomorphisms“ between Abelian varieties] of a family $\{X(y)\}$ of V -divisors, which are algebraically equivalent to 0, with the parameter variety P such that $G(X(y)) = y$. Thereby $X(y)$ are defined by specializations of a generic member, hence the correspondence $y \rightarrow X(y)$ is not one-to-one for special points of P . This has as a consequence „Igusa's first duality theorem“. Although there are some places where explanations are missing, the „construction of the theory“ is interesting.

J. Igusa.

Nash, John: Real algebraic manifolds. Ann. of Math., II. Ser. 56, 405–421 (1952).

Eine reelle algebraische Mannigfaltigkeit im Sinne des Verf. (hier im Referat abgekürzt: reelle Mannigf.) ist ein Paar $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ mit folgenden Eigenschaften: 1. \mathcal{M} ist eine kompakte reell-analytische Mannigfaltigkeit, und \mathcal{R} ist ein Ring, dessen Elemente reell-analytische (eindeutige) Funktionen von \mathcal{M} sind. 2. Es gibt eine ein-eindeutige analytische Abbildung $\{x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)\}$ von \mathcal{M} ($p \in \mathcal{M}$) in einen euklidischen Raum E^n , die \mathcal{M} singularitätenfrei in E^n einbettet und für die $x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)$ zu \mathcal{R} gehören. 3. Der Transzendenzgrad von \mathcal{R} ist gleich der topologischen Dimension von \mathcal{M} . 4. Der Ring \mathcal{R} ist maximal in der Klasse aller Ringe, die den Forderungen 1, 2, 3 genügen. — Eine Einbettung im Sinne von 2. wird eine Repräsentation von $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ genannt. — Verf. stellt seinen Begriff der reellen Mannigf. dem üblichen Begriff der reellen algebraischen Mannigfaltigkeit gegenüber, die hier im Referat „variety“ genannt werde. (Eine variety ist die Menge der gemeinsamen Nullstellen eines Ideals von homogenen Polynomen mit reellen Koeffizienten im reellen projektiven Raum). Ein Blatt (= sheet) einer variety ist eine Teilmenge der variety mit folgenden Eigenschaften: 1. Zwei Punkte des Blattes können durch einen analytischen Weg innerhalb des Blattes verbunden werden. 2. Ein Blatt ist maximal in der Klasse aller Teilmengen, die die Eigenschaft 1. haben. 3. Ein Blatt hat wenigstens einen inneren Punkt. — Die kompakten singularitätenfreien Blätter im euklidischen Raum sind Repräsentationen einer reellen Mannigf. Jede Repräsentation einer reellen Mannigf. ist ein kompaktes singularitätenfreies Blatt einer variety (vgl. Satz 5). — Ein Blatt heißt isoliert, wenn es eine offene (zusammenhängende) Teilmenge der variety ist. Eine Repräsentation von $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ heißt eigentlich, wenn das entsprechende Blatt isoliert ist. — Verf. beweist, daß eine differenzierbare im euklidischen Raum eingebettete Mannigfaltigkeit durch reelle Mannigf. (und damit auch durch Blätter) approximiert werden kann. Er beweist ferner, daß es zu einer analytischen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} (bis auf Isomorphie) höchstens einen Ring \mathcal{R} geben kann derart, daß $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ eine reelle Mannigf. ist. Die Approximations- und Einbettungssätze von Whitney werden wesentlich benutzt (dies. Zbl. 15, 320). Es sollen nun die Sätze des Verf. im einzelnen angegeben werden. Satz 1. Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M} in E^n kann durch eine Repräsentation einer reellen Mannigf. $(\mathcal{M}^*, \mathcal{R})$ approximiert werden, wobei \mathcal{M}^* zu \mathcal{M} differenzierbar homöomorph ist. Satz 2. Zu jeder kompakten (abstrakten) differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gibt es eine eigentliche Repräsentation einer reellen Mannigf. $(\mathcal{M}^*, \mathcal{R})$ im E^{2n-1} , wobei \mathcal{M}^* zu \mathcal{M} differenzierbar homöomorph ist. Satz 3. Die Punkte einer reellen Mannigf. entsprechen ein-eindeutig den maximalen Idealen von \mathcal{R} . Der Punkt p entspricht dabei dem Ideal aller in p verschwindenden Funktionen von \mathcal{R} . Satz 4. Es seien $(\mathcal{M}_1, \mathcal{R}_1)$ und $(\mathcal{M}_2, \mathcal{R}_2)$ reelle Mannigf. Ein Isomorphismus von \mathcal{R}_1 auf \mathcal{R}_2 bestimmt in natürlicher Weise einen analytischen Homöomorphismus von \mathcal{M}_1 auf \mathcal{M}_2 . Satz 5. Jede Repräsentation einer reellen Mannigf. $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ im E^n ist ein Blatt einer irreduziblen variety, die dieselbe Dimension wie \mathcal{M} hat. Satz 6. Es sei \mathcal{M} eine kompakte analytische Mannigfaltigkeit und \mathcal{B} eine analytische Einbettung von \mathcal{M} in E^n . Es werde vorausgesetzt, daß \mathcal{B} ein Blatt einer variety V ist. \mathcal{R} sei der Ring derjenigen reell-analytischen Funktionen von \mathcal{M} , die (bezüglich der Einbettung \mathcal{B}) algebraische Funktionen der Koordinaten von E^n sind. $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ ist dann eine reelle Mannigf. und \mathcal{B} eine Repräsentation von $(\mathcal{M}, \mathcal{R})$. Satz 7. Wenn zwei reelle Mannigf. differenzierbar homöomorph sind, dann sind sie isomorph als reelle Mannigf.

F. Hirzebruch.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Chattelun, Lucien:** Calcul vectoriel. Vol. I. Algèbre. Algèbre linéaire. Applications. Paris: Gauthier-Villars 1952. VII, 605 p. 5000 fr.

Dieses Buch enthält eine ausführliche Darstellung der dreidimensionalen Vektoralgebra und eine Auswahl von Anwendungen. Vektoren sind gerichtete Strecken. Nachdem die Addition und die Multiplikation mit Skalaren definiert sind, folgen viele geometrische Anwendungen aus der affinen Geometrie (z. B. der Satz von Menelaos, de Ceva, Desargues und verschiedene Sätze über das vollständige Viereck). Die Einführung des skalaren Vektorproduktes (notiert als $a \times b$) in Kap. 5 ermöglicht die Ableitung von verschiedenen Sätzen der metrischen Geometrie. Kap. 6 handelt über das Vektorprodukt (notiert als $a \wedge b$), das Volumprodukt $(a \wedge b) \times c$ und die zugehörigen Rechenregeln. Anwendungen dieses Rechenapparates auf die Theorie der Determinanten dritter Ordnung, die sphärische Trigonometrie, die Geometrie des Dreiecks und des Tetraeders, die Theorie der Rotationen im Raum usw. findet man im Kap. 7. Kap. 8 handelt über die orthogonale Gruppe und die ko- und kontravarianten Komponenten eines Vektors in bezug auf nicht orthogonale Bezugssysteme. Eine Gerade g zusammen mit einem Vektor parallel mit g bildet einen linienflüchtigen Vektor. Kap. 9 ist diesen Größen gewidmet (Kraftsysteme, Moment eines Vektors, Kräftepaar). Ausführlich betrachtet Verf. den Nullkomplex eines Kraftsystems. Das Buch schließt mit vier Noten. Die ersten Noten enthalten die Verallgemeinerung für n -dimensionale Räume. Die Theorie der Determinanten n -ter Ordnung wird entwickelt mit Hilfe des Vektorproduktes von $n - 1$ Vektoren. Die dritte Note enthält die Theorie der Quaternionen mit einigen Anwendungen. Die letzte Note gibt schließlich eine ausführliche Darstellung der Theorie der linearen Operatoren in einem Vektorraum.
J. Haantjes.

Aczél, J.: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 309—316 (1952).

Das skalare und vektorielle Produkt zweier Vektoren und anschließend hieran das Produkt zweier Quaternionen werden durch einige Postulate charakterisiert. Diese letzteren fordern neben Drehungsinvarianz insbesondere die Gültigkeit des distributiven Gesetzes der Multiplikation gegenüber der Addition. R. W. Weitzenböck.

Murnaghan, F. D.: On the decomposition of tensors by contraction. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 973—979 (1952).

Für die Zerlegung von Tensoren durch Spurbildung wird eine Anzahl Theoreme aufgeführt, die gegenüber der Methode von Racah (dies. Zbl. 38, 323) ein einfacheres Arbeiten ermöglichen und $n = 5$ einschließen. Eine größere Anzahl Analysen ist explizit angegeben.
F. L. Bauer.

Fumi, F. G.: Matter tensors in symmetrical systems. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 739—756 (1952).

Verf. bestimmt die Anzahl und gibt eine Basisdarstellung der linear unabhängigen Komponenten von dreidimensionalen, symmetrischen Tensoren II., III. und IV. Stufe unter dem Einfluß von hexagonalen und trigonalen Raumgruppensymmetrien.
F. L. Bauer.

Šilov, G. E.: Über doppeltperiodische vektorglatte Funktionen. Ukrain. mat. Žurn. 4, 25—35 (1952) [Russisch].

Es sei z_0 ein Punkt in der komplexen Ebene, L eine Kurve von der Länge $|L|$, die z_0 umschließt, n und τ Normale und Tangente von L und S die von L begrenzte Fläche. Eine stetige Funktion $w = w(z) = u + i v$ heißt vektorglatt (Šilov, dies. Zbl. 44, 57), falls die beiden Grenzwerte $\operatorname{div} w = \lim_{|L| \rightarrow 0} S^{-1} \int_L (w, n) dl$

und $\operatorname{rot} w = \lim_{|L| \rightarrow 0} S^{-1} \int_L (w, \tau) dl$ für jedes z_0 existieren und stetig sind. (Anm.

des Ref.: Die Stetigkeit folgt automatisch.) Es wird bewiesen, daß es ein, und bis auf eine additive Konstante nur ein, doppeltperiodisches w gibt mit gegebenen stetigen und doppeltperiodischen $\mu = \operatorname{div} w$ und $\nu = \operatorname{rot} w$, die den Mittelwert Null haben.
L. Gårding.

Gheorghiu, Octavian Em.: Sur la théorie des objets géométriques. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 273—283, russische und französ. Zusammenfassgn. 283, 283—284 (1952) [Rumänisch].

En premier lieu, on construit un objet géométrique de la première classe, à deux composantes $\Omega_1(\xi)$, $\Omega_2(\xi)$ à une variable, dont la loi de transformation est isomorphe au sous-groupe projectif $\bar{x} = (ax + by + c)/(bx + cy + a)$, $\bar{y} = (cx + ay + b)/(bx + cy + a)$. Si cet objet est nul dans un certain variable ξ^0 , nous avons dans un variable quelconque $\Omega_h(\xi) = [\xi'^m + 2 \cos(n \log \xi' + 2h\pi/3)] [\xi'^m + 2 \cos(n \log \xi')]^{-1}$, ($\xi' = d\xi/d\xi^0$), où m et n sont des constantes. — En second lieu on construit un objet géométrique de la troisième classe à deux composantes dans deux variables par rapport au groupe conforme. Ce résultat montre, en même temps que les objets construits par Vranceanu et Mihaileanu, que par rapport à des groupes particulières, il y a des objets de classe trois en deux variables, ce qui n'a pas lieu, comme l'a montré Vagner, par rapport au groupe général. — En troisième lieu on s'occupe d'objets géométriques à une seule composante sur une variété à p dimensions par rapport au groupe qui conserve les lignes de coordonnées et dont la loi de transformation est isomorphe au groupe projectif. On montre qu'il y en a trois catégories de tels objets, qu'on peut appeler du type: hyperbolique, elliptique et parabolique, leurs formules de transformation contenant seulement des constantes arbitraires.

G. Vranceanu.

● Assur, L. V.: Untersuchung der ebenen Stabmechanismen mit niedrigsten Paaren unter dem Gesichtspunkt ihrer Struktur und Klassifikation. Redaktierte Note und Bemerkungen von I. I. Artobolevskij. (Akademie der Wissenschaften der UdSSR., Klassiker der Wissenschaft.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1952. 592 S. R. 23,20 [Russisch].

Voici la publication posthume de la thèse de l'A. dont quelques fragments ont paru en 1916. L'intérêt du volume — d'ailleurs considérable — est d'ordre historique: le livre marque une étape du développement de la cinématique. — La théorie des chaînes cinématiques de Reuleaux, perfectionnée par ses élèves, était impuissante à fournir une classification structurale des mécanismes. L'A. a imaginé un mode de génération des mécanismes qui lui donne le moyen d'engendrer par un procédé régulier tous les dispositifs connus; toutefois, la démonstration (très compliquée) de l'universalité de la méthode ne semble pas entièrement satisfaisante, notamment en ce qui concerne l'unicité de la réalisation d'un mécanisme donné au moyen de la construction élémentaire fondamentale. — De là, résultent des critères de classification des mécanismes qui semblent utiles spécialement dans le cas des systèmes plans. L'A. indique les applications de sa méthode à la détermination graphique des champs des vitesses, ainsi qu'à celle des forces de liaisons mises en jeu lors du fonctionnement du mécanisme considéré. — L'exposé de l'A. est lourd, d'une lecture difficile. Mais, comme le note Joukowski dans son rapport de thèse, annexé au présent volume, l'introduction d'un élément de chaîne cinématique universel et la classification des mécanismes plans fondée sur ces éléments doivent être considérés comme un apport important à la théorie des chaînes cinématiques. — Aujourd'hui les travaux de l'A. sont dépassés; mais il est utile d'avoir à sa disposition le texte complet d'un travail qui a servi de point de départ à de très nombreuses publications russes et qui semble être resté inconnu des chercheurs étrangers. Artobolevsky, qui a préparé l'édition de l'ouvrage, a enrichi le volume d'une notice consacrée à la vie et l'œuvre de l'A., mort prématurément en 1920.

J. Kravtchenko.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Nádeník, Zbyněk: Les courbes de Bertrand dans l'espace à cinq dimensions. Czechoslov. math. J. 2 (77), 57—83 und französ. Zusammenfassg. 83—87 (1952) [Russisch].

Le travail est consacré à certaines courbes de l'espace à 5 dimensions qui sont une généralisation des courbes de Bertrand de l'espace à 3 dimensions; on les appelle aussi courbes de Bertrand. On y trouvera les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe donnée soit une courbe de Bertrand.

W. Wrona.

Semin, Ferruh: On Darboux lines. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 17, 351—383 (1952).

The paper deals with the curves on a surface whose osculating sphere is tangent to the surface at each point (D -lines). After an historical and bibliographical introduction about these curves, some new properties are obtained. For instance: a) A D -line is characterized by the

condition $\varrho_\sigma \tau_\sigma + (d\varrho_n/ds) = 0$ where ϱ_σ , τ_σ , ϱ_n are, respectively, the geodesic curvature, the geodesic torsion and the normal curvature of the D -line and s is the arc length; b) The D -line tangent to an asymptotic line has at the point of tangency a curvature equal to $2/3$ that of the asymptotic line at the same point; c) The locus of the centres of curvature at a fixed point P of the D -lines which pass through it, is in general an algebraic curve C of eight degree, the cases in which C is a plane curve being investigated; d) The integration of the D -lines of a surface of revolution reduces to quadratures.

L. A. Santaló.

Schneidt, Max: Über die endlichen Gleichungen einer Fläche, deren sphärisches Bild gegeben ist. Arch. der Math. 3, 70—75 (1952).

Verf. verallgemeinert zunächst die Zurückführung auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung für alle Flächen gegebenen Linienelementes, die er a. a. O. gegeben hat (dies. Zbl. 40, 85), so daß auch die Minimalkurven als Parameternetz zugelassen sind. Dabei werden die Koeffizienten der ersten Fundamentalforn durch 4 Funktionen und die Komponenten des Normalenvektors durch 2 weitere (ϱ , σ) der Flächenparameter ersetzt, zwischen denen eine Reihe von Differentialgleichungen besteht und mit deren Hilfe die Ableitungen des Ortsvektors dargestellt sind. Insbesondere sind die Komponenten des Ortsvektors unmittelbar gegeben, und zwar mit einer willkürlichen Funktion $\psi(u, v)$, wenn ϱ und σ bekannt sind, d. h. bei Vorgabe des sphärischen Bildes des gewählten u, v -Netzes. Durch spezielle Wahl von ϱ , σ sowie ψ gelangt Verf. zu speziellen Flächenklassen. Zunächst ergeben sich Biegeflächen der speziellen Mongeschen Gesimsflächen. — Bei einem zweiten Ansatz für ϱ und σ erhält man Flächen konstanter Krümmung, falls ψ einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung genügt. Einer speziellen Lösung ψ entspricht dabei die Kugel. — Entsprechen den (u, v) -Linien die Minimalgeraden der Kugel, so berechnet sich die Summe der Hauptkrümmungsradien zu $\psi_u + \psi_v + (u + v)\psi_{uv}$. Demnach ist für alle Flächen, für die sich die entsprechenden ψ nur um additive Konstanten unterscheiden, die mittlere Krümmung in entsprechenden Punkten gleich. — Zum Schluß zeigt Verf. am Beispiel der Flächen konstanter Gaußscher Krümmung, daß die Verwendung der reellen Schreibweise an Stelle der benützten komplexen analog zu einfachen Ergebnissen führt.

J. Nitsche.

Nitsche, Joachim: Bestimmung der Flächen, deren Bogenelement negativer Krümmung als Quadratsumme zweier Pfaffscher Formen gegeben ist. Arch. der Math. 3, 50—59 (1952).

Um die Flächen zu bestimmen, deren Bogenelement gegeben ist, bestimmt man aus den Integrabilitätsbedingungen der Flächentheorie etwa die Normalkrümmungen der zueinander orthogonalen Parameterlinien. Man erhält dafür zwei quasilineare Differentialgleichungen 1. Ordnung, die im Falle negativer Gaußscher Krümmung hyperbolisch sind. Die Charakteristiken dieses Systems sind die Asymptotenlinien der Fläche. — Dieses System gewinnt eine besonders einfache Form, wenn man als Unbekannte anstatt der Normalkrümmungen die Winkel zwischen den Asymptotenlinien und einer Schar der Parameterlinien einführt. Durch diesen Kunstgriff wird nämlich gerade die Normalform dieses hyperbolischen Systems erreicht (vgl. Haack und Hellwig, dies. Zbl. 41, 216), in der in jeder Gleichung nur nach einer charakteristischen Richtung differenziert wird. Da nach Integration dieses Systems nur noch Quadraturen zur expliziten Bestimmung der Fläche nötig sind, so folgt aus der allgemeinen Theorie hyperbolischer Systeme: Die Fläche ist aus ihrem Bogenelement im Falle negativer Gaußscher Krümmung eindeutig zu bestimmen nach Vorgabe einer Kurve in der Parameterebene und nach Vorgabe der beiden (nichtverschwindenden) Asymptotenwinkel mit der Tangente dieser Anfangskurve; ferner ist die Fläche bestimmt nach Vorgabe zweier sich schneidender Kurven als Asymptotenlinien (charakteristisches Anfangswert-Problem). Schließlich gibt es genau zwei Flächen vorgegebenen Bogenelementes, die durch eine vorgegebene räumliche Kurve gehen, wofern diese Kurve auch in der Parameterebene vorgegeben ist derart, daß die geodätische Krümmung der letzteren Kurve kleiner ist als die Krümmung der vorgegebenen räumlichen Kurve. — Die gewonnenen Formeln gestatten einfache Ableitungen bekannter Sätze über Minimalflächen.

K. Stellmacher.

Beurling, Arne: Sur la géométrie métrique des surfaces à courbure totale ≤ 0 . Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 7—11 (1952).

Verf. betrachtet in der komplexen z -Ebene ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet R , auf dem durch das Linienelement $ds = \lambda(z) |dz|$ ($\lambda = e^u$) eine Riemannsche Metrik mit nicht positiver Krümmung eingeführt wird. Verbindet γ zwei Punkte a und b von R , so versteht man unter dem geodätischen Abstand L der beiden Punkte den Ausdruck $L = \inf_R \int \lambda(z) |dz|$,

wenn Γ alle rektifizierbaren, zu γ homotopen Kurven durchläuft. — In einem ersten Theorem wird die universelle Überlagerungsfläche R^∞ zu R eingeführt und unter D ein kleinster Abstand zwischen den zwei Kurven Γ_1 und Γ_2 , die a und b verbinden, definiert. Für eine nicht positive Krümmung gilt dann die Beziehung $D^2 + L^2 \leq \frac{1}{2} (L_1^2 + L_2^2)$ und jede Minimalfolge $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ ist eine Folge im Cauchyschen Sinne. Um diesen Satz zu beweisen, stellt Verf. zuerst ein zweites Theorem auf, aus dem sich das erste ergibt. Unter einem konformen Rhombus (losange con-

forme) versteht Verf. ein einfachzusammenhängendes Gebiet $\Omega_{\alpha,\beta}$, in dem sich zwei Symmetrielinien α und β (d. h. Kurven, die bei einer konformen Abbildung von $\Omega_{\alpha,\beta}$ auf sich punktweise invariant bleiben), die je zwei Randpunkte miteinander verbinden, orthogonal schneiden. Bestimmen A und B nach der eingeführten Metrik die Längen von α und β sowie P die Länge des Umfanges von $\Omega_{\alpha,\beta}$, dann beweist Verf. mit Hilfe von Variationsmethoden die Ungleichung $A^2 + B^2 \leq \frac{1}{4} P^2$. Das Gleichheitszeichen tritt nur bei einer Krümmung auf, die nicht identisch verschwindet und für die $\lambda(z) = |dw/dz|$ gilt, wobei $w(z)$ eine analytische Funktion bedeutet, die $\Omega_{\alpha,\beta}$ konform auf einen euklidischen Rhombus abbildet, in welchem α und β in die Diagonalen übergehen. Zum Schluß wird darauf hingewiesen, wie die letzte Ungleichung in gewissem Sinne die Flächen mit nicht positiver Krümmung charakterisiert. H. P. Künzi.

Janenko, N. N.: Einige notwendige Kennzeichen der verbiegbaren Flächen V_m im $(m + q)$ -dimensionalen Euklidischen Raume. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 236—287 (1952) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Erweiterung und Verallgemeinerung der Ergebnisse, die der Verf. früher veröffentlicht hat (dies. Zbl. 40, 239). Es werden die Begriffe der Eigenbiegung und der Mitbiegung eingeführt. Eine Biegung $V_m \sim \bar{V}_m$ heißt nämlich Mitbiegung, wenn sie als ein Teil der Biegung $V_{m+q} \sim \bar{V}_{m+q}$ betrachtet werden kann. Widrigenfalls gibt es eine Eigenbiegung. Jede verbiegbare Fläche gestattet entweder eine Eigenbiegung oder kann als eine Unterfläche einer Fläche, die Eigenbiegung gestattet, betrachtet werden. Der Verf. gibt eine projektiv-invariante Charakterisierung der Klasse der Flächen, die Eigenbiegung gestatten. W. Wrona.

Jonas, Hans: Die Scherksche Minimalfläche als Gegenstand einer anschaulichen geometrischen Deutung des Additionstheorems für das elliptische Integral 1. Gattung. Math. Nachr. 8, 41—52 (1952).

Die einzigen Minimalflächen, die auf mehrere Arten Translationsfläche sind, sind nach Lie die von Scherk mit der Parameterdarstellung $x = \log \frac{\cos v}{\cos u}$, $y = (u - v) \sin \gamma$, $z = (u + v) \cos \gamma$; $\gamma = \text{konst.}$ Man erhält sie insbesondere durch Verschiebung der Parameterkurven längs einander, diese sind kongruent zur Kurve $\cos y = e^{-x}$, also eben. Damit im Zusammenhang zeigt Verf.: Verschiebt man längs einer Asymptotenlinie einen Bogen konstanter Länge, so beschreibt die Mitte der Sehne eine Asymptotenlinie der gleichen Schar, andererseits ist der Ort der Sehnemitten aller Bogen einer Asymptotenlinie, die die gleiche Mitte haben, eine Asymptotenlinie der anderen Schar. Diese Bogenlänge ist mit dem Integral erster Gattung des Problems identisch. Die genannten Eigenschaften des Netzes der Asymptotenlinien übertragen sich bei geeigneter schiefer Parallelprojektion dieses Netzes in ein ebenes Orthogonalnetz, das auch als Grenzfall für $\gamma = \pi/2$ auftritt und sich durch parallele Tangenten zu einem Netz konfokaler Kegelschnitte in einfache Beziehung setzen läßt. G. Bol.

Havlíček, Karel: Surfaces réglées qui sont enveloppes de sphères. Czechoslov. math. J. 1 (76), 187—197 (1952).

Verf. beweist den Satz, daß jede Kanalfläche, die gleichzeitig Regelfläche ist, eine Rotationsfläche ist. J. Nitsche.

Tonolo, Angelo: Sopra un problema di Darboux della meccanica dei mezzi continui. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII, 1, 103—109 (1952).

Darboux hat bewiesen, daß eine Punkttransformation $\xi^k \rightarrow \xi'^k$ ($k = 1, 2, 3$) in R_3 dann und nur dann so beschaffen ist, daß es in jedem Punkte wenigstens ein System von drei gegenseitig senkrechten Richtungen gibt, die den korrespondierenden Richtungen im Bildpunkte parallel sind, wenn die ξ'^k den Ableitungen einer Funktion U gleich sind. Außerdem gab er an, welchen Differentialgleichungen U zu genügen hat, damit die drei bevorzugten gegenseitig senkrechten Richtungen V_2 -normal sind. Die Resultate von Darboux werden hier abgeleitet in allgemeinen Koordinaten und es wird dabei eine Methode benutzt, die der Verfasser zu einem andern Zwecke in früheren Arbeiten [s. dies. Zbl. 36, 230 und Commentationes Pontificiae Acad. Sci. 13, 29—53 (1949)] entwickelt hat. J. A. Schouten.

Gerretsen, J. C. H.: Osservazioni sulla geometria differenziale delle varietà. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 9, 61—80 (1952).

Eine Einführung in die Grundbegriffe der lokalen Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten des R_n unter Verwendung des Ricci-Kalküls.

W. Klingenberg.

Bouchout, V. van: Über die Verbiegung einer Kongruenz mit invariantem mittleren Parameter. Simon Stevin 29, 125—130 (1952).

In jedem Punkt einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des euklidischen dreidimensionalen Raumes sei eine Gerade durch den Vektor $\mathfrak{n}(u, v)$ ($\mathfrak{n}^2 = 1$) definiert, die wir uns starr mit der Tangentenebene der Fläche verbunden denken. Es werden die Geradenkongruenzen betrachtet, die so bei Verbiegung von $\mathfrak{x}(u, v)$ entstehen, und es wird untersucht, wann der mittlere Parameter p (die mittlere Krümmung) der Kongruenz bei Verbiegung der Leitfläche invariant ist. Man findet: 1. $p = 0$, es handelt sich um eine Normalenkongruenz (Satz von Beltrami), 2. $\mathfrak{x}(u, v)$ ist auf eine Drehfläche abwickelbar, $\mathfrak{n}(u, v)$ steht senkrecht auf den Meridiankurven und bildet längs eines Parallelkreises mit diesem einen festen Winkel. — Zu 2.: Sind $\mathfrak{x} + \mathfrak{r}_i \mathfrak{n}$ die Grenzpunkte, $\mathfrak{x} + \varrho_i \mathfrak{n}$ die Brennpunkte des Strahles, so sind auch $\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2$ und $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ bei Verbiegung invariant. Die Torsallinien fallen immer, d. h. auch nach der Verbiegung, mit den Asymptotenlinien zusammen.

M. Barner.

Kula, Muzaffer: Extension de la notion d'enveloppe à la géométrie réglée. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 17, 322—343 (1952).

Durch Abbildung auf die duale Einheitskugel und die entstehende Korrespondenz von Kurven und synektischen Kongruenzen gelingt es, die Begriffe der Berührung höherer Ordnung von synektischen Kongruenzen untereinander und mit Regelflächen zu erklären, ebenso das berührende Normalennetz und die oskulierende Windungskongruenz. Es werden dann eingehender die Einhüllenden einer Schar von synektischen Kongruenzen studiert. Schließlich werden, wieder durch Übertragung von der dualen Kugel, kinematische Anwendungen gegeben.

K. Strubecker.

Frazer, Lowell K.: One-parameter families of linear line complexes. Tensor, n. Ser. 2, 143—161 (1952).

Die von $(n+1)$ linear unabhängigen linearen Komplexen aufgespannte Mannigfaltigkeit linearer Komplexe heiße ${}_nL$. Jede genau darin enthaltene eindimensionale Teilmannigfaltigkeit linearer Komplexe heiße ${}_nC$. Die Geometrie dieser ${}_nC$ ist eine Verallgemeinerung der Theorie der Regelflächen. Im Raume aller linearen Komplexe bilden die speziellen linearen Komplexe eine quadratische Teilmannigfaltigkeit, auf die man eine nichteuklidische Metrik stützen kann. Darauf gründet sich die dargestellte Theorie der Mannigfaltigkeiten ${}_2C, {}_3C, {}_4C, {}_5C$ mit ihren Ableitungsgleichungen und Invarianten, und deren geometrische Deutung. Besonders eingehend wird die Differentialgeometrie der ${}_2C$ behandelt. Formal schließt sich die Arbeit an die Bezeichnungsweisen von V. Hlavatý (Differentialgeometrie, Groningen 1945) an.

K. Strubecker.

Bjušgens, S. S.: Über Stromlinien. II. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 861—863 (1952) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (Teil I, dies. Zbl. 44, 175) hat Verf. geometrische Eigenschaften der Kongruenz der Stromlinien einer stationären Strömung einer idealen Flüssigkeit angegeben. Sie werden hier vervollständigt. Ist \mathfrak{J}_3 Einheitsvektor in Richtung der Stromlinie, dann werden

$$\mathfrak{J} = d\mathfrak{J}_3/ds - (\operatorname{div} \mathfrak{J}_3) \mathfrak{J}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}^* = \mathfrak{J} - \mathfrak{J}_3 \times \operatorname{rot} \mathfrak{J} / 2 \operatorname{div} \mathfrak{J}_3$$

als I. und II. adjungierter Vektor eingeführt. Eine Kurvenkongruenz mit dem Tangentenvektor \mathfrak{J}_3 stellt die Stromlinien dann und nur dann dar, wenn $\operatorname{rot} \mathfrak{J}^* = 0$ ist und das Feld \mathfrak{J} Orthogonalflächen besitzt.

W. Haack.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Fabricius-Bjerre, Fr.: Note on a theorem of G. Bol. Arch. der Math. 3, 31—33 (1952).

Bekanntlich wechselt auf einer Eilinie die Invariante b , deren Verschwinden die sextaktischen Punkte kennzeichnet, mindestens sechsmal das Vorzeichen (vgl. etwa G. Bol, Projektive Differentialgeometrie I, Göttingen 1950, § 9, dies. Zbl. 35, 234). Hat ein offener konvexer Bogen in beiden Endpunkten den gleichen Schmiegekegelschnitt, so kann man ihn durch einen Bogen von K zu einer Eilinie ergänzen; der Bogen hat daher mindestens 5 sextaktische Punkte und sogar 6, wenn er an einem Endpunkt innerhalb, am anderen außerhalb K liegt. Entsprechende Sätze über Eilinien, die an zwei Stellen den gleichen Schmiegekegelschnitt haben, und über Scheitel und Schmiegekreise.

G. Bol.

Gol'dštejn, L. V.: Aufbau der projektiven Theorie der Kurven mit den Mitteln der zentroaffinen Geometrie. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 288—308 (1952) [Russisch].

Verf. entwickelt eine Differentialgeometrie der Kurven $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ im zentralaffinen E_3 und E_4 , deren Gruppen homomorph zu den des projektiven P_2 und P_3 sind. Zunächst ist für Kurven $\mathbf{r}(u)$ des E_3 die Größe $g = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$ wichtig, die an keiner Stelle verschwinden soll. Mit Hilfe der Größe $\Gamma = dg/3g du$, einem sogenannten Christoffelschen Objekt, wird die kovariante Ableitung ∇T einer Invariante vom Gewicht m (die also bei Parameteränderung den Faktor $(du/d\tilde{u})^m$ annimmt) durch $\nabla T = dT/du - m T \Gamma$ definiert. Es ergibt sich dann, daß jede Kurve $\mathbf{r}(u)$ einer und nur einer Differentialgleichung $\nabla^3 \mathbf{r} + v \nabla \mathbf{r} + w \mathbf{r} = 0$ genügt, worin $v = (\mathbf{r}, \nabla^2 \mathbf{r}, \nabla^3 \mathbf{r})/g$ und $w = -(\nabla \mathbf{r}, \nabla^2 \mathbf{r}, \nabla^3 \mathbf{r})/g$ Invarianten vom Gewicht 2 und 3 sind. Geht man von der Kurve $\mathbf{r}(u)$ im E_3 vermittels des Kegels $\Re = \lambda \cdot \mathbf{r}(u)$ zur entsprechenden Kurve in P_2 über, so erweist sich dafür die Größe $p = w - (v\nabla)/2$ als Invariante vom Gewicht 3, mit deren Hilfe bei Nichtverschwinden $d\sigma = \sqrt{p} du$ als projektives Bogenelement eingeführt werden kann. Bei $p = 0$ in einem Punkt liegt dort ein sextaktischer Kegelschnitt vor. Als Projektivkrümmung wird $k = \frac{1}{2} \frac{q}{p^{2/3}}$ ausgerechnet, worin $q = v - \frac{2}{3} \frac{\nabla^2 p}{p} + \frac{7}{9} \left(\frac{\nabla p}{p}\right)^2$ gesetzt ist; es gibt dann auch eine natürliche Gleichung. Im E_4 hat man in der Größe $g = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$ eine Invariante vom Gewicht 6, mit deren Hilfe analog wie im E_3 ein Differenzierungsprozeß ∇ eingeführt wird. Aus der Differentialgleichung $\nabla^4 \mathbf{r} + a \nabla^2 \mathbf{r} + b \nabla \mathbf{r} + c \mathbf{r} = 0$, die jede Kurve $\mathbf{r}(u)$ befriedigt, ergeben sich die Invarianten $a = (\mathbf{r}, \nabla \mathbf{r}, \nabla^3 \mathbf{r}, \nabla^4 \mathbf{r})/g$, $b = -(\mathbf{r}, \nabla^2 \mathbf{r}, \nabla^3 \mathbf{r}, \nabla^4 \mathbf{r})/g$, $c = (\nabla \mathbf{r}, \nabla^2 \mathbf{r}, \nabla^3 \mathbf{r}, \nabla^4 \mathbf{r})/g$, und bei Übergang zum P_3 in $p = b - \nabla a$ eine Invariante vom Gewicht 3. $p = 0$ bedeutet jetzt, daß es an der betr. Stelle einen linearen Komplex gibt, der von höherer Ordnung als der vierten berührt, bei $p \equiv 0$ gehört die Kurve ganz einem solchen linearen Komplex an. Die Ausdrücke $k_1 = \frac{a^*}{p^{2/3}}$ und $k_2 = \frac{c^*}{p^{1/3}}$, worin a^* und c^* durch bestimmte Abänderungen aus a und b entstehen, werden Krümmung und Torsion genannt. Sie führen zu natürlichen Gleichungen, wenn man ihre Abhängigkeit vom Projektivbogen ausrechnet. Es wird zum Schluß nachgewiesen, daß diese k_1, k_2 mit den von Fubini und Čech eingeführten Größen κ_1 und κ_2 durch $k_1 = -10 \kappa_1/3$, $k_2 = d^2 \kappa_1/d\sigma^2 + \kappa_2 - \kappa_1^2$ zusammenhängen. W. Burau.

Ströher, Wolfgang: Darstellung des Linielementes sechster Ordnung durch W -Kurven. Monath. Math. 56, 288—303 (1952).

Eine W -Kurve ist durch 8 Bestimmungstücke bzw. ein Linielement 7. Ordnung festgelegt. Dementsprechend haben ∞^1 W -Kurven ein gemeinsames vorgegebenes Element e 6. Ordnung. Zunächst untersucht Verf. die Fundamentalpunkte der Kurven dieser Schar. Es zeigt sich, daß sie auf einer Kurve 3. Ordnung c^3 liegen. Der Trägerpunkt von e ist Doppelpunkt der c^3 , die von e verschiedene Tangente ist die projektive Normale von e . Die 3 Fundamentalpunkte einer jeden Kurve der Schar bestimmen ein Polardreieck eines Kegelschnittes k . k ist autopolar dem Schmiegekegelschnitt c von e , der also e von 4. Ordnung berührt. Bei der Bestimmung der Fundamentalpunkte einer speziellen W -Kurve durch e kann ein Punkt P auf der c^3 willkürlich angenommen werden. Die beiden anderen liegen einerseits auf der Polaren von P bezüglich k , andererseits auf der c^3 . Dadurch ergeben sich jedoch 3 Schnittpunkte, von denen einer (P') auszuschließen ist. Die Zuordnung $P \rightarrow P'$ erweist sich als quadratische Involution Q , und es zeigt sich, daß je 3 zusammengehörige Fundamentalpunkte bei Q in 3 auf einer Geraden liegende Punkte übergehen. Diese Geraden bilden ein Büschel durch den Pol der projektiven Normalen von e bezüglich des Schmiegekegelschnittes c .

J. Nitsche.

Muracchini, Luigi: Contributo alla geometria proiettiva differenziale dei 3-tessuti di curve piane. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 285—292 (1952).

Eine eindeutige Abbildung zweier ebener Kurvennetze aufeinander ist nach Čech [vgl. G. Fubini und E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris 1931 (dies. Zbl. 2, 351), p. 161] dann und nur dann eine projektive Abwicklung, wenn die Netzkurven für die Abbildung charakteristisch sind. Analog dazu sind die projektiv abwickelbaren Dreigewebe genau die charakteristischen Gewebe der ebenen Abbildungen mit verschiedenen charakteristischen Richtungen. Um letztere zu untersuchen, entwickelt Verf. eine projektive Theorie der ebenen Kurvengewebe, kommt jedoch nicht zu abschließenden Ergebnissen über ihre Abwickelbarkeit. Vgl. auch E. Bortolotti, dies. Zbl. 27, 91.

G. Bol.

Barner, Martin: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven des n -dimensionalen Raumes. Arch. der Math. 3, 171—182 (1952).

L'A. collega ad una curva $x(t)$ dello spazio a n dimensioni una piramide di riferimento locale di vertici $x_0 = x, x_1, \dots, x_n$ tali da soddisfare ad un sistema di formule di derivazione che generalizzano quelle già date da G. Bol per $n = 3$ (Projektive Differentialgeometrie I. Göttingen 1950, questo Zbl. 35, 234): il determinante $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ risulta essere costante. Per un cambiamento di parametro $t = f(t^*)$, associato ad un conveniente mutamento del fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee in guisa da mantenere costante Δ , gli x_k si mutano negli $x_k^* = \varphi^{n/2-k} \sum_{\nu=0}^k a_{k\nu} x_{k-\nu} \frac{\Delta^\nu}{\nu!}$ dove $a_{k\nu}$ sono costanti numeriche mentre $\varphi(t) = \frac{dt^*}{dt}$.

$A = \varphi^{1/2} \varphi$. Al variare della scelta del parametro, e quindi al variare di A il punto x_k^* associato a un dato punto x della curva descrive una curva razionale normale di ordine k la quale appartiene allo spazio osculatore di dimensione k . In particolare il punto x_k^* descrive una curva di ordine n che l'A. chiama C_n -armonica: questa determina anche tutte le curve descritte dagli altri vertici della piramide fondamentale in quanto la tangente alla curva descritta da x_k^* sega lo spazio osculatore di ordine $k-1$ nel punto x_{k-1}^* . L'A. si propone di dare una definizione geometrica della C_n -armonica e raggiunge lo scopo dimostrando che essa si può ottenere dalla C_n che ha in comune con la curva i punti $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$ e nei primi due anche gli spazi osculatori fino all'ordine $n-1$, col far tendere t_1, t_2, t_3 ad uno stesso valore t_0 .

P. Buzano.

Barner, Martin: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare. Math. Z. 56, 409—442 (1952).

Zwei Kurven $w(t), \bar{w}(t)$ des projektiven R_3 seien durch gleiche Parameterwerte eindeutig aufeinander bezogen. Stellt $\sigma(t)$ den Schnittpunkt der Tangente von $w(t)$ mit der Schmiegeebene von $\bar{w}(t)$, $\bar{\sigma}(t)$ den Schnittpunkt der Tangente von $\bar{w}(t)$ mit der Schmiegeebene von $w(t)$ dar und sind die Punkte eindeutig festgelegt und linear unabhängig, so gelten für die darstellenden Vierervektoren Ableitungsgleichungen der Form $w' = a\sigma, \bar{w}' = \bar{a}\bar{\sigma}, \sigma' = \bar{A}w + b\bar{\sigma}, \bar{\sigma}' = A\bar{w} + \bar{b}\sigma$. Es sind dann nur noch Umnormungen der Vektoren mit konstanten Faktoren gestattet, bei vorgegebener Parameterskala bilden daher die Größen $(*) a\bar{A}, \bar{a}A, b\bar{b}, (\ln b/a)', (\ln \bar{b}/\bar{a})', (\ln a/\bar{a})'$ ein vollständiges projektives Invariantensystem des Paares. Bei Anwendung des Dualitätsprinzips, also wenn statt der Kurven ihre Schmiegeebenengesamtheiten betrachtet werden, bleibt das Begleittetraeder erhalten, der Geraden (w, \bar{w}) entspricht dabei $(\sigma, \bar{\sigma})$, die Invarianten unterliegen nur einer Vertauschung. Durch Quotientenbildung erhält man aus den Invarianten $(*)$ absolute, die sich auch bei Transformation des Parameters nicht ändern. Diese werden in verschiedenster Weise geometrisch gedeutet und zueinander in Beziehung gesetzt. Dazu werden u. m. die Quadriken herangezogen, die die Regelflächen, die von den Geraden (w, \bar{w}) und $(\sigma, \bar{\sigma})$ erzeugt werden, berühren, weiter Raumkurven dritter Ordnung, welche beide Kurven in entsprechenden Punkten in genügend hoher Ordnung berühren, dann Korrelationen und Projektivitäten, welche entsprechende Elemente k -ter Ordnung beider Kurven aufeinander abbilden. Für die zahlreichen geometrischen Beziehungen, die sich so ergeben, muß auf die inhaltsreiche Arbeit selbst verwiesen werden. Besonders interessant sind die Pantazi-Paare, bei denen die beiden genannten Regelflächen Brennflächen einer W -Kongruenz und beide Kurven deshalb asymptotisch transformierte zweiter Ordnung voneinander sind [A. Pantazi, Disquisitiones math. phys. 1, 357—368 (1941), S. Finikoff, dies. Zbl. 33, 19]. Sie werden durch die Bedingung $a\bar{A} = \bar{a}A$ gekennzeichnet. — Auf der Regelfläche (w, \bar{w}) werden weiter Doppelverhältnisscharen betrachtet, also Kurvenscharen, die die Erzeugenden projektiv aufeinander abbilden. Zu jeder solchen gehört längs jeder Erzeugenden eine eindeutig bestimmte Quadrik, deren Erzeugenden die Scharkurven berühren, weiter unter Zuhilfenahme der Vierseite auf jeder Quadrik, deren Eckpunkte auf (w, \bar{w}) und in den Schmiegeebenen der Kurven des Paares

liegen, eine projektive Abbildung der Erzeugenden auf sich. Da eine Quadrik, die die Regelfläche (v, \bar{w}) längs einer Erzeugenden berührt, sich auf viele Arten invariant festlegen läßt, erhält man zahlreiche invariante Doppelverhältnisscharen, die zueinander und zum Kurvenpaar in Beziehung gesetzt werden. So erhält man weitere Deutungen der Invarianten (1) und auch Beziehungen zur Theorie der Regelflächen und auf dem Wege über Hesses Korrespondenzprinzip zur ebenen hyperbolischen Geometrie. Auch hier muß für Einzelheiten auf die Arbeit verwiesen werden.

G. Bol.

Manara, Carlo Felice: Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della jacobiana. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 40—53 (1952).

L'A. considera una trasformazione analitica T fra due piani π e π' nell'intorno di una coppia di punti corrispondenti O e O' e nell'ipotesi che O sia un punto semplice della curva jacobiana di T : osserva che con opportuna scelta dei sistemi di riferimento si può esprimere T come prodotto di una trasformazione regolare (in un intorno di O) e della trasformazione: $x' = x_1, y' = c_{20} x_1^2 + c_{11} x_1 y_1 + c_{02} y_1^2 + \dots$ e dimostra che T è approssimabile cremonianamente nell'intorno di O , fino allo ordine n , se sono verificate le condizioni $c_{0i} = 0$ per $i \leq n$, le quali esprimono che T^{-1} fa corrispondere alle rette per O delle curve aventi in comune un elemento di ordine n (almeno) di centro O . Se l'approssimazione cremoniana deve verificarsi per un ordine grande a piacere i coefficienti c_{0i} devono essere tutti nulli e allora la T è prodotto di una trasformazione regolare in O e di una trasformazione cremoniana non regolare in O . Se invece T è approssimabile cremonianamente (nell'intorno di O) solo fino a un certo ordine n , l'A. dimostra che essa è approssimabile ulteriormente fino ad un ordine comunque grande mediante una trasformazione razionale di indici $(1, n+1)$.

P. Buzano.

Sangermano, Cosimo: Sulle corrispondenze puntuali degeneri fra spazi lineari. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 8, 83—89 (1952).

È noto [Villa, questo Zbl. 24, 173; Rend. Accad. Italia, VII. Ser. 3, 209—216 (1942); Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, IX. Ser. 9, 19—26 (1941/42)] che una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_n, S_m è degenerare quando (e solo quando) la varietà rappresentativa della trasformazione sulla V_{m+n} di Segre, che rappresenta le coppie di punti dei due spazi, è quasisasintotica $\sigma_{1,2}$ per V_{m+n} . L'A. dimostra che questo teorema si estende al caso delle trasformazioni puntuali fra $\nu+1$ spazi lineari ($\nu > 1$). Si ha cioè: Una trasformazione puntuale T fra $\nu+1$ spazi lineari ($\nu > 1$), rappresentata dalle equazioni $y_r = f_r(x^1, x^2, \dots, x^\nu)$ [dove x^λ ($\lambda = 1, 2, \dots, \nu$) sta ad indicare le coordinate nonomogenee $(x_1^\lambda, x_2^\lambda, \dots, x_{\mu_\lambda}^\lambda)$ di punto di uno spazio S^λ di dimensione μ_λ , mentre le y_r sono le coordinate non-omogenee di punto in uno spazio S_n ($r = 1, 2, \dots, n$)] è degenerare quando e solo quando la varietà $V_{\Sigma \mu_\lambda}$ che la rappresenta sopra la $V_{n+\Sigma \mu_\lambda}$ di Segre (rappresentativa dei gruppi di $\nu+1$ punti degli $\nu+1$ spazi considerati) ha per questa carattere di varietà quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$. Se J_λ è la matrice Jacobiana delle f_r rispetto alle variabili x^λ , la trasformazione è degenerare quando (e solo quando) una almeno delle ν matrici J_λ è nulla per ogni gruppo di $\nu+1$ punti corrispondenti in T . Orbene l'A. dimostra che, se k_λ sono le caratteristiche delle matrici Jacobiane che sono nulle, la specie della suddetta varietà quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ è $\sum_\lambda \left(\mu_\lambda - k_\lambda + 1 \right)_2$.

M. Villa.

Muracchini, Luigi: Sulle trasformazioni puntuali fra due S_r che mutano ∞^{r-1} iperpiani in iperpiani. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 9, 31—37 (1952).

Betrachtet werden „im Kleinen“ Punktabbildungen zweier projektiver Räume S'_r, S''_r der Dimension r , die analytisch durch $\xi(u_1, u_2, \dots, u_r) \leftrightarrow \eta(u_1, u_2, \dots, u_r)$ mit

$$(\xi, \xi_{u_1}, \dots, \xi_{u_r}) \neq 0, (\eta, \eta_{u_1}, \dots, \eta_{u_r}) \neq 0$$

gegeben sind. Ergebnis: Ist $r \geq 3$ und wird ein System von ∞^{r-1} Hyperebenen des S'_r , die keinem Bündel angehören, in ein ebensolches des S''_r übergeführt, so ist die Abbildung notwendig

eine Projektivität. Wäre sie keine, so würde höchstens ein Bündel von Hyperebenen in ein Bündel übergeführt werden und eventuell noch andere Hyperebenen in ebensolche, die aber sicher kein ∞^{r-1} -parametrisches System bilden. — In der projektiven Ebene jedoch ($r = 2$) gibt es nicht-projektive Punktabbildungen, die ein Geradenbüschel und noch zwei weitere einparametrische Geradensysteme in ebensolche Gebilde überführen (Vgl.: Blaschke-Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938, dies. Zbl. 20, 67). Nach G. Bol (dies. Zbl. 18, 425) kann man solche Systeme (für Sechseckgewebe gilt dies sogar allgemein) auf drei Geradenbüschel, deren Zentren nicht in einer Geraden liegen, abbilden. Vom Verf. explizit berechnet werden deshalb noch die nicht-projektiven Abbildungen, die ein Geradenbüschel und zwei Geradensysteme in drei Geradenbüschel überführen. M. Barner.

Bompiani, E.: Sur les calottes superficielles du troisième ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 477—482 (1952).

Let $z = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$ be a surface tangent to the plane x, y at the origine O ; φ_i indicates a polynome of degree i . Some projective invariants and properties are given referring the surfaces with the same φ_2, φ_3 which contain a given straight line r which do not pass by O and is not contained in the tangent plane at O . L. A. Santaló.

Bompiani, Enrico: Sulla curvatura pangeodetica di una curva di una superficie dello spazio proiettivo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 103—106 (1952).

Für eine beliebige Kurve auf einer Fläche des projektiven R_3 hat E. Bompiani, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 2, 466—470 (1952), eine pangeodätische Krümmung ρ definiert, die nur für die Pangeodätischen, das sind die Extremalkurven der Projektivbogenlänge, verschwindet. Er stellt hier den Zusammenhang her mit der Extremalkrümmung ρ_e , die man der Kurve in bezug auf das Variationsproblem zuzuordnen pflegt [vgl. etwa L. Berwald, J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 34, 213—220 (1928)]; es ist $\rho_e^2 = 2\rho^2$. G. Bol.

Marcus, F.: Sur les surfaces et réseaux E et sur les surfaces de Jonas. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Mat., Fiz. 4, 519—524 u. russische u. französ. Zusammenfassg. 525, 525—526 (1952) [Rumänisch].

Si x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont les coordonnées homogènes d'un point d'une surface rapporté à un réseau conjugué, u, v , la surface est déterminé projectivement par le système complètement intégrable associé

$$(1) \quad x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0, \quad x_{uu} + m x_{vv} + p x_u + q x_v + r x = 0$$

dont x_i sont des solutions. L'A. étudie le cas des surfaces et réseaux E , considérés par Elie Cartan qui possèdent la propriété que les invariants h, k de la première équation (1), l'équation de Laplace ponctuelle du réseau, sont respectivement égaux aux invariants h, \bar{k} de l'équation de Laplace tangentielle du réseau. On montre que dans ce cas on peut s'arranger de façon qu'on ait dans (1)

$$(2) \quad p = q = 0, \quad a_u + b_v = 0, \quad (\log m)_{uv} = 2(k - h)$$

et inversement. On montre ensuite que si la transformée (x_1) ou (x_{-1}) du réseau (x) est aussi un réseau E , alors la propriété appartient à chaque (x_i) ou (x_{-i}) . — En ce qui concerne les surfaces de Jonas on montre qu'elles sont définies par le même système (1), (2), mais avec la particularisation $h = k$. G. Vrânceanu.

Klingenberg, Wilhelm: Über die 2-dimensionalen Flächen im 4-dimensionalen projektiven Raum. Arch. der Math. 3, 154—162 (1952).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 46, 396) hat Verf. angegeben, wie man durch Apolaritätsbedingungen bei einer p -dimensionalen Fläche des projektiven R_n an jeder Stelle eindeutig ein Begleitsimplex festlegen kann. Er wendet dieses Verfahren hier an auf die konjugierten Netze des R_4 , für die also $p = 2, n = 4$, und erhält ein Bezugssystem, das schon früher von G. Fubini angegeben wurde. Es wird geometrisch gekennzeichnet, drei der Ecken des Simplex sind der Flächenpunkt und seine Laplace-Transformierten, die beiden anderen liegen in den Schmiegebenen der Netzkurven und werden mittels berührender Quadriken fixiert. Dieses Begleitsimplex hat niedrigere Differentiationsordnung als die anderen in der Literatur benutzten und ist das einzige, zu dessen Erklärung keine einschränkenden Voraussetzungen für das Netz gemacht werden müssen. Man vergleiche auch die nachstehend besprochene Arbeit von M. Barner. G. Bol.

Barner, Martin: Zur projektiven Differentialgeometrie der konjugierten Netze im vierdimensionalen Raum. Arch. der Math. 3, 409—420 (1952).

Verf. bringt einen neuen Beitrag zur Theorie der F_2 im S_4 . Außer den hier zitierten Arbeiten von G. Fubini, A. Kawaguchi, C. Burstin, C. C. Hsiung und Ref. sind zu dem Gegenstand noch zu nennen die Noten von E. Bompiani, Atti Accad. nac. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 5, 84—90 und 143—149 (1927) und A. Berezman, dies. Zbl. 44, 179. Im Unterschied zu der bisher gepflogenen Behandlung mit Hilfe eines von Beginn an fixierten lokalen Bezugssystems \mathfrak{B} wendet Verf. ein von G. Bol stammendes Verfahren der halbvarianten Differentiation an, das in der Wahl von \mathfrak{B} einige Parameter offen läßt. Durch geeignete Wahl dieser Parameter kann man sich das dem vorliegenden Problem am besten angemessene \mathfrak{B} herausuchen. So wird $\mathfrak{B} = (\xi, \eta, \bar{\eta}, \bar{\xi})$ zunächst nur soweit fixiert, daß $\eta, \bar{\eta}$ auf den konjugierten Tangenten und $\xi, \bar{\xi}$ in den konj. Schmiegeebenen liegen. Die Ableitungsgleichungen und Bedingungen werden aufgestellt. Hierbei sind die Begrenzungsräume $\mathfrak{V} = (\xi, \eta, \bar{\eta}, \bar{\xi})$, $\mathfrak{V} = (\xi, \eta, \bar{\eta}, \bar{\xi})$ von \mathfrak{B} jedoch schon invariant fixiert, indem sie von einer konj. Schmiegebene und der andern konj. Tangente aufgespannt werden. Interpretiert man $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}$ als Punkte $\hat{\eta}, \hat{\eta}$ in einem dualen Raum, so ist durch die Paare $(\hat{\eta}, \hat{\eta})$ ein Geradensystem bestimmt mit $\hat{\eta}, \hat{\eta}$ als Brennflächen. Da dies umkehrbar ist, gilt der bemerkenswerte Satz, daß die F_2 und die Geradensysteme sich eindeutig entsprechen, so daß man jede analytische Aussage auf zweifache Weise geometrisch interpretieren kann. Durch systematische Spezialisierung von \mathfrak{B} erhält Verf. die in der Literatur bekannten Bezugssysteme. Hierbei stehen sich diejenigen von Burstin und Hsiung in gewisser Weise dual gegenüber, während dasjenige von Fubini-Klingenberg als selbstdual mit Hilfe der Schmiegquadriken charakterisiert ist. Der durch die F_2 induzierten Laplace-Kette läßt sich eine zweite so einbeschreiben, daß man eine in sich duale Figur erhält. Als Spezialfall ergibt sich daraus ein Ergebnis von Hsiung: Die Tangenten an das konjugierte Netz im R_4 schneiden aus einem festen S_3 des R_4 zwei Laplace-Transformierte voneinander aus. Hiermit ergibt sich leicht ein Zugang zur Theorie der projektiven Geradensysteme im R_4 .

W. Klingenberg.

Terracini, Alessandro: Osservazioni sulle linee principali di alcune classi di superficie dello spazio a cinque dimensioni. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 247—252 (1952).

L'expression „ordre d'approximation d'une incidence“ ayant le sens défini par l'A. (ce Zbl. 16, 75), on appelle ligne principale d'une surface S de S_5 toute courbe de S telle que les plans tangents en deux points infiniment voisins quelconques de la courbe admettent une incidence d'ordre d'approximation $\sigma \geq 4$. Il existe sur S (non supposée représenter une équation de Laplace) 5 systèmes de lignes principales, et le fait que pour l'un de ces systèmes l'ordre d'approximation s'élève (on aura alors $\sigma \geq 6$) n'entraîne pas que le système soit multiple. Les deux circonstances précédentes ne sont cependant pas tout à fait indépendantes et l'A., s'appuyant sur le système fondamental d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre vérifié par S , démontre à cet égard les deux théorèmes suivants: I. Si, sur S , un système de lignes principales est au moins triple, deux plans tangents à S en deux points infiniment voisins quelconques d'une courbe quelconque de ce système admettent une incidence d'ordre d'approximation $\sigma \geq 6$. II. Si deux plans tangents infiniment voisins en deux points consécutifs d'une ligne principale (non plane) quelconque d'un même système de S sont incidents avec l'ordre d'approximation $\sigma \geq 6$, le système, s'il est au moins double, est nécessairement au moins triple. — Le résultat du théorème I ne peut être amélioré. L'hypothèse d'un système qui ne serait que double est, en effet, contredite par II, et, d'autre part, en raisonnant sur une surface W , dans l'hypothèse du système triple, la condition $\sigma \geq 6$ ne peut être améliorée. Le raisonnement par lequel l'A. établit ce dernier résultat met en évidence la circonstance suivante: Le fait qu'un système de lignes principales de S soit quadruple (et non seulement triple comme dans I) n'entraîne pas que l'ordre d'approximation de l'incidence des couples de plans tangents infiniment voisins le long d'une ligne principale de ce système soit ≥ 8 .

B. Gambier.

Villa, Mario: Varietà quasi-asintotiche e trasformazioni puntuali. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 17—21 (1952).

L'A. riassume risultati di suoi precedenti lavori (questo Zbl. 22, 168; 22, 169; 24, 173; 27, 349; 29, 314) mettendo in luce come fatti notevoli relativi alla teoria delle trasformazioni puntuali fra due spazi si riflettano in un comportamento quasi-asintotico della superficie immagine della trasformazione puntuale sulla varietà di Segre rappresentativa delle coppie di punti dei due spazi.

P. Buzano.

Vaona, Guido: Classificazione proiettiva delle varietà quasi-asintotiche. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 292—298 (1952).

In una varietà V_m descritta dal punto $x = x(\tau_1, \dots, \tau_m)$ si consideri una varietà subordinata V_k definita dalle equazioni $\tau_i = \tau_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ e descritta dal punto $\bar{x} = \bar{x}(t_1, \dots, t_k)$. Sia $S(r)$ lo spazio r -osculatore a V_m nel punto x : ad $S(r)$ appartengono senz'altro il punto \bar{x} e i suoi derivati (rispetto a t_i) fino all'ordine r compreso, ma non necessariamente i derivati di ordine più alto. Se però vi sono dei punti combinazioni lineari dei derivati di \bar{x} degli ordini $r+1, r+2, \dots, s$ ($s > r$) che appartengono ad $S(r)$ si dice che V_k è una quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di V_m : in tal caso lo spazio congiungente l' $S(r)$ osculatore a V_m e l' $S(s)$ osculatore a V_k ha dimensione inferiore all'ordinario e se t è l'abbassamento di tale dimensione esso è un carattere proiettivo che Villa ha chiamato specie della quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$. Due quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ di uguale specie t possono però ancora distinguersi per altri caratteri proiettivi: fra questi Vaona considera quelli che si riflettono sul sistema lineare associato, denotando così un particolare sistema di dimensione $t-1$ di ipersuperficie algebriche dello S_{k-1} e di ordine s che egli definisce in relazione con il sistema delle t relazioni di incidenza fra l' $S(r)$ e l' $S(s)$ esprimenti la specie della quasi-asintotica. Nel caso di una V_2 quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ di V_m il sistema lineare associato è una coppia di punti ($t=1$) oppure un'involuzione ($t=2$): in entrambi i casi si hanno due tipi proiettivamente distinti. L'A. utilizza questo risultato per determinare le eventuali quasi-asintotiche $\gamma_{1,2}$ di V_m esistenti su V_2 .
P. Buzano.

Vaona, Guido: Sulle curve di una varietà quasi-asintotica. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 411—420 (1952).

L'A. si propone lo studio delle curve giacenti su una V_k quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di una V_m che sono a loro volta quasi-asintotiche per la coppia (V_k, V_m) o per la V_m . A tale scopo, riprendendo la nozione di sistema lineare di ipersuperficie associato a una $\sigma_{r,s}$, da lui introdotta in un precedente lavoro (vide relaz. preced.), Vaona attribuisce la caratteristica τ a $\sigma_{r,s}$ quando il sistema lineare associato possiede ∞^r ipersuperficie composte di iperpiano s -plo ($\tau = -1$ se non esistono ipersuperficie siffatte). Dimostra quindi che se $\tau > 0$ la $\sigma_{r,s}$ possiede infinite quasi-asintotiche $\gamma_{r,s-1,s}$ per (V_k, V_m) dipendenti da τ funzioni arbitrarie di un argomento; se $\tau = 0$ possiede infinite $\gamma_{r,s-1,s}$ dipendenti da $k-1$ costanti arbitrarie; se $\tau = -1$ la $\sigma_{r,s}$ non possiede alcuna curva $\gamma_{r,s-1,s}$. Risolve poi il problema inverso assegnando delle condizioni sufficienti perchè dall'esistenza su una V_k di determinati sistemi di $\gamma_{r,s-1,s}$ per (V_k, V_m) segua che la V_k è una quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ per la V_m . Tutto ciò nell'ipotesi $s > r+1$: per $s = r+1$ sussistono risultati analoghi ai precedenti, salvo la sostituzione delle $\gamma_{r,s-1,s}$ di (V_k, V_m) con $\gamma_{s-1,s}$ di V_m .
P. Buzano.

Muracchini, Luigi: Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria. I, II. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 435—462 (1951), 3, 75—89 (1952).

Di questa Memoria è apparsa una Nota preventiva dallo stesso titolo [questo Zbl. 43, 370]. L'A. da qui le dimostrazioni dei risultati enunciati nella Nota suddetta. Le varietà V_5 , a 5 dimensioni, per le quali la varietà luogo degli S_5 tangenti ha dimensione 9 (invece di 10), sono state determinate tutte dall'A. e si trovano elencate a pag. 371 del vol. 43 di questo Zbl. Ma ora ecco in breve il contenuto della Memoria: È noto che, se la varietà W luogo degli S_k tangenti ad una V_k , ha dimensione $2k-l$, la V_k soddisfa $d = k(k-1)/2 + l$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti oppure soddisfa ad un sistema di equazioni di Laplace, in numero inferiore a d , tale che il sistema delle forme quadratiche associate ha un sistema apolare con matrice jacobiana nulla, di caratteristica $k-l$, e viceversa [Terracini, Atti Acad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 49, 214—247 (1914)]. Le V_k che soddisfano a d equazioni di Laplace sono note. La prima questione che si presenta è quindi quella di determinare i tipi di sistemi lineari di quadriche dell' S_{k-l} , di dimensione δ a matrice jacobiana di caratteristica $k-l$, con $k-l \leq \delta \leq (k-l-1)(k-l+2)/2$, $l > 0$. E basta esaminare il caso $l=1$ poichè dalla soluzione per $l=1$ segue quella per l qualsiasi. L'A. osserva che i seguenti tipi di sistemi lineari di quadriche hanno la matrice jacobiana di caratteristica $k-1$: a) sistemi lineari di S_0 -coni col vertice S_0 in comune, di dimensione δ soddisfacente alla disuguaglianza precedente per $l=1$; b) sistemi lineari di quadriche passanti per uno S_h ed uno S_{k-h-2} (fra loro sghembi), con $h \geq 1$, di dimensione δ soddisfacente alla disuguaglianza precedente per $l=1$; c) sistemi lineari di quadriche di dimensione δ (soddisfacente alla solita disuguaglianza) contenenti un sistema lineare di dimensione $\delta-q$, a matrice jacobiana di caratteristica $k-q-1$, con $0 \leq q \leq k-3$. — L'A. dimostra che per $k=5$ i tipi precedenti sono i soli possibili (altrettanto avviene per $k=3, 4$). Dimostra pure che per $k > 3$ e per $(k-1)(k-2)/2 + 1 \leq \delta \leq (k-2)(k+1)/2$, un sistema lineare ∞^δ di quadriche dello S_{k-1} , a matrice jacobiana di caratteristica $k-1$, è necessariamente del tipo a). Viene anche dimostrata una proposizione rela-

tiva al caso $\delta = (k-1)(k-2)/2$. Dopo aver determinato i sistemi lineari di quadriche che occorrono, l'A. scrive i sistemi di equazioni di Laplace che rappresentano le V_k cercate. I sistemi di quadriche del tipo a) conducono a sistemi di d equazioni di Laplace l. i., $k \leq d \leq k(k-1)/2$,

fra le quali ve ne sono k che si possono ridurre alla forma $x_{kk} = 0$, $x_{ki} = \sum_{r=1}^k a_{ir} x_r + a_i x$

($i = 1, \dots, k-1$; $r = 1, \dots, k$). — Le V_k integrali sono rigate sviluppabili. Vengono dimostrate le proposizioni seguenti: 1. Le radici della equazione in q $|a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ii} - q, \dots, a_{i, k-1}| = 0$ soddisfano tutte alla relazione $q_k + q^2 = 0$; 2. Se q' è una radice della precedente equazione in q di molteplicità $s(>1)$ per la quale il determinante del primo membro ha caratteristica $k-s-1$, la V_k integrale è una rigata sviluppabile che ammette una varietà direttrice di dimensione $k-s-1$, descritta dal punto $X = x_k - q' x$. Vengono poi stabilite alcune disuguaglianze che permettono di assegnare una molteplicità minima per almeno una radice della precedente equazione in q , quando sia assegnato il numero d di equazioni di Laplace l. i. del sistema. Si mette così in relazione, sotto opportune condizioni, il numero delle equazioni di Laplace l. i. a cui soddisfa una rigata sviluppabile con la dimensione minima delle direttrici esistenti sulla varietà stessa (dando così risposta anche ad un problema posto da Terracini nell'op. cit.). La ricerca è condotta a termine per $k=5$. I sistemi di quadriche del tipo b) e della massima dimensione possibile conducono com'è noto [Terracini, op. cit.] alle varietà di C. Segre che rappresentano le coppie di punti di due spazi lineari. L'A. dimostra che i sistemi di quadriche del tipo b) di dimensione $(> k-2)$ inferiore alla massima, conducono alle varietà proiezioni delle varietà di Segre in spazi di tutte le dimensioni fino alla dimensione $2k$. Dai sistemi di quadriche di tipo c) si ricavano, per $k=5$, le rimanenti V_5 richieste. M. Villa.

Rozet, O.: Sur certaines congruences de droites. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 21, 320—327 (1952).

L'A. étudie des congruences engendrées par une droite passant par un point x d'une surface (x) , non située dans le plan tangent à celle-ci et les congruences engendrées par la conjuguée de cette droite par rapport à la quadrique de Lie attachée au point x . L. Godeaux.

Paquet, Henriette: Sur certains couples de surfaces. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 21, 364—368 (1952).

L'A. étudie les correspondances entre deux surfaces telles que les asymptotiques soient conservées et que les droites joignant deux points homologues passent par un point fixe. Quelques exemples. L. Godeaux.

Finikov, S. P.: Ein System von W -Kongruenzen mit funktionaler Willkür. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 169—174 (1952) [Russisch].

Verf. gibt in dieser Note eine Übersicht über eigene Untersuchungen. Diese betreffen sog. Bianchisysteme von ∞^2 W -Kongruenzen, deren Fokalflächen zu zwei ∞^1 -Scharen gehören. Bezüglich dieser Flächenscharen lassen sich die Kongruenzen zu Paaren stratifiabler zusammenfassen. Verf. hat das schwierige Problem, alle solche Systeme anzugeben, in einigen Spezialfällen gelöst, z. B. wenn das System von zwei Funktionen einer Variablen abhängt oder mit einem stratifiablen Kurvenpaar zusammenhängt. W. Burau.

Takeda, Kusuo: Principal ruled surfaces of a rectilinear congruence. J. math. Soc. Japan 4, 286—295 (1952).

In jedem Strahl p einer Linienkongruenz K gibt es einen sie von vierter Ordnung berührenden quadratischen Komplex C_2 und dazu in K fünf Regelflächen, die C_2 längs p von fünfter Ordnung berühren. Dies sind die fünf Hauptregelflächen von K in p . Auf der Kleinschen Bildfläche Φ in R_5 entsprechen ihnen die Hauptlinien. Sind zwei der fünf Hauptregelflächen stets harmonisch zu den abwickelbaren Flächen und die drei übrigen apolar dazu, so liegt eine „ S -Kongruenz“ vor. Die Laplacesche Folge hat dann die Periode vier. Fallen zwei Hauptregelflächen (mit ihren Fortschreitungsrichtungen) mit jenen der abwickelbaren Flächen zusammen, so liegt eine „ K -Kongruenz“ vor. Auch sie werden kurz beleuchtet. W -Kongruenzen sind zugleich vom Typus K und S . Schließlich werden jene Regelflächen der Kongruenz betrachtet, denen auf Φ Bompianis Quasiasymptotenlinien entsprechen. Diese quasiasymptotischen Regelflächen der Kongruenz K sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß ihre oskulierenden linearen Kongruenzen die Fokalbüschel der Strahlen p enthalten. K. Strubecker.

Akivis, M. A.: Invarianter Aufbau der Geometrie der Hyperflächen des konformen Raumes. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 43—75 (1952) [Russisch].

Eine ausführliche und schöne Darstellung der Ergebnisse, über die schon in einer zusammenfassenden Mitteilung (A. M. Akivis, dies. Zbl. 47, 152) berichtet wurde. Es wird konsequent eine von G. F. Laptev (dies. Zbl. 40, 246; 41, 89; Diss. Univ. Moskau, 1950) stammende Methode verwendet, die Cartans Kalkül mit der Theorie des geometrischen Objekts verbindet. — In Ergänzung zu dem Referat der Zusammenfassung sei erwähnt: Falls $Rg(a_{ij}) = m < n - 1$, so hängen die zentralen Hypersphären von m Parametern ab, oder, falls $m = n - 2$, können sie auch von $n - 1$ Parametern abhängen; dann fallen aber die beiden Hüllflächen S und S' zusammen. Für $m = 0$ ist S eine Hypersphäre. W. Klingenberg.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Vidal Abascal, E.: Der Begriff der Geometrie und der geometrische Raum. Die Revision des Erlanger Programmes. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 12, 340—368 (1952) [Spanisch].

A survey of different directions in which the differential geometry has developed in the last thirty years. After historical remarks about the work of Cartan, Schouten, Veblen in order to enlarge the contents of Klein's Erlangen Program, the author exposes the modern ideas referring to spaces with a connexion, homogeneous spaces and fibre bundles. L. A. Santaló.

Botella Raduán, F.: Zur Besprechung dreier Noten über einige Fragen der Geometrie in einem Riemannschen Raume. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 12, 229—233 (1952) [Spanisch].

L'A. discute les réferats donnés par Maxia et Allendoerfer (*Math. Rev.* 6, 216; 7, 34; voir aussi ce Zbl. 26, 86) de trois notes antérieures [*Revista mat. Hisp.-Amer.* 1, 163—170 (1941); 3, 302—309 (1943); 4, 10—15 (1944)]. L'emploi des notations de Cartan, que les rapporteurs précédents n'utilisent pas, semble avoir donné lieu à cette discussion. A. Lichnerowicz.

Norden, A. P. und M. E. Cypkin: Über eine Korrespondenz zwischen Regelflächen und Kurven eines Riemannschen Raumes. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 86, 23—26 (1952) [Russisch].

Let x_i ($i = 1, \dots, 6$) be the Plücker's coordinates of a line in E_3 . Let u^i ($i = 1, \dots, 4$) be curvilinear coordinates on the hyperquadric Q which represents in the projective space P_5 the lines of E_3 . If l is the distance and φ the angle of two lines, then $d\varphi^2 = p_{ij} du^i du^j$ and $2dl d\varphi = g_{ij} du^i du^j$ define the tensors p_{ij} of rank 2 and g_{ij} of rank 4 (and signature $++--$); the last defines on Q a riemannian metric. Then a covariant differentiation is defined and the corresponding curvature tensor is analyzed. A curve Γ on Q represents a ruled surface S in E_3 and the geometry of Γ (curvature, formulas of Frenet) is related with geometrical properties of S . For instance, the classification of the curves Γ gives rise to a classification of the ruled surfaces S . Several examples are given. L. A. Santaló.

Fernández, Germán: Ein auf Kurven einer Hyperfläche eines Riemannschen Raumes bezüglicher Satz. *Math. Notae* 12—13, 38—47 (1952) [Spanisch].

E. Cartan (*Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2. éd., Paris 1946, p. 227) has given a set of invariants for the curves on a surface of a three dimensional Riemannian space which have at a fixed point P a given tangent, the normal curvature and the geodesic torsion being the first of these invariants. The author generalizes this result to curves on a n -dimensional variety for a $(n + 1)$ -dimensional Riemannian space with a given common set of principal normals at a fixed point P . The result is that these curves have at P the same value of a) normal curvature; b) geodesic torsions τ_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$); c) $2n$ quantities too complicated to be stated here. L. A. Santaló.

Hwang, Cheng-Chung: On the equations of imbedding of a Riemannian space V_n immersed in a V_{n+k} of constant curvature. Sci. Record 5, 24—27 und chines. Zusammenfassg. 23 (1952).

Es werden Abhängigkeiten der Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci für einen n -dimensionalen Unterraum eines $(n+k)$ -dimensionalen Raumes konstanter Krümmung untersucht. Dabei ergibt sich als Hauptresultat: Genügen b_{ij} und T_i^{ab} ($a, b = 1, 2, \dots, k$; $i, j = 1, 2, \dots, n$) den Gaußschen und Codazzischen Gleichungen, so sind die Gleichungen von Ricci eine notwendige Folge, wenn $n \geq 3(k-1)$ ist und für jedes Indexpaar (m, l) wenigstens eine der Matrizen $\begin{pmatrix} (a) & (a) & (a) \\ M_j & M_m & M_l \end{pmatrix}$ den Rang $3(k-1)$ besitzt, wobei $M_j = \begin{pmatrix} (1) & (a-1) & (a+1) & (k) \\ b_{ij} \cdots & b_{ij} & b_{ij} \cdots & b_{ij} \end{pmatrix}$ ist.
W. Barthel.

Petrov, A. Z.: Über Gravitationsfelder. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 179—186 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht die möglichen Typen der sog. Einsteinräume von 4 Dimensionen, d. h. solche, für die der Riccitenor R_{ij} dem Fundamentaltensor g_{ij} proportional ist. Dies Problem führt er zurück auf das der Klassifikation eines Paares von Tensoren $g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ im 6-dimensionalen Raum. Hierbei ist $g_{\alpha\beta}$ als Abkürzung für die Größe $g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{kj}$ gesetzt und $R_{\alpha\beta}$ durch doppelte Überschiebung von R_{ijkl} mit dem Bivektor v^{ij} , also durch $R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = R_{ijkl} v^{ij} v^{kl}$ definiert (über griechische Buchstaben wird von 1 bis 6 summiert). Die Signatur $+++--$ von g_{ij} bewirkt es, daß $g_{\alpha\beta}$ die Signatur $+++---$ besitzt. Unter Berücksichtigung dieser Realitätsverhältnisse ergibt sich, daß von den gemäß der Elementarteilerttheorie vorhandenen Typen der Matrix $(R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta})$ nur 7 in Frage kommen, die einzeln aufgezählt werden.
W. Burau.

Salenius, T.: Das Maß der kürzesten Linien in Kugelschalenräumen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 126, 11 S. (1952).

Es werden Riemannsche Mannigfaltigkeiten M^n ($n \geq 3$) betrachtet, welche dem topologischen Produkt aus der Kreislinie und der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre homöomorph sind. \bar{M}^n sei die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit von M^n . Ein Linienelement aus M^n heißt von der Klasse A , wenn der durch dieses Linienelement bestimmte geodätische Strahl sowie sein Bild in \bar{M}^n keine konjugierten Punkte enthält. Verf. beweist, daß das Lebesguesche Maß der Linienelemente der Klasse A gleich Null ist.
W. Rinow.

Suguri, Tsuneo: The Gauss and Codazzi equations for a subspace immersed in the unitary K_n -connected space. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 7, 29—34 (1952).

Equations de Gauss-Codazzi pour les sous-espaces analytiques d'un espace complexe à metrique hermitienne définie positive.
G. Ancochea.

Suguri, Tsuneo: On normal coordinates in the unitary K_n -connected spaces. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 7, 35—40 (1952).

Au moyen de la connexion unitaire subordonnée à une métrique hermitienne définie positive dans un espace complexe, l'A. définit formellement les géodésiques de l'espace. Dans le cas où il existe des géodésiques analytiques à paramètre réel, l'A. introduit, par analogie avec le cas riemannien, des coordonnées normales. On considère en particulier le cas d'une métrique kaehlerienne.
G. Ancochea.

Jongmans, F.: Relations entre les périodes des formes harmoniques attachées à une variété kählérienne. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 18—23 (1952).

L'A. présente une double généralisation des théorèmes de Hodge-Severi sur les relations entre les périodes des intégrales abéliennes attachées à une variété algébrique (cf. F. Severi, ce Zbl. 20, 36). D'une part, l'existence de telles relations est prouvée pour toute variété kählérienne compacte; d'autre part elles sont établies

non seulement pour les intégrales abéliennes, mais pour toutes les formes harmoniques simples (c. à d. de type et classe déterminés) à l'exception du cas: type = 1/2 degré. Une petite incorrection à la fin du no. 2 a été corrigée par l'A. dans le travail revu ci-dessous. Quant au no. 6, la formulation de la seconde phrase n'est pas claire, et il suit des relations sur le produit scalaire (H. Guggenheimer, ce Zbl. 44, 368) que le cas spécial envisagé est le cas général. Remarque: En remplaçant le produit scalaire par le produit scalaire local [H. Guggenheimer, Tôhoku math. J. 4, 157—171 (1952)] on pourra démontrer les théorèmes en question pour les variétés kählériennes non compactes.

H. Guggenheimer.

Jongmans, F.: Les variétés kählériennes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 345—363 (1952).

Un résumé très lisible de la théorie des formes différentielles sur une variété kählérienne, contenant aussi les résultats du travail revu ci-dessus.

H. Guggenheimer.

Liber, A. E.: Über zweidimensionale Räume mit algebraischer Metrik. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 319—350 (1952) [Russisch].

Verf. nennt solche speziellen 2-dimensionalen Finslerschen Räume, bei denen eine fundamentale Differentialform $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} d\xi^{\alpha_1} \dots d\xi^{\alpha_p}$ ($\alpha_i = 1, 2$) zugrunde gelegt ist, Räume $F_2^{(p)}$. In der vorliegenden Arbeit werden diese Räume tensoranalytisch behandelt, wobei die Invariantentheorie einer binären Grundform p -ten Grades mit von 0 verschiedener Diskriminante, betrachtet in der zentralaffinen Ebene, von Wichtigkeit ist. Das wichtigste Ergebnis der umfangreichen, mit Hilfe der Tensorsymbolik geführten Rechnungen ist die Herleitung eines symmetrischen, affinen Zusammenhangs im $F_2^{(p)}$, der dann zu einer kovarianten Differentiation führt. Es werden insbesondere Bedingungen dafür angegeben, daß $F_2^{(p)}$ „flach“ ist, das bedeutet, daß die Fundamentalförm durch besondere Parameterwahl auf konstante Koeffizienten gebracht werden kann. Es wird auch eine Erzeugungsweise für alle konformen Komitanten angegeben, wobei Formen, die sich nur um einen skalaren Faktor unterscheiden, als nicht verschieden angesehen werden. Räume, bei denen die Grundform nur bis auf einen solchen Faktor bestimmt ist, werden $\mathfrak{F}_2^{(p)}$ genannt. Die Geometrie derartiger $\mathfrak{F}_2^{(p)}$ ist gleichwertig mit der einer euklidischen Ebene E_2 , in der ein Kurven- p -Gewebe ausgezeichnet ist. Der zuvor entwickelte Formelapparat gestattet es dann, die Frage zu beantworten, wann ein derartiger $\mathfrak{F}_2^{(p)}$ äquivalent ist einer euklidischen Ebene mit p Geradenscharen, speziell mit p Parallelbüscheln. Im letzten Paragraphen befinden sich noch einige besondere Entwicklungen zu den Fällen $p = 3$ und 4.

W. Burau.

Tonowoka, Keinosuke: A generalization of Cartan space. J. math. Soc. Japan 4, 134—145 (1952).

Sur une variété différentiable V_n , l'A. se donne une expression de l'aire d'une variété W_k à k dimensions, définie par $x^i = x^i(u^\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$), par une intégrale de la forme $\int_{W_k} F(u^\alpha, x^i, \partial x^i / \partial u^\alpha, \partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta, \partial^3 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma) du^1 \wedge \dots \wedge du^k$. Cette intégrale est naturellement invariante par les transformations des coordonnées (x^i) et les changements des paramètres u^α . Généralisant des travaux de Cartan, Berwald et Okubo, il cherche à construire, à partir de cette donnée, les éléments d'une géométrie locale et introduit à cet effet une variété $F_n^{(3)}$ définie par l'ensemble des quantités $(u^\alpha, x^i, \partial x^i / \partial u^\alpha, \partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta, \partial^3 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma)$. Dans le „cas général“ (un certain nombre de déterminants déduits de F étant supposés non nuls), il construit sur $F_n^{(3)}$ un champ de tenseurs „fondamental“ g_{ij} ; à cet effet, il considère les vecteurs de Synge (qui ne sont pas intrinsèques relativement aux changements de paramètres) et construit à partir d'eux des vecteurs intrinsèques. Dans le même cas général, une différentielle covariante et des dérivées covariantes d'un champ de vecteurs V^i sont obtenues.

A. Lichnerowicz.

Ide, Saburo: On the theory of curves in an n -dimensional space with the metrics $s = \int \{A_i(x, x') x''^i + B(x, x')\}^{1/p} dt$. II. Tensor, n. Ser. 2, 89—98 (1952).

Es werden Kurven betrachtet in einem n -dimensionalen Raum mit einer im Titel angegebenen Metrik, die von Kawaguchi herrührt. Es gibt Vorarbeiten von

Michihiro (1941) und Katsurada (1944) für Spezialfälle mit $n = 2$ und $n = 3$ sowie den ersten Teil dieser Arbeit (Ide, dies. Zbl. 41, 296). Zunächst wird mit Hilfe von Extensoren eine Übertragung festgelegt. Sodann werden Frenet-Formeln für Kurven aufgestellt. Zweck der Arbeit ist namentlich zu zeigen, daß das System der $2n$ Invarianten, die die Raumkrümmung enthalten, mit Hilfe von Kawaguchischen Parametern reduziert werden kann auf ein System, bei dem die Anzahl der Parameter $n - 1$ ist, genau wie in der gewöhnlichen Kurventheorie in V_n .
J. A. Schouten.

Širokov, A. P.: Zu einer Frage über A -Räume. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 195—200 (1952) [Russisch].

Es werden in dieser Note $2n$ -dimensionale Räume mit symmetrischem affinem Zusammenhang betrachtet, der durch zwei Felder von lokalen n -Vektoren V_{i_1, \dots, i_n} und W_{i_1, \dots, i_n} definiert ist. Diese n -Vektoren bestimmen lokale Involutionen, deren Affinor durch $g_i^j = V^{j\alpha_2 \dots \alpha_n} W_{i\alpha_2 \dots \alpha_n} - (-1)^n W^{j\alpha_2 \dots \alpha_n} V_{i\alpha_2 \dots \alpha_n}$ gegeben ist. Es sind dann die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die lokal ausgezeichneten Räume reell oder konjugiert imaginär sind. In beiden Fällen spielt ein symmetrischer Tensor $s_{\alpha\beta}$ eine Rolle, der durch die Bedingung bestimmt ist, daß $g_\alpha^\sigma s_{\sigma\beta}$ antisymmetrisch ist. Durch besondere Koordinatenwahl kann man erreichen, daß $s_{\alpha\beta}$ die Bedingungen $s_{k\tau} = -s_{n+k, n+\tau}$, $s_{k, n+\tau} = -s_{\tau, n+k}$ im ersten, bzw. $s_{k\tau} = s_{n+k, n+\tau}$, $s_{k, n+\tau} = s_{n+k, \tau}$ im anderen Falle erfüllt. Dies führt dazu, durch $X^k = x^k + e x^{n+k}$ ($e^2 = 1$), bzw. $X^k = x^k + i x^{n+k}$ ($i^2 = -1$) duale bzw. komplexe Koordinaten, die Tensoren $A_{k\tau} = s_{k\tau} + e s_{n+k, \tau}$ bzw. $A_{k\tau} = s_{k\tau} - i s_{n+k, \tau}$ und kovariante Ableitungen einzuführen, die diese Tensoren konstant lassen. Im 2. Falle handelt es sich um Räume, die früher von Schouten und bei definitem $s_{\alpha\beta}$ von P. A. Širokov 1925 unter der Bezeichnung „ A -Räume“ betrachtet worden sind. Der indefinite Fall führt zu den sog. geschichteten Räumen von Raševski [s. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 6, 225—248 (1948)].
W. Burau.

Šulikovskij, V. I.: Die Theorie der Netze und einige Fragen der klassischen Differentialgeometrie. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 201—205 (1952) [Russisch].

Durch Dubnow und Norden (s. Norden, Räume mit affinem Zusammenhang, Moskau 1950, dies. Zbl. 41, 502) ist der Begriff des Čebyševschen Vektors für Riemannsche Räume und solche mit allgemeinem affinen Zusammenhang eingeführt worden. In der vorliegenden Note werden nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß es in einem zweidimensionalen Raum mit affinem Zusammenhang ohne Torsion ein Netz B gibt, das mit einem gegebenen Netz A einen vorgeschriebenen Winkel φ hat und gegebenen Čebyševschen Vektor besitzt. In den verschiedenen Spezialfällen gestattet die Lösung dieser Aufgabe Anwendungen auf Fragen der Differentialgeometrie, die aber nur angedeutet werden.
W. Burau.

Atanasjan, L. S.: Signierte Mannigfaltigkeiten spezieller Form im mehrdimensionalen affinen Raume. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 351—410 (1952) [Russisch].

Sei V_m eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen, affinen Raum E_n , gegeben durch: $\tau = \tau(x^1, \dots, x^m)$. In jedem Punkte von V_m seien $k = n - m$ Vektoren $\tilde{\xi}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) so definiert, daß sie und die Vektoren $\tau_i = \partial\tau/\partial x^i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) zusammen linear unabhängig sind. Die „signierenden“ Vektoren $\tilde{\xi}_\alpha$ spannen dann die „signierende“ Ebene Π_k auf, und die V_m wird durch Angabe dieser signierenden Ebenen Π_k „signiert“. Verf. nennt die Signierung „axial“, wenn alle Π_k durch eine feste $(k-1)$ -dimensionale Ebene Π_{k-1} gehen, und (als Grenzfall hiervon) „trivial“, wenn alle Π_k zueinander parallel sind. Mit Hilfe der durch die Ableitungsgleichungen $\tau_{ij} = I_{ij}^\alpha \tau_h + h_{ij}^\alpha \tilde{\xi}_\alpha$, $\tilde{\xi}_\alpha = \beta_{\alpha i}^\lambda \tau_h + \gamma_{\alpha \lambda}^\lambda \tilde{\xi}_\lambda$ der V_m definierten Größen I_{ij}^α wird auf der V_m ein bestimmter affiner Zusammenhang induziert, welcher nur von der Signierung der V_m (d. h. den signierenden Ebenen Π_k), nicht aber von der Wahl der signierenden Vektoren

selbst abhängt. Der zu diesem affinen Zusammenhang gehörende Krümmungstensor R_{ijk}^h drückt sich folgendermaßen aus: $R_{ijk}^h = \overset{*}{h}_{ij} \overset{*}{\beta}_{jk}^h - \overset{*}{h}_{ik} \overset{*}{\beta}_{ij}^h$. Ist speziell $R_{ijk}^h = g_{ij} \delta_k^h - g_{ik} \delta_j^h + \delta_i^h g_{jk} - \delta_j^h g_{ik}$ mit einem beliebigen Tensor g_{ij} , so wird der Zusammenhang „projektiv-euklidisch“ genannt. — Weiter wird die V_m als „ s -ausgeartete Mannigfaltigkeit vom Range r “ bezeichnet, wenn sie aus solchen ∞^r „Erzeugenden“ V_{m-r} besteht, daß die Tangentialebenen an V_m in allen Punkten von V_{m-r} parallel einer Ebene E_s ($n > s \geq m, m > r \geq 0$) sind. Ist hierbei $s = m$, so sind die V_{m-r} eben und die Tangentialebenen längs einer V_{m-r} konstant; eine m -ausgeartete Mannigfaltigkeit vom Range r wird deshalb auch „abwickelbar vom Range r “ genannt. Verf. sucht nun ausgeartete bzw. abwickelbare, signierte Mannigfaltigkeiten mittels des durch die Signierung induzierten Zusammenhangs zu charakterisieren und gelangt mit Hilfe komplizierter tensoralgebraischer Untersuchungen zu folgenden Ergebnissen: 1. Jede nichttrivial signierte V_m in E_n mit $m > n - m$ und $n - m < 5$ von allgemeiner Form (d. h. der zweite Schmiegraum von V_m besitzt maximale Dimension), deren Signierung einen Zusammenhang der Krümmung Null induziert, ist $(n - p)$ -ausgeartet bzw. abwickelbar vom Range r . 2. Jede nichtaxial signierte V_m in E_n mit $m > 5$ und $n - m < 3$ von allgemeiner Form, deren Signierung einen projektiv-euklidischen Zusammenhang induziert, ist ausgeartet bzw. abwickelbar vom Range r . — Hierbei gilt $r \leq p$, wenn p die Maximalzahl linear unabhängiger der Tensoren $\overset{*}{\beta}_i^h$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n - m$) ist.

K. Leichtweiß.

Ržechina, N. F.: Die Theorie des Feldes der lokalen Hypertorsen in X_n . Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 411—430 (1952) [Russisch].

Verf. gibt zuerst eine vollständige Invariantentheorie der Kurven $x^\alpha = l^\alpha(\eta)$ und Hypertorsen $y_\alpha = l_\alpha(\eta)$ im zentralaffinen E_n . Die l^α und l_α erfüllen je eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung, worin das Glied $\overset{1}{\Omega}^{n-1} d^{n-1} l^\alpha / d\eta^{n-1}$ (bzw. $\overset{2}{\Omega}^{n-1} d^{n-1} l_\alpha / d\eta^{n-1}$) vorkommt. Mittels $\overset{1}{\gamma} = 2 \overset{1}{\Omega}^{n-1} / n(n-1)$ (bzw. $\overset{2}{\gamma} = 2 \overset{2}{\Omega}^{n-1} / n(n-1)$) werden kovariante Ableitungen $\overset{1}{V} U^{(m)} = du^{(m)} / d\eta - m \overset{1}{\gamma} U^{(m)}$ (entsprechend $\overset{2}{V} U^{(m)}$) für jede Größe $U^{(m)}(\eta)$ eingeführt, die bei Veränderung des Kurven- (bzw. Torsen-) Parameters mit der m -ten Potenz der Transformationsableitung multipliziert wird, d. h. eine Invariante vom Gewicht m ist. Bis auf Transformationen der zentralaffinen Gruppe erweist sich dann eine Kurve als durch $\overset{1}{\gamma}$ und $n - 1$ Invarianten $w^{(i)}$ der Gewichte $2, \dots, n - 1$ bestimmt. Analoges gilt für Hypertorsen. $s = \int \sqrt{|w^{(n)}|} d\eta$ ist die zentralaffine Bogenlänge, und aus $\overset{1}{V} w^{(n)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n-1)}$ erhält man nach Division mit geeigneten Potenzen von $|w^{(n)}|$ zentralaffine Krümmungen, wozu wieder natürliche Gleichungen gehören. Im § 2 wird dann in jedem Punkt eines Raumes X_n ein lokaler E_n mit darin liegender Hypertorse erklärt. Das ganze Gebilde, ein sog. Hypertorsenfeld, kann man dann als zusammengesetzten Raum $X_{n+(1)}$ auffassen (s. Vagner, dies. Zbl. 41, 298), der durch $y_\alpha = l_\alpha(\xi^\lambda, \eta)$ beschrieben werde. Es gelingt, eine Übertragung der lokalen X_1 durch $d\eta + I_\mu(\xi^\lambda, \eta) d\xi^\mu = 0$ zu definieren, wobei das Objekt I_μ allein durch das Feld bestimmt ist. Alle mit dem Feld zusammenhängenden Größen werden als Kovarianten bezüglich dieser Übertragung ausgedrückt. Es gelingt damit z. B. anzugeben, wann ein Feld „konstant“ ist, d. h. die ξ und η so gewählt werden können, daß die Feldgleichungen nur von η abhängen.

W. Burau.

Hiramatu, Hitosi: On affine collineations in a space of hyperplanes. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, 1—7 (1952).

In a space of hyperplanes a point transformation is said to be a collineation if it transforms each hyperplane into a hyperplane. It is shown that an infinitesimal transformation is an affine collineation if and only if the Lie-derivatives of the components of the affine connection vanish. A necessary and sufficient condition is found in order that the space admits an r -parameter group of affine collineations. If the group of infinitesimal affine collineations has maximum order the space is flat.

J. Haantjes.

Ohkubo, Takeo: Homogeneous contact transformations in a generalized space K_n . Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, 27—40 (1952).

Die Gesamtheit aller Flächenelemente (ξ^α, π_α) einer X_n (Koordinaten ξ^α) bildet eine Mannigfaltigkeit K_n der Dimension $2n - 1$. Eine Funktion $\Pi(\xi, \pi)$, homogen zweiten Grades in π_α , bestimmt in K_n einen Fundamentaltensor $(\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \Pi)$ und eine Übertragung. Eine Berührungstransformation führt Π über in eine Funktion $P(\xi, \pi)$. P bestimmt wieder einen Fundamentaltensor und eine Übertragung. Der Zusammenhang zwischen den zugehörigen Geometrien wird untersucht.

J. Haantjes.

Ispas, C. I.: Les identités de Veblen dans les espaces généralisés. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Mat. Fiz. 4, 533—538 u. russische u. französ. Zusammenfassg. 539, 539 (1952) [Rumänisch].

Dans les espaces à connexion affine ont lieu deux groupes d'identités de Bianchi et de Veblen, qui sont d'ailleurs équivalents, comme l'a montré R. Blum. Dans les espaces généralisés des identités du type Bianchi ont été considérés par Berwald. L'A. montre comment on peut arriver aux identités

$$V_{k,lm}^q \equiv L_{k,lm}^q + L_{m,kl}^q + L_{l,mk}^q + L_{l,kl}^q = 0$$

analogues à celles de Veblen. Les quantités $L_{k,lm}^q$ sont données par les formules

$$L_{k,lm}^q = K_{k,lm}^q - \partial K_{k,lm}^q / \partial x^i + x'^i (\partial K_{k,lm}^q / \partial x'^p) \Gamma_{ji}^p - K_{k,lm}^p \Gamma_{ji}^q - K_{p,kl}^q \Gamma_{ji}^p$$

où $K_{k,lm}^q$ sont les composantes du tenseur de courbure de Berwald. *G. Vranceanu.*

Hlavatý, V.: Embedding theory of a W_m in a W_n . Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 403—438 (1952).

Sun, Jenning T.: Frenet formulas for a subspace W_m in a Weyl space W_n . Bull. Calcutta math. Soc. 44, 75—85 (1952).

I. Die verallgemeinerten Frenet-Formeln für eine eingespannte X_m in L_n beziehen sich auf die Reihe der Krümmungsgebiete der X_m und legen Beziehungen fest zwischen den in diesen und zwischen diesen Gebieten auftretenden Größen. Die Materie ist von verschiedenen Autoren bearbeitet. Für W_m in W_n gab Hlavatý selbst eine vorläufige Erörterung (dies. Zbl. 38, 348), in der er eine ausführliche Behandlung versprach. Dies ist die versprochene Arbeit. § 1 bringt die nötigen Begriffe aus der Geometrie der W_n . In § 2 werden die oskulierenden und normalen Räume eingeführt, und § 3 bringt sodann die Frenet-Gleichungen der W_m mittels der eingeführten F -Übertragung, in bezug auf welche die normalen Räume parallel sind. In dem fünften Paragraphen folgen dann u. a. Eigenschaften der oskulierenden Räume. Der sechste Paragraph arbeitet vor für die im letzten Paragraphen dargestellte Untersuchung, in welcher gezeigt wird, daß sich der innere Kontakt zweier W_m vollständig charakterisieren läßt mit Hilfe der sich aus der F -Übertragung ergebenden F -Krümmungstensoren. Es wird eine zweite Arbeit angesagt, die über Integrabilitätsbedingungen der Frenet-Gleichungen handeln soll. In einer Fußnote berichtet der Verf., daß er 1949 (1919 ist ein Druckfehler!) einem seiner Hörer, Herrn Sun, das Manuskript dieser Arbeit zur Verfügung stellte, und daß Herr Sun nichts Besseres zu tun wußte, als die drei ersten Paragraphen mit kleinen stilistischen Abänderungen und einem von ihm selbst unter des Verf. Leitung gefundenen Theorem (sein Theorem 3.4) als eigene Arbeit im Bull. Calcutta math. Soc. zu veröffentlichen. In der Tat wird kein Kenner daran zweifeln, daß diese in dem bekannten, sehr persönlichen Stil Hlavatýs geschriebene Arbeit von Hlavatý selbst und nicht von einem Herrn Sun herrührt. — II. Diese zweite Arbeit und ihr Herausgeber, Herr Sun, dürften mit obigen Bemerkungen vollständig erledigt sein.

J. A. Schouten.

Petrescu, Şt.: De la classification des espaces à connexion projective P_2 . Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 29—35, russische und französ. Zusammenfassgn. 35—36, 36—37 (1952) [Rumänisch].

On considère la classification des espaces P_2 à connexion projective $\Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bc}^0$ ($b, c = 1, 2$), sans courbure. Si l'espace est à torsion affine non nulle, on peut associer à l'espace une forme de Pfaff invariante et l'on montre que le groupe de transformations de congruences de l'espace peut être réduit à la forme (1) $d\bar{s}^1 = ds^1, d\bar{s}^2 = \alpha ds^1 + \beta ds^2, d\bar{s}^0 = ds^0$ avec deux fonctions arbitraires α, β ou bien au groupe identité ($\alpha = 0, \beta = 1$). Dans le cas (1) l'espace peut posséder un groupe de transformations en lui-même à trois ou à quatre paramètres et cela arrive seulement si l'on peut donner à la connexion la forme canonique $\Gamma_{11}^2 = -\mu x^2, \Gamma_{12}^2 = -1, \Gamma_{11}^0 = \mu$ où μ est une fonction de x^1 ou une constante, les autres composantes de la connexion étant nulles. Quant au groupe de transformations en lui-même de l'espace il est donné dans le cas où μ est constant par les formules (2) $x'^1 = x^1 + c, x'^2 = \beta x^2 + c_1 \tau_1 + c_2 \tau_2$ où β, c_1, c_2, c sont des constantes arbitraires et τ_1, τ_2 sont des fonctions de x^1 , solutions indépendantes de l'équation différentielle $\tau'' + \tau' + \mu \tau = 0$. Dans le cas où μ n'est pas constant, le groupe de l'espace est donné par (2) où $c = 0$. Si le groupe de transformations de congruences de l'espace est le groupe identité,

l'espace possède au plus un groupe de transformations en lui-même à deux paramètres. Dans le cas où la torsion affine T_{bc}^a est nulle mais T_{bc}^0 n'est pas nulle, l'espace P_2 possède au plus un groupe de transformations en lui-même à trois paramètres et le groupe de transformations de congruences de l'espace s'obtient de (1) en posant $\beta = 1$. G. Vranceanu.

Katsurada, Yoshie: Specialization of the theory of a space of higher order. III. On the extended projective and conformal invariants. Tensor, n. Ser. 2, 181—188 (1952).

[Pour la 1^{ère} et 2^{ème} partie v. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. I 11, 190—217 (1950), 12, 29—41 (1951).] Etant donné un espace $P_n(x^1, \dots, x^n)$ à connexion projective Γ_{jk}^i et une courbe $x^i = x^i(t)$ de classe $P \geq M$, en suivant une méthode analogue à celle utilisée par l'A. pour les espaces à connexion affine, on considère ce qu'on appelle l'extension de la connexion sur la courbe

(1) $\Gamma_{\beta\gamma k}^{\alpha i} = \binom{\alpha}{\beta\gamma} \Gamma_{jk}^{i(\alpha-\beta-\gamma)}$ où α, β, γ sont des entiers positifs et où $\binom{\alpha}{\beta\gamma}$ sont les coefficients binomiaux $\alpha!/\beta!\gamma!(\alpha-\beta-\gamma)!$ pour $\alpha \geq \beta + \gamma$; autrement ils sont nuls. Quant à $(\alpha - \beta - \gamma)$ dans le second membre de (1), il signifie dérivation par rapport à t de $\alpha - \beta - \gamma$ fois. — Si dans l'espace d'ordre supérieur (2) $x^i(t), x^{(t)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$ où (M) signifie dérivation de M fois, on considère la famille des courbes auto-parallèles

$$(3) \quad \frac{dx^{(\xi+1)}(t)}{dt} + \Gamma_{\eta j p k}^{\xi i} x^{(\eta+1)j} x^{(k+1)p} = \sum_{\eta=0}^{\xi} \binom{\xi}{\eta} p^{(\xi-\eta)} x^{(1+\eta)i}, \quad (\xi = 0, 1, \dots, M)$$

une autre famille avec des coefficients $\bar{\Gamma}$ représente les mêmes courbes, si les $\bar{\Gamma}$ sont liés à Γ par des formules analogues à celles de Weyl de transformation projective de la connexion. De même on introduit les coefficients de connexion projective de Thomas et l'on considère la loi de transformation des ces coefficients par rapport à une transformation étendue aussi aux éléments linéaires (2) de l'espace. — On donne des règles du calcul différentiel absolu par rapport à ces transformations et l'on introduit l'extenseur de Weyl. On montre ensuite comment on peut étendre les mêmes considérations aux espaces à connexion conforme. G. Vranceanu.

Kawaguchi, Akitsugu: On the theory of non-linear connections. I. Introduction to the theory of general non-linear connections. Tensor, n. Ser. 2, 123—142 (1952).

Nachdem schon H. Friesicke [Math. Ann. 93, 101—118 (1925)], J. A. Schouten [Rend. Circ. mat. Palermo 50, 142—169 (1926)], E. Bortolotti (dies. Zbl. 2, 52), Verf. (dies. Zbl. 8, 34) und andere den Begriff der nicht-linearen Übertragung studiert haben, sollen hier und im folgenden die allgemeine Theorie ausführlich entwickelt und Anwendungen auf Cartan-, Finsler- und allgemeinere Räume gegeben werden. — In jedem Punkt x der Mannigfaltigkeit M_n sei ein linearer Raum $E_N(x)$ gegeben mit einer Basis e_i ($i, j = 1, \dots, N$). Sei v^i ein Vektor der E_N . Die Formen $\omega_i^j(x, v^*)$ ($i = 1, \dots, n$) bilden eine Übertragung für v^i , wenn sie homogen vom Grade 1 in den Komponenten v^i sind und sich bei Basistransformationen $e'_i = a_j^i e_j$ in bekannter Weise transformieren. (Der Stern kennzeichnet einen toten Index.) Dann ist $\delta v^i = dv^i + \omega_i^j(x, v^*) dx^j$ eine kovariante Ableitung. Die Produktregel der Differentiation soll gelten; entsprechend wird die kov. Ableitung eines allgemeinen kontravarianten Tensors erklärt durch $\delta T^{i \dots j} = dT^{i \dots j} + \omega_i^k(x, T^{*j}) dx^k + \dots + \omega_j^k(x, T^{*i}) dx^k$. Die Größe $\omega_{ji}^i = \frac{\partial}{\partial v^j} \omega_i^i(x, v^*)$ ist homogen vom Grade Null in den v^i ; bei linearen Übertragungen ist sie unabhängig von den v^i , der Tensor $\frac{\partial}{\partial v^k} \omega_{ji}^i$ verschwindet dann also identisch. — Die kov. Ableitung eines kovarianten Vektors w_i wird folgendermaßen auf die kontravarianten Indizes gehörenden Übertragungsformen

$\omega_i^j(x, v^*) dx^i$ zurückgeführt: $\delta \omega_i = dw_i - \omega'_{ji}(x, w_*) dx^j$ mit $\omega'_{ji}(x, w_*) = \omega_{ji}^k w_k$; $\omega_{ji}^k(x, w_*) \equiv \omega_{ji}^k(x, \delta_{*j}^{*k} 2w_k) + \delta_j^i \chi_{ji}(x, w_*)$ (nicht summieren über i, j); $\chi_{ji}(x, w_*) \equiv \{\omega_{ji}^k(x, \delta_{*j}^{*k}) - \omega_{ji}^k(x, 2\delta_{[L]i}^{*k} w_k)\}$. Die χ_{ji} heißen alinearity scalars; für eine lineare Übertragung verschwinden sie identisch. Überschieben und Differenzieren sind im allgemeinen nicht vertauschbar: $\delta_j^i \delta(v^i w_j) = \delta(v^i w_j) + T_{ji}^i v^i w_j dx^i$ mit $T_{ji}^i \equiv \omega_{ji}^i(x, v^*) - \omega_j^i(x, w_*)$. Das Verschwinden von T_{ji}^i für allgemeine v charakterisiert die linearen Übertragungen. — Der Fall, daß ein regulärer Fundamentaltensor existiert (d. h. eine Abbildung der kontravarianten auf die kovarianten Vektoren: $v_i = G_i(x, v^*)$ mit $v_i v^i \neq 0$) wird diskutiert, ebenso der Fall, daß der $E_N(x)$ mit der Tangentialmannigfaltigkeit der M_n identifiziert werden kann. — Mit Hilfe der zu v^i gehörenden Formen $\omega_i^j(x, v^*) dx^i$ wird das kovariante Differential δ_v bezüglich v durch $\delta_v w^i = dw^i + w^j \omega_{ji}^i(x, v^*) dx^i$ erklärt; hier kann w selber von v abhängig sein. Die Operation δ_v ist linear, $\delta_v(w + w') = \delta_v w + \delta_v w'$, was für die oben eingeführten Differentiale δ nicht zu gelten brauchte: Im allgemeinen war $\delta v + \delta w \neq \delta(v + w)$. Durch die Einführung der δ_v wird der Anschluß gewonnen an die Finsler- und Cartan-Räume. Den Abschluß bildet eine Anwendung auf Räume mit einem Kurvenelement höherer Ordnung als $E_N(x)$. Hierzu gehören, wenn noch eine geeignete Funktion des Kurvenelements höherer Ordnung zur Längenbestimmung gegeben ist, die Kawaguchi-Räume. W. Klingenberg.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Pogorelov, A. V.: Regularität einer konvexen Fläche mit gegebener Gaußscher Krümmung. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 88—103 (1952) [Russisch].

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Wenn die Gaußkrümmung einer Fläche F überall positiv und als Funktion der äußeren Normalen m -mal differenzierbar ist, dann ist F selber $(m+1)$ -mal differenzierbar. Hierbei ist nach Alexandrov die Gaußkrümmung in einem Punkt P von F unabhängig von Analytizitätsvoraussetzungen als Limes des Verhältnisses der Oberfläche des sphärischen Bildes eines Flächenbereichs zur Oberfläche dieses Bereiches selber definiert, wenn man den Bereich auf P zusammenzieht. Der nicht ganz einfache Beweis des obigen Hauptsatzes beruht, wie gleich am Anfang dargelegt wird, auf folgendem Grundgedanken: Ist $K(n)$ das Krümmungsmaß von F in Abhängigkeit von der Normalen n und $H(n)$ ihre Stützfunktion, so bildet man eine gleichmäßig mit ihren Ableitungen bis zur m -ten gegen $K(n)$ konvergierende Folge $K_i(n)$ und eine gegen $H(n)$ konvergierende Folge $H_i(n)$. Es muß dann die Existenz von Flächen $F_i^{(1)}$ gezeigt werden, deren Krümmungsmaße auf einem Kreise ω der Einheitskugel mit $K_i(n)$ und deren Stützfunktionen auf dem Rande von ω mit $H_i(n)$ übereinstimmen. $\lim_{i \rightarrow \infty} F_i^{(1)}$ ist danach als Fläche nachzu-

weisen, die im Bereich ω mit F zusammenfällt. Für die Durchführung im einzelnen ist vor allem wesentlich der Existenzbeweis für die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $r t - s^2 = \varphi(x, y)$, wobei die positive Funktion $\varphi(x, y)$ für $x^2 + y^2 \leq R^2$ und die Randwerte $\psi(x, y)$ auf dem Rande dieses Kreises vorgeschrieben sind. Der Beweis geschieht im Anschluß an Überlegungen von S. Bernstein, der den Fall $\varphi = \text{const}$ bereits im Jahre 1906 behandelt hatte. Es werden auch Schranken für die Beträge der Lösungsfunktion und ihrer Ableitungen im Innern des Kreises gegeben, und es wird die wichtige Tatsache gezeigt, daß bei k -mal differenzierbarem $\varphi(x, y)$ und stetigem ψ die Lösung $(k+1)$ -mal differenzierbar ist. Nach Lösung dieser Randwertaufgabe, die später auch für einen beliebigen konvexen Bereich anstatt eines Kreises auf der Einheitskugel durchgeführt wird, wird dann die Regularität einer Fläche bewiesen, bei der die Gaußkrümmung als Funktion der Normalen regulär ist. W. Burau.

Pedersen, Flemming P.: On spaces with negative curvature. Mat. Tidsskr. B 1952, 66—89 (1952).

H. Busemann (dies. Zbl. 38, 100) hat den Begriff der nicht positiven Krümmung auf metrische G -Räume verallgemeinert. Verf. belegt durch ein Beispiel, daß dieser Begriff zu eng gefaßt ist, und ersetzt die Busemannsche Definition durch die folgende: Ein G -Raum R heißt von nicht positiver Krümmung, wenn jeder Punkt $p \in R$ eine Umgebung $S(p)$ besitzt, derart daß für je zwei Segmente T_1 und T_2 aus $S(p)$ und $x(t) \in T_1$, $y(t) \in T_2$ die Abstände $x(t)T_1$ und $y(t)T_2$ semikonvexe Funktionen des Parameters t sind. Eine Funktion $f(t)$ heißt dabei nach Verf. semikonvex auf $\langle \alpha, \beta \rangle$, wenn $f(t) \leq \max(f(t_1), f(t_2))$ für $\alpha \leq t_1 < t < t_2 \leq \beta$ gilt. Verf. zeigt nun, daß die meisten Ergebnisse von Busemann erhalten bleiben, wenn man diese Definition der nicht positiven Krümmung zugrunde legt.

W. Rinow.

Wang, Hsien-chung: Two-point homogeneous spaces. Ann. of Math., II. Ser. 55, 177—191 (1952).

Unter einem zweipunktig homogenen Raum, kurz (*)-Raum, versteht Verf. einen metrischen Raum R mit der Metrik d , welcher folgende Eigenschaft besitzt: Zu je zwei Punktepaares (a_1, a_2) , (b_1, b_2) aus R mit $d(a_1, a_2) = d(b_1, b_2)$ gibt es eine Isometrie, die a_1 in b_1 und a_2 in b_2 überführt. Verf. bestimmt sämtliche zusammenhängenden kompakten (*)-Räume R . Zunächst folgt aus der Theorie der topologischen Gruppen, daß die Isometriegruppe G von R eine kompakte Liesche Gruppe und R selbst daher eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist. In R kann eine bez. G invariante Riemannsche Metrik eingeführt werden. Ist die Dimension von R ungerade, so ergibt sich auf verhältnismäßig einfache Weise, daß R homöomorph einer Sphäre oder einem reellen projektiven Raum ist. Ist die Dimension von R dagegen gerade, so ist R homöomorph einer Sphäre, einem reellen projektiven Raum, einem komplexen projektiven Raum, einem projektiven Raum über dem Quaternionenkörper oder der Cayleyschen projektiven Ebene. Alle diese Räume lassen sich mit einer konvexen Metrik versehen, welche die Eigenschaft der zweipunktigen Homogenität besitzt. Da diese konvexen Metriken im gewissen Sinne eindeutig bestimmt sind, so folgt das Ergebnis: Jeder konvexe und kompakte (*)-Raum ist entweder ein sphärischer Raum, ein elliptischer Raum, ein konvexer elliptischer Raum, ein elliptischer Raum über dem Quaternionenkörper oder eine Cayleysche elliptische Ebene. W. Rinow.

Davis, Chandler: The intersection of a linear subspace with the positive orthant. Michigan math. J. 1, 163—168 (1952).

The author proves: If $AP^k = P^n \cap D\{AP^k\}$, then (i) $A'P^n = P^k \cap D\{A'P^n\}$ and (ii) $A'P^n$ is affine isomorphic to the geometric polar (as defined in the paper) of AP^k . Here P^k is the positive orthant of the Euclidean space of k dimensions, A is a $n \times k$ matrix, and $D\{A\}$ is the dimensionality space of A . (For notation and concepts, cf. Activity Analysis of Production and Allocation, New York 1951, Chapters XVII and XVIII by Gale and Gerstenhaber respectively, this Zbl. 45, 97).

S. Vajda.

Vincze, István: Über die Schwerlinie einer geschlossenen, konvexen Kurve. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 679—685, russische und deutsche Zusammenfassgn. 685, 686—687 (1952) [Ungarisch].

Soit C une courbe convexe fermée dans le plan. Notons par L sa longueur, par T l'aire du domaine limité par C , et par d , D la largeur et le diamètre de C . Les points de bissections des cordes, dont la direction passe par un point donné P , décrivent une courbe (Schwerlinie); nous notons par $l(P)$ sa longueur; si elle est fermée, $t(P)$ désigne l'aire du domaine limité par cette courbe. Soit en outre $l(\varphi)$ la limite de $l(P)$, quand P s'éloigne à l'infini dans la direction φ . Une proposition élémentaire concernant les quadrilatères donne les inégalités suivantes: $D \leq \max l(\varphi) < L/2$, $t(P) \leq T/4$, $\min t(P) < d^2 \pi/8$.

I. Fényi.

Hadwiger, H.: Einfache Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung für abgeschlossene Punktmengen. Math. Ann. 124, 158—160 (1952).

Kurzer Beweis der Tatsache, daß die untere Minkowskische Oberfläche einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge im euklidischen Raum E_n nicht kleiner sein kann als die Oberfläche einer Kugel gleichen Volumens. Dabei wird der Beweis des Kugelungstheorems so gefaßt, daß er eine Abschätzung der Anzahl der Symmetrisierungen nach oben mitliefert, worauf der Verf. besonderes Gewicht legt. Wie Verf. weiter dem Ref. brieflich mitteilt, bedauert dieser, die weitgehende Übereinstimmung des Inhalts dieser Note mit einem dem Verf. vor Abfassung seiner Arbeit schon aus der Korrektur wohl bekannten und von ihm im Zentralblatt referierten Beweis des Ref. (dies. Zbl. 33, 399) nicht stärker hervorgehoben zu haben. — Auf die besonders wichtige Frage des Eintritts des Gleichheitszeichens in der isoperimetrischen Ungleichung wird nicht eingegangen.

A. Dinghas.

Hadwiger, H.: Einige neue Ergebnisse über extremale Rotationskörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 38—52 (1952).

Im k -dimensionalen euklidischen Raum wird die Klasse \mathfrak{R} der konvexen Rotationskörper A mit dem festen Aquatorradius a betrachtet. Bedeutet ω_k das Volumen der k -dimensionalen Einheitskugel, dann gilt für die Minkowskischen Quermaßintegrale W_ν ($0 \leq \nu \leq k$) der Körper A aus \mathfrak{R}

$$(1) \quad W_\nu \geq (\nu \omega_{k-1} \omega_\nu / k \omega_{\nu-1}) a^{k-\nu},$$

wobei das Gleichheitszeichen für die $(k-1)$ -dimensionale Kugel vom Radius a gilt. Jeder der Ungleichung (1) genügende Wert von W_ν definiert sodann eine Klasse $\hat{\mathfrak{R}}(W_\nu)$, in der für $\nu < \mu$ ein konvexer Rotationskörper mit extremalem Quermaßintegral W_μ enthalten ist. Für jede Klasse $\hat{\mathfrak{R}}(W_\nu)$ wird eine Ungleichung $W_\mu \leq X_{\nu\mu}(a; W_\nu)$ ($\nu < \mu$) aufgestellt, in der das Gleichheitszeichen für den extremalen Körper gilt. Für eine von a, ν, μ abhängige Grenze $G(a, \nu, \mu)$ und $W_\nu \geq G(a, \nu, \mu)$ erweist sich der extremale Körper als der in $\hat{\mathfrak{R}}(W_\nu)$ enthaltene Kegel und für $W_\nu \leq G(a, \nu, \mu)$ als der in $\hat{\mathfrak{R}}(W_\nu)$ enthaltene Zylinder. Im Grenzfall sind beide Körper extremal; es handelt sich dann um diejenigen Kegel und Zylinder, welche bei gleichem Aquatorradius a in den beiden Quermaßintegralen W_ν und W_μ übereinstimmen.

R. Inzinger.

Hlawka, Edmund: Über eine Klasse von mehrfachen Integralen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 53—69 (1952).

B sei ein konvexer Körper im E_m , dessen Rand durch gleichsinnig parallele Stützebenen eindeutig auf den Rand der Einheitskugel abgebildet wird. Bei der Frage nach der Zahl der Gitterpunkte in B treten, ebenso wie bei physikalischen Problemen, z. B. bei der Behandlung von Beugungserscheinungen an einer Scheibe B , die Integrale $G = \int_B e^{ix\iota} dx$ auf, worin $x\iota$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren x und ι und dx das Volumelement bedeuten. Mit Hilfe der Methode der stationären Phase kann für G eine für große $|x|$ gültige asymptotische Entwicklung gefunden werden, deren erstes Glied Verf. angibt, nachdem er für $m = 2$ und Bereiche B mit Mittelpunkt die volle Entwicklung ausführlich hergeleitet hat. Das bei $m > 2$ angewandte Verfahren schildert er an einem etwas anderen Integral, das in der Theorie der statistischen Verteilungsfunktionen auf konvexen Körpern auftritt. Ist $f(x)$ die Distanzfunktion von B , Φ eine Riemann-integrierbare Funktion, so spielt auch das Integral $\int_B \Phi(f(x)) e^{ix\iota} dx$ in den

Anwendungen eine Rolle. Es läßt sich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen auf das Integral $G_1 = \int_B (m + ix\iota) e^{ix\iota} dx$ zurückführen, für welches das erste Glied der asymptotischen Entwicklung gegeben wird. Für $\Phi(f) = (1 - f^2)^\delta$ führt allerdings ein Kunstgriff schneller zum Ziel. Die allgemeine Methode wird für $\Phi = e^{-f^2}$ angewandt. Als Anwendung wird gezeigt: Ist $0 < q < \frac{(m-1)}{2}$, $\Phi \geq 0$, $\int_0^T |\Phi(x)| r^{m-1} dr < A \cdot T^q$ mit geeignetem A , und

$$\lim_{|\iota| \rightarrow \infty} |\iota|^q \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{f \leq T} \Phi(f) e^{ix\iota} dx = C q \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{f \leq T} \varrho^{q-m} e^{ix\epsilon_i} dx,$$

wobei C eine passende Konstante und ϵ_i der Einheitsvektor mit der Richtung von ι ist, so ist

$\lim_{T \rightarrow 0} T^{-q} \int_0^T \Phi(r) r^{m-1} dr = C$. Dieser Taubersche Satz wurde für die Kugel von Cheng gezeigt.

Als weitere Anwendung wird eine Formel abgeleitet, die auf die Kugel angewandt, in der Bochnerschen Theorie der Summierung Fourierscher Reihen durch sphärische Mittel eine Rolle spielt (dies. Zbl. 15, 157) und mit deren Hilfe es Verf. für möglich hält, diese Theorie zu verallgemeinern. (Siehe auch Hlawka, dies. Zbl. 36, 309.)

G. Lochs.

Fast, H. et A. Götz: Sur l'intégrabilité riemannienne de la fonction de Crofton. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 309—322 (1952).

Die Geraden G in der euklidischen Ebene E_2 der Punkte (x, y) seien festgelegt durch folgende Koordinaten p, ϑ : Es sei p der orientierte Abstand von G von $(x = y = 0)$, ferner ϑ der Winkel von G mit der $+x$ -Achse, wobei $0 \leq \vartheta < \pi$. Ist dann K ein Bogen in E_2 und $N = N(p, \vartheta; K)$ die Kardinalzahl des Durchschnittes von K mit $G = G(p, \vartheta)$, so gilt bekanntlich: Es ist N m_2 -meßbar, wenn unter m_2 das 2-dimensionale Lebesguesche Maß in der (p, ϑ) -Ebene verstanden wird; Außerdem ist K rektifizierbar genau dann, wenn N über $Z = [-\infty < p < +\infty, 0 \leq \vartheta < \pi]$ m_2 -summierbar ist. — Man bezeichne nun als singulär diejenigen Punkte von K , in denen mehr als eine Paratingente an K existiert, unter einer Paratingente in $p \in K$ an K jede Limesgerade von Geraden durch zwei gegen p auf K konvergierende Punkte verstanden; außerdem sei m_1 das 1-dimensionale Lebesguesche Maß auf dem (rektifizierbaren) Bogen K . — Es wird gezeigt: (I) Ist S die Menge der singulären Punkte des einfachen Bogens K und $U(K)$ die Menge der Unstetigkeitspunkte von $N(p, \vartheta; K)$ in der (p, ϑ) -Ebene, so folgt $m_2(U(K)) = 0$ aus $m_1(S) = 0$. Ist $m_1(S) > 0$, so auch $m_2(U(K)) > 0$. — (II) Aus (I) ergibt sich: Bei Beschränktheit $N(p, \vartheta; K)$ ist $m(S) = 0$ notwendig und hinreichend für die Riemann-Integrierbarkeit von $N(p, S; K)$.

Otto Haupt.

Chamard, Lucien: Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe. Gaz. Mat., Lisboa 13, 1—3 (1952).

Définitions et notations. E : ensemble fermé de l'espace euclidien à trois dimensions. $\varrho = \varrho(M)$: distance d'un point M variable à E . $\omega(M)$: ensemble des points P de E (projections) à distance ϱ de M . Point de multifurcation: point M admettant au moins deux projections sur E . $\Phi(M)$: ensemble des rayons MP (projetantes). Mx : demi-droite issue de M extérieure à $\Phi(M)$. φ : distance angulaire de Mx à $\Phi(M)$. I_{Mx}^φ : cône d'appui de $\Phi(M)$ d'axe Mx (et de demi-angle

au sommet φ). Théorèmes. (1) Si M_1, \dots, M_n, \dots est une suite de points convergeant vers M suivant Mx , $M_1x_1, \dots, M_nx_n, \dots$ une suite de rayons (demi-droites) telle que $M_nx_n \in \Phi(M_n)$, pour $n = 1, 2, \dots$, et convergeant vers un rayon MA , alors $MA \in I_{Mx}^\varphi \cdot \Phi(M)$. Inversement si MA est un rayon quelconque de $I_{Mx}^\varphi \cdot \Phi(M)$, il existe une suite $M_1x_1, \dots, M_nx_n, \dots$ du type précédent convergeant vers MA . (2) La dérivée de $\varphi(M)$ dans la direction Mx , dont l'existence a été établie par R. de Misès (ce Zbl. 17, 426) est $= -\cos \varphi$. (3) Si M est un point de multifurcation à partir duquel $\varphi(M)$ puisse croître, M' le point sur la sphère de centre M et de rayon $\delta > 0$ à distance maximale de E , pour δ suffisamment petit, M' est point de multifurcation. — Les démonstrations font appel à l'acquiescement visuel du lecteur. La version du Théorème 3 ici donnée correspond à ce que le rapporteur croit avoir compris à l'aide de la „démonstration“. L'étude de la fonction $\varphi(M)$ dans le cas d'un ensemble plan se trouve dans la note du rapporteur, Revue Sci. 77, 493—496 (1939); les méthodes employées s'appliquent au cas d'un espace euclidien de dimension quelconque.

Chr. Pauc.

Vidal Abascal, E.: Über die Grundlagen der Integralgeometrie. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 290—310 (1952) [Spanisch].

„Die Integralgeometrie, deren Entwicklung und Verallgemeinerung man Blaschkes Schule verdankt, ist neuerdings durch S. S. Chern mit der Gruppentheorie und der Lehre von den Differentialformen in Verbindung gebracht worden. So erscheint die Integralgeometrie als Bestandteil der Differentialgeometrie im Großen, deren Zusammenhang mit der Topologie immer deutlicher wird. Solche Zusammenhänge werden hier geklärt durch den Vergleich der Dichten in der Integralgeometrie mit den Integralinvarianten von E. Cartan und de Rham, woraus sich einige Ergebnisse folgern lassen“.

W. Blaschke.

Topologie:

Johansson, Ingebrigt: Present-day topology. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 55—60 (1952).

Kurzer, auch für Nicht-Topologen verständlicher Bericht über die Stellung der Topologie innerhalb der modernen Mathematik.

H. Seifert.

Lorenzen, Paul: Über den Mengenbegriff in der Topologie. Arch. der Math. 3, 377—386 (1942).

Verf. klassifiziert mathematische Theorien in „elementare“ und „nicht-elementare“, je nachdem sie im Prädikatenkalkül der ersten Stufe formalisierbar sind oder nicht. Was die mengentheoretische Topologie anlangt, so scheint der Name auf „Verwendung des Mengenbegriffs“ hinzudeuten, und das kommt — nach Ansicht des Verf. — technisch auf die Verwendung gebundener Prädikatenvariabler hinaus. Demgemäß hätte die mengentheoretische Topologie ab initio nicht-elementaren Charakter. Verf. will demgegenüber einen Teil der Theorie der Umgebungsräume als elementar abgrenzen. Um die bekannte Definition der abgeschlossenen Hülle und des offenen Kerns mittels Umgebungen elementar zu machen, faßt Verf. die Umgebungen nicht als Teilmengen des Raumes R , sondern als neue Objekte, als Elemente u einer Menge B , der „Basis“, auf. Zwischen R und B soll eine binäre Relation ι (mit anderen Worten: eine Teilmenge von $R \times B$) gegeben sein; $P \iota u$ wäre zu interpretieren: u ist eine Umgebung des Punktes P . Benutzt man die vom Ref. [Math. Nachr. 10, 197—232 (1953)] ausgebaute relationentheoretische Symbolik, so kann man die vom Verf. angegebene Definition der abgeschlossenen Hülle \bar{M} einer Menge $M \subseteq R$ einfach so schreiben: $\bar{M} = \iota^{-1} \iota(M)$. (Dabei ist wie üblich $\iota(M)$ das durch ι vermittelte Bild von M , ι^{-1} die zu ι inverse (converse) Relation, und $\iota^{-1} \iota(M)$ entsteht aus $\iota^{-1} \iota(M)$ durch zweifache Komplementbildung: $\iota^{-1} \iota(M) = R - \iota^{-1} (B - M)$). Dual definiert Verf. den offenen Kern \underline{M} . Ohne eine Voraussetzung über ι erfüllt der Operator $M \rightarrow \bar{M}$ bereits die üblichen Axiome eines Hüllenoperators (closure operator), also einen Teil der Axiome von Kuratowski. Nach einer Aufzählung der üblichen Trennungsaxiome folgt ein im Sinne des Verf. elementarer Beweis des Urysohnschen Einbettungssatzes. Die Einführung des Kompaktheitsbegriffes — damit schließt die Note — macht nicht-elementare Hilfsmittel erforderlich.

J. Schmidt.

Hashimoto, Hiroshi: On some local properties on spaces. Math. Japonicae 2, 127—134 (1952).

In einem beliebigen topologischen Raum wird die Menge $D(X)$ aller Punkte des Raumes untersucht, in denen X nicht von erster Kategorie ist (X eine beliebige Menge des Raumes).

G. Nöbeling.

Moise, Edwin E.: A remark on \mathfrak{Q}^* -spaces. Michigan math. J. 1, 79—80 (1952).

An \mathfrak{Q}^* -space (C. Kuratowski, Topologie I, 2. ed., Warszawa 1948, this Zbl. 41, 96) is topologised by means of convergence of certain sequences, the convergence scheme satisfying the star-condition. An example is constructed of two \mathfrak{Q}^* -spaces X and Y which are both Hausdorff spaces such that, for the Cartesian product set $X \times Y$, the product topology is not derivable from any star convergence scheme; but when the set $X \times Y$ is made an \mathfrak{Q}^* -space using componentwise convergence this space is discrete but has not the product topology. V. S. Krishnan.

Barbalat, I.: Limites multiples dans un espace uniforme. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 311—315, russische und französ. Zusammenfassgn. 315—316, 316—317 (1952) [Rumänisch].

L'A. démontre plusieurs propriétés concernant les limites suivant un filtre produit. Soient E_1, E_2 deux ensembles filtrés par les filtres F_1, F_2 ; f une application de $E_1 \times E_2$ dans un espace régulier F ; φ_{x_1} l'application partielle $x_2 \rightarrow f(x_1, x_2)$. Alors, si $\lim f = a$ et si l'adhérence $A_{\varphi_{x_1}}$ du filtre $\varphi_{x_1}(F_2)$ n'est pas vide, pour $x \in A_1 \in F_1$, la limite de $x_1 \rightarrow y$ (où $y \in A_{\varphi_{x_1}}$) existe et égale a . La fonction f est dite uniformément oscillante, relativement à une partie $M \subset E_1$ rencontrant F_1 , si pour tout entourage V et pour toute partie N du filtre induit $(F_1)_M$, il existe $P \in F_2$, tel que $f(x_1, x_2) \in V(A_{x_1})$, si $(x_1, x_2) \in (N \cap A_1) \times P$. L'A. en tire une condition nécessaire et suffisante, afin que $\lim f$ existe. — Si $E_1 \times E_2$ sont

deux espaces topologiques, f une fonction réelle définie sur $E_1 \times E_2$ et $\underline{z}(x) = \liminf_{y \rightarrow b} f(x, y)$, $\bar{z}(x) = \limsup_{y \rightarrow b} f(x, y)$, il résulte que $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ existe, lorsque

et seulement lorsqu'il existe un voisinage V_a , tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un voisinage $V_b(\varepsilon)$, tel que $\underline{z}(x) - \varepsilon < f(x, y) < \bar{z}(x) + \varepsilon$, pour $(x, y) \in V_a \times V_b(\varepsilon)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \underline{z}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \bar{z}(x)$. A. Froda.

Nagata, Jun-iti: On uniform homeomorphism between two uniform spaces. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 3, 9—13 (1952).

This paper is an interesting refinement of another by the same author (see this Zbl. 47, 419). The author had established in it the following theorem: In order that two complete uniform spaces R_1 and R_2 are uniformly homeomorphic, it is necessary and sufficient that two lattices of uniform bases, $L(R_1)$ and $L(R_2)$ satisfying certain conditions be lattice-isomorphic. This theorem made it easy to prove six corollaries, the first four of them being about the characterization of the uniform topology of a complete uniform space by a lattice of uniform bases subject to certain conditions. In the paper under review the same theorem is established but the proof is simplified by replacing the second condition (2) of the previous paper by a weaker one. The first four corollaries of the previous papers are, to slight changes in their enunciation, found in this paper, with proofs in agreement with the weaker condition introduced in the demonstration of the theorem. C. Racine.

Nakamura, Masahiro: Uniform space having volume. Math. Japonicae 2, 193—194 (1952).

Ein Volumen φ in einem uniformen Raum S mit dem Nachbarschaftsfilter \mathfrak{U} [filtre des entourages; vgl. N. Bourbaki, Topologie générale (Paris 1940, dies. Zbl. 26, 431), insbesondere Chap. II] sei eine im Bereich der offenen Mengen von S definierte monotone und additive Funktion, die für jedes $A \in \mathfrak{U}$ und jedes x und y aus S der Gleichung $\varphi(A(x)) = \varphi(A(y))$ genügt und bei der $\varphi(A(x))$ für jedes A positiv und für mindestens ein A endlich ist. Als Verallgemeinerung eines Satzes von A. Weil über invariante Maße in topologischen Gruppen wird aus der Existenz eines solchen Volumens gefolgert: Es gibt ein $B \in \mathfrak{U}$, so daß zu jedem $u \in S$ und jedem $C \in \mathfrak{U}$ endlich viele Elemente x_1, \dots, x_n aus S existieren, deren Umgebungen

$C(x_i)$ zusammen die abgeschlossene Hülle von $B(u)$ überdecken, d.h. S ist lokal präkompakt. K. Krickeberg.

Saito, Shiroshi: Retracts in the locally compact Hausdorff spaces. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 6, 157—166 (1952).

As a modification of Tietze's extension theorem it is proved that for every real valued continuous function defined on a compact subset of a locally compact Hausdorff space R there exists a continuous extension defined over whole R . This theorem enables the author to extend the definitions of absolute retracts and absolute neighbourhood retracts to the locally compact Hausdorff spaces. It is proved that many of the properties of absolute retracts and of absolute neighbourhood retracts hold (with slight modifications) in the so generalized case. Instead of Hilbert cube, which plays a role in the usual theory of retracts, the author uses the Tychonoff cube. The author observes that the generalization of the theorem concerning the sum of absolute retracts required some supplementary restrictions. This generalization is proved only for so called weakened absolute retracts. K. Borsuk.

Hanner, Olof: Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces. Ark. Mat. 2, 315—360 (1952).

Q désigne l'une quelconque des classes suivantes d'espaces topologiques séparés: α) complètement réguliers, β) normaux, γ) „collectionwise“ normaux, δ) paracompacts, ϵ) Lindelöf, i. e. réguliers dont tout recouvrement ouvert admet un raffinement dénombrable, ζ) compacts, η) métriques, θ) métriques séparables, ι) métriques compacts. Un espace X est un $AR(Q)$ ($ANR(Q)$) si X est un rétracte (de voisinage) de tout espace de classe Q dont X est une partie fermée. Un espace X est un $ES(Q)$ ($NES(Q)$) si toute application continue d'un fermé B d'un espace Y de classe Q dans X admet un prolongement sur Y (sur un voisinage de B dans Y) à valeurs dans X . Un espace est un $NES(Q)$ local si chacun de ses points possède un voisinage qui soit un $NES(Q)$. — Théorèmes: Soit $Q \subset \beta$; tout $AR(Q)$ ($ANR(Q)$) est un $ES(Q)$ ($NES(Q)$) et tout espace paracompact X est un $AR(Q)$ si et seulement si X est un $ANR(Q)$ contractile en soi. Soit X un $AR(\eta)$ ($ANR(\eta)$); si X est un $AR(\delta)$ ($ANR(\delta)$), X est un G_δ absolu; si X est un G_δ absolu, il est un $AR(\gamma)$ ($ANR(\gamma)$); X est un $AR(\beta)$ ($ANR(\beta)$) si et seulement si X est un G_δ absolu séparable; X est un $AR(\alpha)$ ($ANR(\alpha)$) si et seulement si X est compact (séparable et localement compact). Si $Q \subset \delta$, tout $NES(Q)$ local est un $NES(Q)$; si $Q \subset \gamma$, tout $NES(Q)$ local paracompact est un $NES(Q)$; si $Q \subset \beta$, tout $NES(Q)$ local Lindelöf est un $NES(Q)$. Tout polyèdre simplicial infini muni de la topologie faible (J. H. C. Whitehead, ce Zbl. 40, 387) ou de la topologie métrique (S. Lefschetz, Topics in Topology, Princeton 1942) est un $NES(\eta)$. Quelques généralisations aux espaces étudiés des propositions concernant le prolongement des applications homotopes, terminent l'article. T. Ganea.

Dowker, C. H.: On a theorem of Hanner. Ark. Mat. 2, 307—313 (1952).

Satz 1: Ein metrischer Raum ist dann und nur dann ein absoluter (Umgebungs-) Retrakt normaler Räume, wenn er separabel, absoluter G_δ und absoluter (Umgebungs-) Retrakt metrischer Räume ist. Satz 2: Ein metrischer Raum ist dann und nur dann ein absoluter (Umgebungs-) Retrakt „collectionwise“ normaler Räume, wenn er absoluter G_δ und absoluter (Umgebungs-) Retrakt metrischer Räume ist. Zwei Korollare werden noch abgeleitet; das erste bildet eine Übertragung des Tietzeschen Erweiterungssatzes für normale Räume auf „collectionwise“ normale Räume; nach dem zweiten stimmen die metrischen absoluten Umgebungsretrakte „collectionsweise“ normaler perfekt normaler Räume mit denjenigen metrischer Räume überein. Ergebnisse von O. Hanner (dies. Zbl. 42, 411) und R. H. Bing (dies. Zbl. 42, 413) werden in der Arbeit benutzt. T. Ganea.

Ganea, Tudor: Remark on R -equivalent spaces. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 295—297 (1952).

Two spaces A and B are said to be R -equivalent provided that there exists a homeomorphism f mapping B onto a retract of A and a homeomorphism g mapping A onto a retract of B . The following problem has been submitted by the reviewer: Are two R -equivalent ANR -spaces A and B necessarily of the same homotopy type? The author gives an affirmative answer to this problem under the additional hypothesis that the homeomorphism $\varphi = fg$ mapping the space A into itself has equivalent continuous positive powers. K. Borsuk.

Stone, A. H.: On infinitely multicoherent spaces. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 298—306 (1952).

Vgl. A. H. Stone, dies. Zbl. 34, 397 und 40, 398. Verf. behandelt die Frage, wann für einen zusammenhängenden, topologischen Raum S mit $r(S) = \sup b_0(A \cap B) = +\infty$ der Wert $r(S)$ erreicht wird, d. h. wann zwei abgeschlossene, zusammenhängende Mengen A und B mit $A \cup B = S$ und $b_0(A \cap B) = +\infty$ existieren. Er zeigt, daß $r(S)$ erreicht wird, wenn S ein eindimensionaler Peano-Raum ist. Hingegen gibt er einen zweidimensionalen Peano-Raum S an, für welchen $r(S)$ nicht erreicht wird.

G. Nöbeling.

Grzegorzcyk, A. and C. Kuratowski: On Janiszewski's property of topological spaces. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 169—182 (1952).

Ein topologischer Raum E genügt der Janiszewskischen Bedingung, falls der Durchschnitt je zweier zusammenhängenden, abgeschlossenen Teilmengen F_0, F_1 , zusammenhängend ist, wenn dasselbe für $E - (F_0 \cup F_1)$ gilt. Für solche Räume, die noch normal und im kleinen zusammenhängend sind, wird folgendes bewiesen: Sind A_0, A_1 , offene oder abgeschlossene Teilmengen von E und ist $E - (A_0 \cup A_1)$ zusammenhängend, so ist der Durchschnitt $S_0 \cap S_1$ je zweier Komponenten S_j von A_j selbst zusammenhängend. Verf. zeigen noch die Gleichwertigkeit dieser Behauptung, wo A_0 und A_1 offen gewählt werden, mit dem ersten Janiszewskischen Satze: Sind F_0, F_1 abgeschlossene Mengen mit zusammenhängendem Durchschnitt, so wird der Raum E zwischen den Punkten a und b von der Vereinigung $F_0 \cup F_1$ nicht zerlegt, wenn dasselbe für jede einzelne Menge F_j gilt.

T. Ganea.

Whyburn, G. T.: On k -fold irreducibility of mappings. Amer. J. Math. 74, 910—912 (1952).

Eine (eindeutige, stetige) Abbildung f einer kompakten Menge A eines separablen metrischen Raumes auf eine Menge B eines separablen, metrischen Raumes heiße mindestens k -fach (k positiv ganz), wenn für jeden Punkt y von B das Urbild $f^{-1}(y)$ mindestens k Punkte enthält. f heiße irreduzibel k -fach auf einer abgeschlossenen Menge $X \subseteq A$, wenn für jedes $y \in B$ der Durchschnitt $X \cap f^{-1}(y)$ mindestens k Punkte enthält und für jede abgeschlossene Menge $X' \subset X$ mindestens ein $y \in B$ existiert, so daß $X' \cap f^{-1}(y)$ höchstens $k-1$ Punkte enthält. I. Ist f mindestens k -fach, so ist f irreduzibel k -fach auf A dann und nur dann, wenn die Menge aller $x \in A$, für welche $f^{-1}(f(x))$ aus genau k Punkten besteht, in A dicht ist. II. Ist f mindestens k -fach und $f^{-1}(y)$ endlich für jedes $y \in B$, so existiert eine abgeschlossene Teilmenge A' von A derart, daß f , nur auf A' betrachtet, eine irreduzibel k -fache Abbildung von A' auf B ist. (Vgl. G. T. Whyburn, dies. Zbl. 22, 410.)

G. Nöbeling.

Anderson, R. D.: On monotone interior mappings in the plane. Trans. Amer. math. Soc. 73, 211—222 (1952).

On sait qu'il existe une représentation ouverte (intérieure au sens large) d'un continu uni-dimensionnel sur un continu bi-dimensionnel (A. Kolmogoroff, ce Zbl. 16, 81) et même d'une courbe continue uni-dimensionnelle sur un rectangle plan (Kadan, ce Zbl. 29, 323). L'A. démontre les deux propositions suivantes fournissant des résultats complémentaires sur ce genre de représentations: (I) il existe une représentation monotone ouverte f du plan sur lui même telle que, si x est un point quelconque du plan, $f^{-1}(x)$ n'est jamais un continu dégénéré et (II) il existe une représentation monotone ouverte d'une courbe continue plane uni-dimensionnelle sur le plan entier. — Les raisonnements de l'A. exigent l'introduction d'un certain nombre de notions auxiliaires dont la définition ne saurait trouver place ici. Il s'agit essentiellement de couvrir le plan de continus compacts et dis-joints, dont aucun ne sépare le plan et qui constituent une collection supérieurement et inférieurement continue. L'application de théorèmes de R. L. Moore (Foundations of point set theory, New York 1932, ce Zbl. 5, 54) conduit ensuite aux énoncés ci-dessus.

S. Stoilow.

Anderson, R. D.: Monotone interior dimension-raising mappings. *Duke math. J.* 19, 359—366 (1953).

Verf. zeigt die Existenz eines kompakten, eindimensionalen Kontinuums K des Euklidischen E_3 und einer monotonen, inneren (interior) Abbildung von K auf den Hilbertschen Fundamentalquader. *G. Nöbeling.*

Wang, Hsien-Chung: A remark on transformation groups leaving fixed an end point. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 548—549 (1952).

Let G be a transformation group of an arcwise connected, Hausdorff space X leaving fixed an endpoint e of X . Then G has no other fixed point if and only if, given any neighborhood U of e , the orbit $G(U)$ under G coincides with the whole space X . This implies a positive answer to a question raised by Wallace (this Zbl. 41, 517): If G is compact, it has obviously a fixed point $x \neq e$. *I. Fáry.*

Bing, R. H.: Partitioning continuous curves. *Bull. Amer. math. Soc.* 58, 536—556 (1952).

This is a survey of methods, results and problems centering around the notion of partitioning of a continuous curve, introduced by the author. A partitioning of a continuous curve M is a finite collection G of mutually exclusive connected open subsets of M whose sum is dense in M . The first step of constructing partitionings of M is to prove the following result. If H and K are mutually exclusive closed subsets of M , there are two disjoint open subsets D_H and D_K of M containing H and K respectively such that each of them has property S and $M = \bar{D}_H \cup \bar{D}_K$. For each positive ε there is an ε -partitioning of M , whose elements have property S . Results on partitionings were applied by the author to obtain the following theorem conjectured by Menger: Each continuous curve has a convex metric. As other applications of this method the Kline sphere characterisation, the existence of basis with connected intersections, and a characterisation of 3-space are mentioned. *I. Fáry.*

Katětov, Miroslav: Über die Dimension der nicht-separablen metrischen Räume. *C. r. I. Congr. Math. Hongr.* 1950, 359—360, 361—362 (1952) [Russisch u. Ungarisch].

Plans, Antonio: Über Dimensionsapproximation im Kuratowski-Raum. *Revista Acad. Ci. Madrid* 46, 303—306 (1952) [Spanisch].

Die Beziehung zwischen dem Mengenideal \mathfrak{R} der Teilmengen R eines Kuratowskischen Raumes E mit $E - \bar{R} = E$ und dem System \mathfrak{S} aller übrigen Teilmengen von E , nämlich daß $R \cup S \in \mathfrak{S}$ für $R \in \mathfrak{R}$ und $S \in \mathfrak{S}$, veranlaßt Verf. zu einer Verallgemeinerung der Systeme \mathfrak{R} , \mathfrak{S} und zu darauf bezüglichen Dimensionsvergleichen; was dabei unter „Dimension“ verstanden werden soll, wird leider nirgends gesagt. *G. Aumann.*

Alexandroff (Aleksandrov), P. S.: Dualitätssätze und Dimension. *C. r. I. Congr. Math. Hongr.* 1950, 329—357 (1952) [Russisch].

Dieser im Jahre 1950 gehaltene und durch einige neuere Ergebnisse ergänzte Bericht, der den Untertitel „Übersicht über einige gelöste und ungelöste Probleme der mengentheoretischen Topologie“ trägt, behandelt die Dualitätssätze in der mengentheoretischen Topologie und die Zusammenhänge zwischen Dimensionstheorie und Homologietheorie. Es werden hauptsächlich Ergebnisse sowjetischer Mathematiker und besonders der Moskauer Topologischen Schule berücksichtigt. — Inhalt: § 1. Der Pontrjaginsche Dualitätssatz. § 2. Der Dualitätssatz für nicht-abgeschlossene Mengen. § 3. Die allgemeine Aufgabe der Untersuchung von Homologieeigenschaften der Lage. § 4. Dimension und Dualitätssätze. § 5. Algebraische Probleme der Dimensionstheorie. § 6. Einige Aufgaben, die in den vorhergehenden Abschnitten nicht vorkamen (Dimensionserhöhende Abbildungen, Dimensionsbegriff in normalen Räumen). *E. Pannwitz.*

Larguer, Everett: Homology bases with applications to local connectedness. *Pacific J. Math.* 2, 191—208 (1952).

The author introduces the concept of sequential decomposition of a vector space with respect to a countable sequence of subspaces. With respect to any decomposition a topology is introduced into the vector space. Conditions of metrisability and completeness are given. These are applied to prove the existence of a

fundamental system of r -cycles for any compact G_δ subset of a locally compact space. (R. L. Wilder: *Topology of manifolds*, New York 1949, this Zbl. 39, 396.) Ultimately some of the results of Wilder (this Zbl. 5, 183) concerning the imbedding of a compact subset of a metric space in a locally connected space are partially extended to non-metric cases.

Atuo Komatu.

Steenrod, N. E.: **Reduced powers of cohomology classes.** *Ann. of. Math.*, II. Ser. 56, 47—67 (1952).

L'A. introduit des opérations cohomologiques de degré i , qui appliquent le groupe de cohomologie de dimension q d'un complexe K dans le groupe de cohomologie de dimension $q + i$. (Une opération cohomologique est une opération définie pour tout complexe K et commutant avec l'homomorphisme induit dans le groupe de cohomologie par une application continue d'un complexe en un autre.) Ces opérations sont les puissances $p^{\text{èmes}}$ réduites. Considérant l'application diagonale de K dans la puissance $p^{\text{ème}}$ de K , l'A. associe à la puissance $p^{\text{ème}}$ d'un cocycle de K (modulo un sous-complexe L) une suite d'opérations D_i , définies par récurrence (à partir de l'opération D_0 introduite par Lefschetz pour définir le cup-produit) et dépendant d'une suite d'éléments de l'anneau Γ (à coefficients entiers) du groupe symétrique à p éléments. La réduction i^{e} de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'un cocycle à q dimensions est un cocycle de dimension $pq - i$ (pour un domaine de coefficients convenable, dépendant de la suite d'éléments de Γ); cette opération s'étend aux classes de cohomologie (pour le même domaine de coefficients), et dépend uniquement de la suite d'éléments de Γ (et pas du choix des D_i). — Cette notion généralise celle des „carrés de Steenrod“ (cas $p = 2$) introduits par l'A. (ce Zbl. 30, 416), mais la définition donnée ici est indépendante d'une décomposition simpliciale. — La réduction 0 correspond à la puissance $p^{\text{ème}}$ ordinaire (cup-produit); la réduction i^{e} est nulle pour $i > (p - 1)q$, et (en coefficients entiers) pour $i = (p - 1)q - 1$; pour $i = (p - 1)q$, elle revient à la multiplication par un scalaire (qui dépend seulement de p , q et de la suite d'éléments de Γ); si $q = 1$, la réduction i^{e} est nulle (sauf pour $i = p - 1$); si $q = 2$ (coefficients entiers), la réduction i^{e} est nulle pour i impair, et revient à la multiplication par un scalaire de la puissance $(p - k)^{\text{e}}$ ordinaire (cup-produit) à coefficients convenables, si $i = 2k$. — Lorsque la suite choisie d'éléments de Γ a certaines propriétés, les puissances réduites sont triviales (nulles, ou réductibles à un cup-produit). L'A. établira dans un travail ultérieur que certaines suites (permutations cycliques) définiront des puissances réduites non triviales; l'existence d'opérations cohomologiques non nulles associées à certaines applications permettra d'établir que ces applications ne sont pas homotopes à zéro; en particulier, il en résultera que $\pi_{n+3}(S^n)$ admet un homomorphisme sur un groupe cyclique d'ordre 3 pour $n \geq 3$ (résultat obtenu aussi par J. P. Serre).

Guy Hirsch.

Whitehead, George W.: **Fiber spaces and the Eilenberg homology groups.** *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 38, 426—430 (1952).

L'A. apporte une contribution à un problème (posé par Hurewicz): Si X est un espace connexe, existe-t-il un espace T , fibré avec X pour base, et tel que $\pi_i(T) = 0$ pour $i \leq n$, et $\pi_i(T)$ isomorphe à $\pi_i(X)$ pour $i > n$ (cet isomorphisme étant induit par la fibration)? La réponse est affirmative si T est fibré au sens de J. P. Serre (ce Zbl. 45, 260), plus général que les espaces fibrés habituels. (T sera un espace de chemins.) Cette construction permet l'étude des groupes d'homologie de Eilenberg [groupes d'homologie des sous-complexes singuliers $S_n(X)$ engendrés par les simplexes dont les faces à n dimensions sont appliquées en un point donné]. Il y a un homomorphisme naturel du groupe d'homologie relative $H_q(S_{n-1}(X), S_n(X))$ sur le groupe d'homologie $H_q(\pi_n(X), n)$ du complexe d'Eilenberg-MacLane $K(\pi_n(X), n)$ [espace dont le n^{e} groupe d'homotopie est isomorphe à $\pi_n(X)$, les autres groupes d'homotopie étant nuls]. Cet homomorphisme est un isomorphisme pour $q \leq 2n$, et est sur pour $q \leq 2n + 1$. — Ces résultats ont été obtenus aussi, par une méthode analogue, par Cartan et Serre [v. l'analyse suivante et C. r. Acad. Sci., Paris 234, 393—395 (1952)].

Guy Hirsch.

Cartan, Henri et Jean-Pierre Serre: **Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I. Constructions générales.** *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 288—290 (1952).

Les AA. construisent et étudient des espaces Y , appliqués sur un espace donné X (supposé connexe par arcs), et qui tuent les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ pour $i \leq n$ ($n \neq 0$) [ce qui signifie que $\pi_i(Y) = 0$ pour $i \leq n$ tandis que $\pi_i(Y) = \pi_i(X)$ pour $i > n$, cet isomorphisme étant induit

par l'application de Y sur X]. — Les groupes d'homologie H_j d'un pareil Y [qui sera désigné par $(X, n+1)$] sont isomorphes aux groupes d'Eilenberg $H_j(X; x, n+1)$ [Eilenberg, Ann. of Math., II. Ser. 45, 407—447 (1944)]. [Ce sont les groupes d'homologie du sous-complexe singulier engendré par les simplexes dont les n -faces sont en x ; $H_{n+1}(X; x, n+1)$ est isomorphe à $\pi_{n+1}(X; x)$ pour $n \geq 1$, coefficients entiers.] — On peut construire une suite $(X, 1) \rightarrow X, (X, 2), \dots, (X, n), \dots$, où $(X, n+1)$ tue les $\pi_i(X, n)$ pour $i \leq n$ et est fibré (au sens de Serre, ce Zbl. 45, 260, exigeant seulement le relèvement des homotopies) avec (X, n) pour base; de plus, il y a un espace ayant même type d'homotopie que (X, n) fibré en $(X, n+1)$. La fibre, dans la 1^{ière} fibration, et la base, dans la 2^{ième} fibration, sont des espaces ayant même type d'homotopie respectivement que les complexes $K(\Pi, n-1)$ ou $K(\Pi, n)$ de Eilenberg-MacLane (avec $\Pi = \pi_n(X)$). [Ces espaces s'introduisent ici comme espaces de lacets.] La considération de la suite spectrale (étudiée par Serre, loc. cit.) de ces fibrations fournit des renseignements sur les groupes d'Eilenberg et les groupes d'homotopie de X (étudiés dans une Note ultérieure).

Guy Hirsch.

Serre, Jean-Pierre: Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1243—1245 (1952).

L'A. étudie la cohomologie modulo 2 $H(\Pi; n)$ des complexes $K(\Pi; n)$ d'Eilenberg-MacLane, en considérant $K(\Pi; n)$ comme base d'un espace fibré contractile (l'espace des chemins) dont la fibre (espace des lacets) est un $K(\Pi; n-1)$. Lorsque $\Pi = \mathbb{Z}_2$ (groupe cyclique d'ordre 2) et $n = 1$, l'algèbre de cohomologie est une algèbre de polynômes à un générateur de dimension 1; en considérant cette algèbre comme espace vectoriel sur \mathbb{Z}_2 , on obtient une base en prenant certains i -carrés itérés. Les i -carrés commutant avec la transgression dans les fibrations considérées, on en déduit par récurrence que l'algèbre de cohomologie de $K(\mathbb{Z}_2; n)$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont certains i -carrés itérés. — Il en est de même pour $K(\mathbb{Z}; n)$. Le résultat complet n'est pas indiqué; mais la base de la „partie stable“ $A^q(\mathbb{Z}_2)$ [c'est-à-dire $H^{n+q}(\mathbb{Z}_2; n)$] est liée au nombre des partitions de q telles que $q = i_1 + \dots + i_k$ (i_1 pair), $i_1 \geq 2i_2, i_2 \geq 2i_3, \dots, i_{k-1} \geq 2i_k$. — Une opération cohomologique relative à $\{q, n, A, B\}$ (avec q et n entiers > 0 , A et B groupes abéliens) est une application de $H^q(X, A)$ en $H^n(X, B)$, définie sur tout complexe X et commutant avec l'homomorphisme induit par une application continue. Il y a une correspondance biunivoque entre ces opérations et les éléments du n^{e} groupe de cohomologie (à coefficients dans B) de $K(A; q)$. Il en résulte alors que, en cohomologie modulo 2, toute opération cohomologique est définie par un polynôme (en cup-produit) de i -carrés itérés. En précisant ces i -carrés, on obtient aussi les relations entre i -carrés itérés données par J. Adem (ce Zbl. 48, 17). Ces résultats permettent de calculer $\pi_{n+3}(S_n)$ et $\pi_{n+4}(S_n)$.

Guy Hirsch.

Nakaoka, Minoru: Exact sequences $\Sigma_p(K, L)$ and their applications. J. Inst. Polytech., Osaka City Univ., Ser. A 3, 83—100 (1952).

Sei K ein Komplex, L ein Unterkomplex von K mit $\dim(K - L) \leq n$. Sei p eine ganze Zahl und r die kleinste ganze Zahl $\geq \max(n/2 + 1 - p, 3 - 2p)$. Sei (C, A) die Gruppenfolge

$$C^{r-1} = \pi^{p+r-1}(K^{r-1} \cup L, K^{r-2} \cup L) \xrightarrow{\beta} A^r = \pi^{p+r}(K, K^{r-1} \cup L) \xrightarrow{j} C^r \xrightarrow{\beta} \dots;$$

dabei bezeichnet $\pi^n(X, A)$ die Kohomotopiegruppe von (X, A) (vgl. Spanier, dies. Zbl. 32, 124), β den zugehörigen Korandoperator und j den Einbettungshomomorphismus. Verf. betrachtet die nach dem Verfahren von J. H. C. Whitehead (dies. Zbl. 37, 261) aus (C, A) entstehende exakte Gruppenfolge $\Sigma = \Sigma_p(K, L): \Gamma^r \xrightarrow{i} \Pi^r \xrightarrow{j} H^r \xrightarrow{o} \Gamma^{r+1} \xrightarrow{i} \dots$. Es wird gezeigt, daß $\Sigma_p(K, L)$ eine Invariante des Homotopietypes von (K, L) ist, die für $p = 0$ in die von Spanier (l. c.) betrachtete exakte Folge übergeht. Weiter wird $\Sigma_p(K, L)$ benutzt, um eine Homotopieklassifizierung der Abbildungen gewisser $(n+2)$ -Komplexe in die n -Sphäre S^n durchzuführen [vgl. hierzu die allgemeineren Ergebnisse von J. Adem, dies. Zbl. 48, 170]. Es wird weiter die n -te Kohomotopiegruppe eines A_n^2 -Polyeders K [d. h. $\dim K = n+2$, $\pi_i(K) = 0$ für $i < n$] durch das Kohomologiesystem von K bestimmt und bewiesen, daß zwei A_n^2 -Polyeder dann und nur dann vom gleichen Homotopietyp sind, wenn ihre Spanier-Folgen eigentlich isomorph sind.

E. Burger.

Nakaoka, Minoru: Classification of mappings of a complex into a special kind of complex. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 3, 101—143 (1952).

Verf. beschäftigt sich mit der Frage nach den Homotopieklassen der Abbildungen eines $(n+k)$ -dimensionalen Komplexes $K = K^{n+k}$ in einem Raum Y , dessen Homotopiegruppen $\pi_i(Y)$ für $0 \leq i < n$ und für $n < i < n+k$ verschwinden. Dieses Problem wurde bereits von Eilenberg und MacLane (dies. Zbl. 46, 167) behandelt. Verf. gibt eine Lösung für $k=2$ und $k=3$, wobei Y als endlicher Komplex und $n \geq 4$ vorausgesetzt wird. Die Beweismethode ist analog zu der von Steenrod (dies. Zbl. 30, 416). Es wird zunächst für zwei Abbildungen $f, g: K^n \cup L \rightarrow Y$ ($L =$ Unterkomplex von K), die auf L übereinstimmen und auf $K^{n+1} \cup L$ fortsetzbar sind, die Differenz ihrer zweiten Hindernisse berechnet. Dies geschieht durch Zwischenschaltung gewisser Hilfskomplexe R_i^k , die eine ähnliche Rolle spielen, wie die Komplexe M^n bei Steenrod (l. c.). Es treten im Falle $k=2$ Steenrod-Quadrate und gewisse Modifikationen von ihnen auf, im Falle $k=3$ außerdem die zyklisch reduzierten dritten Potenzen (Steenrod, dies. Zbl. 48, 413) sowie für $n=4$ Pontrjagin-Quadrat und gewöhnliches Cupprodukt. Die Koeffizientenpaarungen sind in allen Fällen besonders zu erklären. Aus dem Erweiterungssatz folgt dann in bekannter Weise der Klassifikationssatz. Für $k=2$ vergleiche man auch noch Shimada-Uehara (folgendes Referat). Es sei noch bemerkt, daß bei der Konstruktion der Hilfskomplexe neuere Resultate über die Homotopiegruppen der Sphären [Serre, C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1243—1245 (1951) und dies. Zbl. 46, 407; Toda, J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ. Ser. A 3, 43—82 (1952)] benutzt werden. Mittels der Hilfskomplexe kann Verf. ferner einige Relationen für die iterierten Steenrod-Quadrate ableiten (vgl. hierzu die allgemeinen Ergebnisse von J. Adem, dies. Zbl. 48, 170).

E. Burger.

Shimada, Nobuo and Hiroshi Uehara: Classification of mappings of an $(n+2)$ -complex into an $(n-1)$ -connected space with vanishing $(n+1)$ -st homotopy group. Nagoya math. J. 4, 43—50 (1952).

Verff. behandeln das Homotopie-Klassifikations-Problem für Abbildungen eines $(n+2)$ -dimensionalen Komplexes K^{n+2} ($n > 2$) in einem Raum Y , dessen Homotopiegruppen $\pi_i(Y)$ für $i < n$ und $i = n+1$ verschwinden. Es wird ferner vorausgesetzt, daß $\pi_n(Y)$ von endlich vielen Elementen erzeugt wird. Entsprechende Erweiterungsprobleme werden auch diskutiert. — Die verwendeten Methoden schließen sich an Steenrod (dies. Zbl. 30, 416) an. Steenrod definierte für einen Komplex K die \cup_i -Produkte von Kozyklen und führte darauf die Homomorphismen $Sq_i: H^q(K, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2q-i}(K, \mathbb{Z}_2)$ ein. Verff. verwenden die \cup_i -Produkte, um ein „ \mathfrak{S}_i -Square“ zu definieren, das ein Homomorphismus von $H^q(K, \mathbb{Z}_m)$ in $H^{2q-i}(K, \mathbb{Z})$ ist (hier wird m gerade und $q-i$ ungerade vorausgesetzt). Verff. definieren mit Hilfe von \mathfrak{S}_{n-3} einen Homomorphismus $H^n(K, \pi_n(Y)) \rightarrow H^{n+3}(K, \pi_{n+2}(Y))$, den sie benutzen, um eine Formel für die Eilenberg-MacLanesche Klasse κ^{n+3} von $K(\pi_n(Y), n)$ zu erhalten (Eilenberg-MacLane, dies. Zbl. 36, 126). — Im Abschnitt 2 der Arbeit werden Homotopiegruppen von elementaren A_n^2 -Komplexen betrachtet (vgl. J. H. C. Whitehead, dies. Zbl. 41, 101, und S. C. Chang, dies. Zbl. 41, 102). Das Lemma 3 β) enthält einen Irrtum (vgl. P. J. Hilton, dies. Zbl. 39, 396 und 43, 383).

F. Hirzebruch.

Toda, Hirosi: Some relations in homotopy groups of spheres. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 71—80 (1952).

Verf. gibt zunächst einen Überblick über verschiedene Operationen für Homotopiegruppen von Sphären (Freudenthalsche Einhängung, Join, Hopfsche Konstruktion, Whitehead-Produkt). Darauf werden die verallgemeinerten Hopf- und Freudenthal-Invarianten besprochen. Insbesondere wird der Homomorphismus $H_1: \pi_n(S^r) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{2r})$ (vgl. P. J. Hilton, dies. Zbl. 45, 120) definiert. Diese Hilfsmittel werden benutzt, um in einigen Fällen zu zeigen, daß die Freudenthalsche Einhängung E kein Isomorphismus ist. [E ist bekanntlich ein Isomorphismus von $\pi_n(S^r)$ auf $\pi_{n+1}(S^{r+1})$ für $n < 2r-1$ (Freudenthal, dies. Zbl. 18, 177).] Im Falle $n = 2r-1$ ist der Kern von E die durch das Whitehead-Produkt $[i_r, i_r]$ erzeugte zyklische Untergruppe von $\pi_{2r-1}(S^r)$, wobei i_r ein erzeugendes Element von $\pi_r(S^r)$ bedeutet (G. W. Whitehead, dies. Zbl. 41, 519).] Beispiele für nicht isomorphes $E: \pi_n(S^r) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{r+1})$ sind: $n = r+4$ mit $r = 2, 4, 5$ und $n = r+5$ mit $r = 2, 4, 5, 6$.

F. Hirzebruch.

Toda, Hiroshi: On the homotopy groups of spheres. *Kōdai math. Sem. Reports* Nr. 3, 93—94 (1952).

Berechnung einiger Homotopiegruppen von Sphären mit Hilfe der Eilenberg-MacLaneschen Räume $K(Z, n)$. Beweise sollen im J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ. erscheinen. Resultate: $\pi_{n+3}(S^n) = Z_{24}$ für $n \geq 5$, $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ für $n \geq 6$, $\pi_{n+5}(S^n) = 0$ für $n \geq 7$, $\pi_{n+6}(S^n)$ hat 2 oder 4 Elemente für $n \geq 8$. Die Gruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ mit $k = 3, 4$ werden auch für die kleinen Werte von n bestimmt. Für $k = 5$ hat man $\pi_7(S^2) = Z_2$, $\pi_{10}(S^5) = Z_2$, $\pi_{11}(S^6) = Z$. Anm. des Ref.: Die Arbeiten von J. P. Serre [C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1243—1245 (1952) und dies. Zbl. 46, 407] enthalten die Resultate des Verf. für $k = 3, 4, 5$. Eine kürzlich erschienene Note von Serre [C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2475—2477 (1953)] enthält die Werte von $\pi_{n+k}(S^n)$ für $k = 6, 7, 8$. Insbesondere gilt nach Serre $\pi_{n+7}(S^n) = Z_{240}$ für $n \geq 9$, was mit einem oben nicht zitierten Teilergebnis des Verf. übereinstimmt.

F. Hirzebruch.

Aoki, Kiyoshi: On maps of a $(2n-1)$ -dimensional sphere into an n -dimensional sphere. *Tōhoku math. J., II. Ser.* 4, 178—186 (1952).

Eine notwendige Bedingung für die Homotopie zweier stetiger Abbildungen f, g von S^{4k-1} in S^{2k} ist bekanntlich, daß die Hopfschen Invarianten $\gamma(f), \gamma(g)$ übereinstimmen. Für $k = 1$ ist dies auch hinreichend ($\pi_3(S^2) = Z$). Verf. untersucht den Fall $k > 1$. Er formuliert einen Satz: f, g sind dann und nur dann homotop, wenn $\gamma(f) = \gamma(g)$ und wenn eine gewisse zusätzliche Homotopiebedingung erfüllt ist. Leider konnte Ref. nicht recht verstehen, was mit dieser Homotopiebedingung gemeint ist. — Es handelt sich durchweg um „simpliciale Untersuchungen“.

F. Hirzebruch.

Fáry, István: Sur les anneaux spectraux de certaines classes d'applications. III. Fonctions numériques (différentiables). C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1272—1274 (1952).

Cette Note et la suivante (voir ci-dessous), font suite à deux Notes antérieures (ce Zbl. 47, 165), à l'analyse desquelles nous renvoyons pour les notations. La présente est essentiellement consacrée à l'étude des modules $EH_\alpha, IH_\alpha, TH_\alpha$ attachés à une fonction f , dans le cas où f est une fonction indéfiniment différentiable, définie sur une variété X , et vérifiant certaines conditions, dont les suivantes: a) l'ensemble des points c^j en lesquels df est nulle est discret, b) au voisinage de c^j , $f(x) - f(c^j) = P_j(x)$ est un polynôme de degré ≥ 2 non nul. Ces modules sont notamment mis en relations avec les modules $H(P_j^\alpha)$ et avec les homomorphismes $H(F_\alpha) \rightarrow H(F_\alpha \cap \bar{V})$ et $H(F_\alpha \cap V) \rightarrow H(F_\alpha)$ où $F_\alpha = \{x, x \in X, f(x) = \alpha\}$, le nombre α est voisin d'une valeur critique $\gamma = f(c^j)$, P_j^α est l'hypersurface algébrique réelle $P_j(x) = \alpha - \gamma$, et V un voisinage ouvert convenable des points critiques de F_γ , \bar{V} son adhérence.

A. Borel.

Fáry, István: Sur les anneaux spectraux de certaines classes d'applications. IV. Cohomologie des hypersurfaces algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1467—1469 (1952).

L'A. considère ici l'algèbre spectrale d'une application $f: C^{n+1} \rightarrow C$, (C^n espace affine complexe à n dimensions), définie par un polynôme $P(x)$ homogène, irréductible, de degré m , dont la différentielle est identiquement nulle en $\mu = (m-1)^{n+1}$ points c^j ; il suppose en outre que $P(c^i) \neq P(c^j)$ pour $i \neq j$ et que $P(x) - P(c^j)$ est, au voisinage de c^j , une forme quadratique non dégénérée (au troisième ordre près). Après avoir énoncé quelques lemmes qui lui permettent d'étudier le faisceau des coefficients du terme E_2 , l'A. décrit complètement le module de cohomologie à supports compacts (ou ce qui revient au même par dualité, le module d'homologie ordinaire), $H(F_\xi, A)$ de la variété $F_\xi = \{x, x \in C^{n+1}, P(x) = \xi\}$, ($\xi \neq c^j$,

$1 \leq j \leq \mu$), relativement à un anneau de coefficients A quelconque; il retrouve ainsi en particulier des résultats de S. Lefschetz (L'analysis situs et la géométrie algébrique, Paris 1942).
A. Borel.

Hodge, W. V. D.: The topological invariants of algebraic varieties. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 182—192 (1952).

Une exposition des résultats de plusieurs travaux de l'A. (The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge 1941, ce Zbl. 24, 397; Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 105—117 (1951) et ce Zbl. 43, 173). [Remarques: Le problème du troisième de ces travaux a été complètement résolu récemment par MM. Chern [Amer. J. Math. 75, 565—597 (1953)] et Segre [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 1—128 (1953)] et M. Hirzebruch en a montré l'importance dans son compte-rendu dans ce Zbl. 43, 173. Les deux problèmes posés dans cette conférence, voir la caractérisation des cycles algébriques de dimension $m - 1$ dans une variété de dimension m , et l'équivalence des variétés algébriques et des variétés kählériennes à cocycle fondamental intégral, ont été résolus récemment par MM. Kodaira et Spencer [Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 872—877 (1953)]. H. Guggenheimer.

Titus, C. J. and G. S. Young: A Jacobian condition for interiority. Michigan math. J. 1, 89—94 (1952).

For a mapping $f: D \rightarrow E^n$ of class C^1 from a open subset of the Euclidean space E^n in E^n the following theorems are proved: Th. 1: If the Jacobian $J(f(p))$ be zero only on a compact subset Z of D of dimension less than $(n - 1)$, then f is quasi-interior (i. e., each b in $f(D)$ is in $\text{Int } f(U)$ whenever U is an open subset of D containing a compact component of $f^{-1}(b)$). Th. 2: If the mapping f is light (i. e., $f^{-1}f(x)$ is totally disconnected for every x in D) and the Jacobian is of fixed sign over D , then f is interior (i. e., takes open sets into open sets). — In particular it is deduced that, for a function $f(z)$ analytic in a plane domain to be an interior mapping, it suffices if either $f'(z)$ is zero only on a zero-dimensional set or if f is light and is not constant over an open subset of D . From Theorem 1 is deduced also the Th. 3: A continuous function $f: \bar{D} \rightarrow E^n$ of class C^1 , where D is open in E^n and has compact closure, can be factored into a monotone map m followed by a light map l which is interior on $m(D)$, provided that $J(f)$ is zero only on a compact set of dimension less than $(n - 1)$. — A few corrections seem called for: p. 89, l. 4 of para 2: change 'is' to 'in'. p. 90, l. 12: add 'is in U and' after 'of V '. p. 91, l. 7: change ' W is in $f(V)$ ' to ' W is in $f(V)$ '. p. 91, l. 8: change ' p is in $\text{Int } f(V)$ ' to ' p is in $\text{Int } f(U)$ '. p. 92, l. 26: change ' $M(D)$ ' to ' $m(D)$ '.
V. S. Krishnan.

Ganea, Tudor: Transformations continues des espaces euclidiens. Comun. Acad. Republ. popul. Române 2, 413—414, russische und französ. Zusammenfassgn. 414 (1952) [Rumänisch].

The author wishes to withdraw this paper since it contains an error in the proof.
T. Ganea.

Noguchi, Hiroshi: On mappings defined on 2-spheres. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 4, 109—110 (1952).

Using an elementary method due to S. Kakutani the author proves three theorems on the mappings defined on the Euclidean 2-sphere S . The most general of these theorems asserts that if f is a continuous mapping of S into an orientable 2-dimensional manifold M with the genus $\neq 0$ and if θ is an arbitrarily given angle such that $0 < \theta < 2\pi$ then there exist two points p and q on S such that $f(p) = f(q)$ and that the angle $\angle pcq$, where c is the centre of S , is equal to θ . There is an obvious mistake in the bibliography. The paper [5] is due to N. E. Steenrod and not to S. Eilenberg.
K. Borsuk.

Andreian, Cabiria: Le théorème des disques pour les surfaces de Riemann normalement exhaustibles. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 263—271, russische und französ. Zusammenfassgn. 271, 272 (1952) [Rumänisch].

Eine Riemannsche Überlagerungsfläche $(S)_V^r$ der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit V über der zweidimensionalen Sphäre S mittels der inneren Abbildung F heißt normal ausschöpfbar, wenn es eine ausschöpfbare Polyederreihe P_i von V

gibt, so daß F auf jedem P_i innere Abbildung ist. Bekanntlich (S. Stoilow, dies. Zbl. 22, 366) gibt es für solche Überlagerungsflächen, wenn Δ zueinander fremde Jordangebiete auf S sind und V einfachzusammenhängend ist, höchstens ein von V vollständig verzweigt überdecktes Δ . Verf. betrachtet den allgemeinen Fall und findet für die Maximalzahl h der vollständig verzweigt überdeckten Δ den Ausdruck $4 + 4(g-1)/n$, wo g und n bzw. die Geschlechts- und Blätteranzahl von P_i sind. Dies erlaubt zahlreiche Schlüsse über h in verschiedenen Fällen. Z. B. ist $h = 3$, falls V schlichtartig ist. Beispiele zeigen, daß die so gefundenen Maximalzahlen nicht verbessert werden können. *S. Stoilow.*

Bäbler, F.: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni. *Commentarii math. Helvet.* 26, 117—118 (1952).

Vgl. R. Cantoni (dies. Zbl. 45, 261). Verf. trägt einen Beweis nach, den Cantoni als offenkundig, aber mühsam unterdrückt hatte. *E. Pannwitz.*

Theoretische Physik.

● **Stickland, A. C. (Executive editor):** Reports on progress in physics. Vol. XV. London: The Physical Society 1952. 338 S. 2 £ 10 s. net.

Die Arbeiten mathematisch-physikalischen Inhalts werden in dies. Zbl. einzeln besprochen; der Band wird unter der Abkürzung Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 15 geführt.

● **Houston, R. A.:** An introduction to mathematical physics. London: Blackie & Son. Ltd., 1952. X, 262 p. 25 s. net.

Das Buch, in Großbritannien seit 40 Jahren als einführendes Werk in die mathematische Seite der Physik von Studenten benutzt, gibt gewissenhafte, (innerhalb des beschränkten Umfangs) gründliche und verständliche Unterrichtung. Die erwähnte Beschränkung des Stoffumfangs macht das Buch bereits für erste Semester geeignet (außer Differential- und Integralrechnung wird nichts vorausgesetzt). Das erste Kapitel bringt die Behandlung des $1/r^2$ -Kraftgesetzes und leitet zur Potentialgleichung über. Im zweiten Kapitel gibt die Hydrodynamik Gelegenheit zur Behandlung der Vektorfelder und -operationen. Das nächste Kapitel behandelt Fouriersche Reihen in Zusammenhang mit der Diffusionsgleichung, das vierte Wellenausbreitung. Ein fünftes Kapitel geht über Elektrodynamik, das sehr kurze sechste über Thermodynamik. Die neu hinzugefügten Kapitel über Quantentheorie und Relativitätstheorie können nur einen ersten Einblick geben. *F. L. Bauer.*

● **Holton, Gerald:** Introduction to concepts and theories in physical science. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc. 1952. XVIII, 650 p. \$ 6,50.

Das Buch wendet sich vornehmlich an Nichtphysiker. Seine Absicht ist es, das Wesen der physikalischen Fragestellungen, Methoden und Theorien zu erläutern; auf Vollständigkeit ist demzufolge gar kein Wert gelegt. Eine Reihe fundamentaler Begriffe wird sehr ausführlich erläutert, und zwar hauptsächlich an Hand der historischen Entwicklung. Es werden verschiedentlich Zitate (vor allem von Galilei und Newton) und etwa 20 Portraits geboten, und es wird der Versuch gemacht, die Physik in einen allgemeineren geistesgeschichtlichen Rahmen zu stellen. Andererseits ist die Darstellung im einzelnen modern-systematisch und benutzt (elementare) Mathematik. Die sieben Abschnitte behandeln folgende Fragen: Kinematik, Dynamik, Himmelsmechanik, Was ist Physik?, Atomlehre und Quantentheorie (mit Beschränkung auf das Bohrsche Atommodell; der Teilchen-Welle-Dualismus wird leider nur für das Licht erwähnt). *G. Süßmann.*

Dehalu, M.: Un système électro-mécanique de dimensions MLT. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 21, 389—402 (1952).

Mechanik:

● **Sommerfeld, A.:** Lectures on theoretical physics. Vol. I: Mechanics. Transl. from the 4th German ed. by M. O. Stern. New York: Academic Press 1952. XIV, 289 p. 1 plate. \$ 6,50.

● **Signorini, A.:** Meccanica razionale con elementi di statica grafica. Vol. I. 2^a ed. Roma: Perrella 1952. 354 p.

Der 1. Bd. dieses in Italien sehr verbreiteten Werkes über Mechanik, dessen 2. Auflage vorliegt, enthält eine kurze und prägnante Darstellung der Grund-

begriffe in dem Ausmaße, wie es für die ersten Semester der Studierenden erforderlich ist. Auch der Kenner wird in dem bekannten Stoffe manche interessante Bemerkung finden. Gliederung: Theorie der Vektoren und Einführung in die graphische Statik, Kinematik des Punktes und des starren Körpers, relative Bewegung und Anwendungen, Schwerpunkt, graphische Integration, Trägheitsmomente und ihre graphische Berechnung. Kinematik der Massen, insbesondere Bewegung um einen festen Punkt.

Th. Pöschl.

Lichnerowicz, André and Don Aufenkamp: The general problem of the transformation of the equations of dynamics. J. rat. Mech. Analysis **1**, 499—520 (1952).

Das alte, bereits von Painlevé, Stäckel, Levi-Civita und anderen behandelte Problem der Äquivalenz dynamischer Probleme wird unter neuem Gesichtspunkt aufgegriffen und einer weitgehenden Klärung zugeführt. Betrachtet werden Systeme, deren Ausdrücke für die kinetische Energie und generellen Kräfte von der Zeit nicht explizit abhängen. Die Bindungen dürfen zeitabhängig sein, für zeitunabhängige Bindungen ist das Problem bereits von T. Y. Thomas vollständig erledigt worden. — Das Problem wird folgendermaßen formuliert: Gegeben sind zwei dynamische Probleme D und E , die auf dasselbe System genereller Koordinaten bezogen werden können; welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Bahnen von E — unabhängig von der Art der Parameterdarstellung — auch Bahnen von D sind? Und weiter: unter welchen Bedingungen sind die Bahnen der beiden Systeme identisch? Die Frage nach der Äquivalenz der beiden Probleme vermöge einer Punkttransformation wird also aufgefaßt als Frage nach der Gleichbahngkeit der Probleme im Raum der q_ν, \dot{q}_ν . Die Ausdrücke für die kinetische Energie werden in der Form $U = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2a^\alpha \dot{q}^\alpha + 2A$ vorausgesetzt, und $a_{ik} = \partial a^k / \partial q_i - \partial a^i / \partial q_k$ seien die Komponenten eines zweifach kovarianten Tensors (begleitende Bilinearform). Dann können folgende Sätze ausgesprochen werden ($n > 2$): 1. Ist ein dynamisches Problem D vorgelegt, für das $a_{ik} = 0$ ist, dann existiert kein dynamisches Problem E , für das die entsprechenden Komponenten $b_{rs} \neq 0$ ausfallen von solcher Art, daß jede Bahnkurve von E eine Bahnkurve von D ist oder umgekehrt. 2. Alle Bahnkurven von E sind Bahnkurven von D dann und nur dann, wenn es einen Skalar X und zwei kovariante Vektoren K_α und Φ_α gibt derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: $R^\alpha = X^2 Q^\alpha$; (R^α und Q^α generelle Kräfte von D bzw. E), $b_p^\alpha = -X a_p^\alpha + K_p Q^\alpha$;

$$\Phi_{\mu\nu}^\alpha = \delta_\mu^\alpha \Phi_\nu + \delta_\nu^\alpha \Phi_\mu - \frac{1}{4X^2} K_\mu K_\nu Q^\alpha + \frac{1}{4X} (K_\mu a_\nu^\alpha - K_\nu a_\mu^\alpha)$$

mit $\Phi_{\mu\nu}^\alpha = A_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ (Differenz der Christoffelsymbole); und schließlich

$$\frac{1}{2X^2} \left(\frac{Xg}{h} \right)^{1/(n+2)} K_\alpha \dot{q}^\alpha - \frac{1}{X} \left(\frac{Xg}{h} \right)^{1/(n+2)} = \text{const}, \quad h = |h_{ik}|, \quad g = |g_{ik}|$$

ein erstes Integral ist. 3. Alle Bahnen von E sind auch Bahnen von D dann und nur dann, wenn die Bedingungen von 2 erfüllt sind.

E. Hardtwig.

Forbat, N. H.: Neue Separationsfälle der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung. Z. angew. Math. Mech. **32**, 238—239 (1952).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein rheonomes mechanisches System, dessen Kräfte sich von einem Potential $V(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ herleiten, separierbar ist, werden unter Verallgemeinerung der bekannten Methode von Levi-Civita aufgestellt. Es ergibt sich eine Verallgemeinerung des Stäckelschen Separationsfalles, für den auch eine vollständige Lösung angegeben wird. Eine weitere Anwendung der hergeleiteten Separationsbedingungen betrifft die Relativbewegung eines freien Massenpunktes, wenn die eingeprägte Kraft von einem Potential $V(x, y, z)$ ableitbar ist. Danach ist Separation nur in sehr speziellen Fällen der Relativbewegung möglich, was die Schwierigkeit bei der Integration der relativen Bewegungsgleichungen deutlich macht.

E. Hardtwig.

Oliveri, E.: Sul moto piano di un punto con accelerazioni radiale e trasversa proporzionali. Matematiche **7**, 55—61 (1952).

Beitrag zur ebenen Bewegung eines Massenpunktes mit der Nebenbedingung, daß die radiale und die transversale Komponente der Beschleunigung einander proportional sind. Für die folgenden beiden Fälle wird das Problem allgemein gelöst: 1. Die Punktbahn ist gegeben, das Bewegungsgesetz gesucht; 2. das Bewegungsgesetz ist gegeben, die Bahn ist gesucht. Verf. zeigt ferner, daß für den Sonderfall der logarithmischen Spirale sich gleichzeitig Proportionalität zwischen der radialen

und der transversalen Geschwindigkeit einstellen kann, wobei die Winkelgeschwindigkeit konstant wird.

H. Neuber.

Zeuli, Tino: Sistemi dinamici corrispondenti con forze funzioni lineari delle velocità che ammettono la funzione lagrangiana. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 146—153 (1952).

Consider two dynamical systems (S) and (S_1) , with no moving constraints, described by the same set of generalized coordinates and subjected to forces which are linear in the generalized velocities. Suppose that (S) and (S_1) are „correspondent“ i. e. that they have the same orbits not necessarily described with the same temporal law. The author shows that if (S) possesses a Lagrangian function then (S_1) restricted to a certain class of orbits also possesses a Lagrangian function. *M. M. Peixoto.*

Nadile, Antonio: Forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 126—139 (1952).

Let the configuration of a dynamical system be represented by a point $Q(q_1, \dots, q_n)$ of the manifold V_n whose line-element is given by $dQ^2 = 2 T dt^2$, where T is the kinetic energy. When the system is holonomic it has been shown by Boggio (this Zbl. 7, 35) that the equations of motion can be put on the vector form $d^2Q/dt^2 - \text{grad } U = 0$, U being the potential. Suppose now that the system is non-holonomic with $m (< n)$ non integrable equations of constraint. The author then proves that the motion is determined by the equations of constraint plus a set of $n - m$ equations on the form of scalar product $(d^2Q/dt^2 - \text{grad } U) B_{m+h} = 0$, ($h = 1, \dots, n - m$) the B 's being certain tangent vectors to V_n . *M. M. Peixoto.*

Kuz'min, P. A.: Eine Ergänzung zum V. A. Steklov'schen Fall der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Priklad. Mat. Mech. 16, 243—245 (1952) [Russisch].

Gallissot, François: Application des formes extérieures du 2^e ordre à la dynamique newtonienne et relativiste. Ann. Inst. Fourier 3, 277—285 (1952).

L'A. donne, dans le cas du point, un énoncé des principes de la mécanique classique qui coïncide à peu près avec un énoncé donné par le rapporteur et qui s'inspire du point de vue d'Elie Cartan dans ses leçons sur les invariants intégraux. Les équations de la mécanique ponctuelle sont données par le système associé de la forme quadratique extérieure $\omega = m k_{ij} (dv^i \wedge dx^j - v^i dv^j \wedge dt) + k_{ij} X^i dx^j \wedge dt$ (k_{ij} , symbole de Kronecker; $i, j = 1, 2, 3$) qui est invariante par le groupe galiléen. La forme ω peut s'exprimer en ne faisant intervenir comme différentielles que les différentielles d'intégrales premières des équations du mouvement; ω définit une relation intégrale d'invariance au sens du rapporteur. Cet énoncé est appliqué à la formation des équations classiques des milieux continus, sous une forme particulièrement intéressante. Un énoncé analogue est donné pour la dynamique ponctuelle de la relativité restreinte, à partir d'une forme quadratique extérieure invariante par le groupe de Lorentz.

A. Lichnerowicz.

Mihailović, Dobrivoje: L'allegato all'analisi qualitativa delle forme delle orbite nel problema di due corpi. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 49—52 [Serbisch] mit italienisch. Zusammenfassg. 52 (1952).

In relazione all'analisi qualitativa delle forme delle orbite nel problema di due corpi con permutabile somma delle masse, la quale A. A. Bat'irev ha effettuato [Astron. Žurn. 26, Nr. 1, 56—59 (1949)], l'A. ha dimostrato in questo articolo: 1. che la velocità settoriale del punto A colla massa permutabile che si muove sopra l'orbita spirale e di quel punto P che si ottiene per mezzo della corrispondenza secondo la legge $r = (1 + \alpha t)^{-1} \bar{s}$ e che si muove per l'intersezione conica — hanno le quantità scalari uguali — senza riguardo al tipo dell'orbita di quest'ultimo punto (ellittico, parabolico, iperbolico); 2. che le orientazioni dei piani delle orbite dei punti P e A sono inverse; la direzione della circuizione conica è inversa alla direzione della circuizione del punto A della massa permutabile sopra una delle corrispondenti orbite spirali.

Autoreferat.

Schmeidler, F.: *Intermediäre Bahnen zur Annäherung an das Dreikörperproblem.* Astron. Nachr. **280**, 245—253 (1952).

Verf. will zur Annäherung an die Bahnen des Dreikörperproblems intermediäre Bahnen benutzen, die bequemer sind als die ungestörte elliptische Bewegung. Nachdem er bekannte allgemeine Tatsachen über das Integrationsverfahren der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung unter Zuhilfenahme von bekannten mit H und untereinander in Involution liegenden Integralen zusammengestellt hat, bestimmt er mit diesem zwei Arten intermediärer Bahnen, die je einen Teil der Glieder der Störungsfunktion berücksichtigen derart, daß das entstehende Problem exakt integrierbar ist. Bei der einen Art werden wenigstens die Hauptglieder der Säkularstörungen (von der Ordnung des Quadrates der Exzentrizitäten und Neigungen) berücksichtigt. Verf. meint, daß der Einfluß der Glieder 4. und höherer geradzahlgiger Ordnung numerisch sehr klein und auch in sehr langen Zeiträumen zu vernachlässigen sei. Für den Fall kurzer Zeiten, wo der Einfluß der periodischen Störungen erheblich überwiegt, versucht Verf. intermediäre Bahnen zu finden, welche gewisse periodische Terme der Störungsfunktion berücksichtigen und von Exzentrizitäten und Neigungen unabhängig sind. Auch die intermediären Bahnen dieser Art können streng integriert werden und führen, wenn man die Lösung nach Potenzen der störenden Masse entwickelt, auf elliptische Integrale. *E. Hölder.*

Littlewood, J. E.: *On the problem of n bodies.* Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 143—151 (1952).

Consider a system of $n > 2$ gravitating bodies of mass m_i , $m_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, n$, with center of gravity at rest. Some of the m_i 's may be zero but $m_n > 0$. At time t let $P(t)$ be the point of the euclidean $6(n-1)$ space $(x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{z}_{n-1}(t))$. The point $P = P(0)$ is said to represent the system. A system P is regular for $t \geq 0$ (similarly for $t \leq 0$) if its diameter (in 3-space) is bounded and collisions do not occur for $t \geq 0$. The following theorems are proved under the assumption that every given set is measurable. (I) If for $t \geq 0$ every system P of a set E has each body inside one and only one spherical anullus, the anulli being disjoint with disjoint boundaries, then for $t \leq 0$ the same thing is true for almost all P of E . (II) If every system P of a set E is regular for $t \geq 0$, almost all P of E are regular for $t \leq 0$. (III) If p is any positive number then almost all systems P of a set E belong to one of two classes; (i) the system is not regular for $t \geq 0$, (ii) $P(m, p) \in E$ for an infinity of positive values of m . *M. M. Peixoto.*

Elastizität. Plastizität:

● **Westergaard, H. M.:** *Theory of elasticity and plasticity.* (Harvard Monographs in Applied Science, no. 3.) New York: John Wiley and Sons, Inc. 1952. 14 + 176 p. § 5,00.

● **Seely, Fred B. and James O. Smith:** *Advanced mechanics of materials.* 2. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd. 1952. XVII, 680 p. 68s.

● **Galerkin, B. G.:** *Ausgewählte Werke. Bd. I.* Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1952. 391 S. R. 23,— [Russisch].

Der vorliegende Band enthält sämtliche seit 1909 auf dem Gebiete der Elastizitätstheorie, der Elastostabilität und der Baustatik erschienenen Aufsätze des 1945 verstorbenen russischen Forschers, ausgenommen seine Arbeiten über dünne elastische Platten, die für den zweiten Band vorbehalten sind. Folgende Artikel des vorliegenden Bandes sind besonders bemerkenswert: Eine ausgedehnte Untersuchung über Stabknickung, insbesondere auch im überkritischen Gebiet, sowie über die Stabilität von Stockwerkrahmen (1909). — Eine strenge Lösung des Problems der Biegeknickung mittels elliptischer Funktionen (1909). — Die grundlegende Arbeit für die nach dem Verf. benannte Methode zur Behandlung von Rand- und Eigenwertproblemen. Die Anwendung der Methode wird durch einige Stab- und Plattenprobleme illustriert (1915). — Arbeiten über die Torsion eines Prismas mit einem rechtwinklig-gleichschenkeligen Dreieck als

Basis (1918), sowie über Torsion eines durch zwei parabolische Zylinder begrenzten Körpers (1924). — Ein Verfahren zur Berechnung von Vierendeelträgern durch dreigliedrige Gleichungen (1926). — Eine auf der Airyschen Funktion aufgebaute Untersuchung über die Spannungsverteilung in einer Stützmauer oder einer Talsperre mit trapezförmigem Querschnitt. Zahlreiche Zahlentafeln, die sowohl den Wasserdruck als auch die Eigenlast berücksichtigen, verleihen dieser Arbeit einen großen praktischen Wert (1929). — Eine Arbeit über den Spannungszustand eines von einem nachgiebigen Medium umgebenen Kreiszyylinderrohres unter Innendruck (1928). — Eine strenge Lösung für die Biegung von recht- und dreieckigen dicken Platten durch beliebig verteilte, normale Oberflächenlast (1931), sowie eine Ausdehnung dieser Lösung auf eine durch einen Kreissektor begrenzte dicke Platte (1932). — Eine Darstellung beliebiger Spannungs- und Verschiebungszustände in einem isotropen elastischen Körper durch drei biharmonische Funktionen (1930). — Anwendung dieser Methode auf die Untersuchung des elastischen Gleichgewichts eines hohlen Kreiszyinders (1932), sowie einer geschlossenen oder offenen dicken Kugelschale (1941). — Eine Untersuchung über die Grenzen der Anwendbarkeit der Kirchhoffschen Plattentheorie auf mitteldicke quadratische Platten unter gleichförmiger Belastung oder Eigengewicht (1935) und schließlich eine sehr allgemein gehaltene Näherungslösung für das elastische Gleichgewicht von Zylinderschalen mittlerer Dicke (1935).

S. Woinowsky-Krieger.

Kitover, K. A.: Über die Anwendung spezieller Systeme von biharmonischen Funktionen auf die Lösung gewisser Probleme der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech. 16, 739—748 (1952) [Russisch].

Zum Aufbau der Spannungsfunktion für ebene Deformations- und Spannungszustände werden für verschiedene geometrisch einfache Grundbereiche biharmonische Funktionen konstruiert, die an zwei Teilstücken des Randes entweder spannungs- oder verschiebungsfreien Zuständen entsprechen. — Im Falle des rechteckigen Grundbereiches wird von dem biharmonischen

$$\varphi(x, y) = (A \cos kx + B \sin kx + Cx \cos kx + Dx \sin kx) \cdot \exp ky$$

mit komplexem k ausgegangen und die Konstanten A, B, C, D so bestimmt, daß an zwei gegenüberliegenden Seiten L_1 und L_2 die vier Randbedingungen der Gestalt $\sum_{i,j} a_{ij} \partial^{i+j} \varphi / \partial x^i \partial y^j = 0$

befriedigt werden. Dies geht für eine Folge von k -Werten, die einer transzendenten Gleichung genügen und die eine Folge von Grundlösungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ bestimmen. Die Lösung spezieller Aufgaben soll dann dadurch geschehen, daß man zunächst eine biharmonische Funktion φ_0 bestimmt, die zur Erfüllung der gegebenen Randbedingungen längs L_1 und L_2 führt, und dann die Randbedingungen an den beiden übrigen Seiten durch eine aus den φ_n gebildete Reihe zu befriedigen versucht. Existenz- und Konvergenz-Theoreme fehlen; stattdessen wird behauptet, daß man bei geeigneter Anpassung des φ_0 an die vorgegebene Belastungsart mit zwei bis drei der φ_n praktisch auskommt. — Mit ähnlichen 4-parametrigen Ansätzen für φ wie oben, werden die transzendenten Gleichungen für k und die sich ergebenden Grundlösungen für folgende Grundbereiche angegeben und ausführlich diskutiert: Rechteck, Keil und Kreisring; jeweils für die verschiedenen Randbedingungen bez. Spannung oder Verschiebung, sowohl für ebenen Deformations- als auch Spannungszustand. Der entsprechende Ansatz wird auch für die achsensymmetrische Deformation eines Prismas durchgeführt. — Als Anwendungsbeispiel ist der Fall des Keiles $0 \leq r \leq r_0$, $|\theta| \leq \theta_0$ mit fester Einspannung bei $r = r_0$ und Beanspruchung durch ein in der Keilebene liegendes, an der Spitze $r = 0$ angreifendes Drehmoment skizziert.

H. Richter.

Tekinalp, Bekir: Generalisation of the conjugate beam method to space rods. Bull. techn. Univ. Istanbul 4, 29—36 (1952).

Zanaboni, Osvaldo: Varianti alla teoria elementare della flessione nelle barre curve. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 9, 7—15 (1952).

Als Abänderung der zuerst von Grashof angegebenen elementaren Theorie der Biegung von schwach gekrümmten Stäben werden die Schubspannungen gegenüber den radialen als klein vorausgesetzt und der Einfluß der Querkürzung auf die radialen Dehnungen vernachlässigt. Die dadurch bedingten Vereinfachungen werden durchgeführt.

Th. Pöschl.

Raher, W.: Allgemeine Stabilitätsbedingung für krumme Stäbe. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 236—246 (1952).

Die Arbeit enthält eine Erweiterung der von P. Funk [Österr. Ingenieur-Arch. 1, 2—14 (1946)] entwickelten Stabilitätstheorie auf Stäbe mit undehnbarer Achse, die beim unbelasteten Stab einer Kurve von konstanter Krümmung und konstanter Windung folgt. Die Lösung des Problems wird auf eine allgemeine, unter Benutzung

von Quasikoordinaten entwickelte Formel für die zweite Variation der Deformationsenergie des Stabes zurückgeführt. Verf. zeigt die Anwendung dieser Formel am Beispiel der Achterbildung bei einem geschlossenen Kreisring.

S. Woinowsky-Krieger.

Hu, Hai-Chang: Small deflections of plates and beams under tension or compression by eigenfunctions of buckling problem. *Sci. Record* 5, 69—75 und chines. Zusammenfassg. 69 (1952).

In an earlier paper [*Sci. Record* 3, 225 (1950)] the trigonometric series is shown to be used for the treatment of bending of a long rectangular plate into a cylindrical surface. In this paper the idea is extended to the determination of the deflection of plates and beams under the combined action of lateral loads and forces in the middle plane of the plate or the beam. The deflection is expanded in series of the eigenfunctions of the buckling problem and the coefficients are expressed as explicit functions involving the lateral loads, given by certain equations [Rev.'s remark: this problem has earlier been treated by many authors and examples have been given in detail, see A. Morley, *Philos. Mag.* 15, 711—720 (1908); H. M. Westergaard, *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.* 58 (1922); A. C. Strandhagen, *J. aeronaut. Sci.* 9, 529—532 (1942)].

R. Gran Olsson.

Maud, F. E. and C. J. Thorne: Thin plates under combined loads. I. *Studies appl. Math.* 7, 46 S. (1952).

Verff. untersuchen rechteckige Platten, die durch Kräfte in und senkrecht zur Mittelebene beansprucht werden. Mittels der endlichen Fourier-Transformation wird die für kleine Verformungen gültige partielle Differentialgleichung der Aufgabe auf eine gewöhnliche zurückgeführt. Die Ergebnisse der Rechnung werden für eine Reihe von Kombinationen der Randbedingungen (Einspannung, Stützung, oder freier Rand) vollständig angegeben und auf mehrere Beispiele angewandt.

A. Weigand.

Koltunov, M. A.: Die Berücksichtigung der endlichen Verschiebungen beim Problem der Verbiegung und Stabilität von Platten und flachen Schalen. *Vestnik Moskovsk. Univ.* 7, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 3), 13—29 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht den zwischen der Belastung und endlichen Normalverschiebungen einer flachen Schale bestehenden Zusammenhang, indem er sich eines von V. S. Vlasov herrührenden Systems nichtlinearer Diff.-Gleichungen bedient. Letztere sind den v. Kármánschen Gleichungen der Plattentheorie ähnlich gebaut, enthalten aber zusätzliche, den Schalenkrümmungen proportionale Glieder. Die Lösung erfolgt nach der Methode von Galerkin mit Beschränkung auf die erste Näherung und wird auf die folgenden Sonderfälle angewendet: 1. Biegung einer beliebig geformten rechteckig begrenzten Schale durch geradlinig längs ihrer Ränder verteilte Druckkräfte, sowie eine sinusförmige Flächenlast. — 2. Stabilität einer offenen Zylinderschale mit einer trapezförmig verteilten, parallel zu der Erzeugenden wirkenden Drucklast. — 3. Eine rechteckig begrenzte offene Zylinder- oder Kugelschale unter gleichförmiger Querbelastrung. — 4. Eine Schale mit negativer Gaußscher Krümmung unter kombinierter Druck- und Querbelastrung. In den Fällen 2. und 3. werden die zu Durchschlagerscheinungen führenden Vorbedingungen erörtert und durch Kurven veranschaulicht. Den Abschluß bildet eine Klassifikation von Schalen unter dem Gesichtspunkt ihres Verhaltens bei stetig zunehmender Flächenlast.

S. Woinowsky-Krieger.

Michlin, S. G.: Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung einer elastischen Schale. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 399—418 (1952) [Russisch].

Sei S die Mittelfläche einer offenen Schale mit der Randlinie L , S_0 die Mittelebene einer zugeordneten Platte mit der Randlinie L_0 . Schale und Platte seien auf dasselbe System krummliniger orthogonaler Koordinaten α_1, α_2 bezogen. Die Rand-

bedingungen auf L und L_0 seien dabei für das gleiche Koordinatenpaar identisch. Eine beliebige auf S und L definierte Funktion $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ ist dann zugleich auf S_0 und L_0 definiert. Die gleiche Flächenbelastung $q(\alpha_1, \alpha_2)$ erzeuge ferner eine Normalverschiebung w auf S , w_0 auf S_0 . Wird nun der Spannungszustand der Schale S näherungsweise durch einen solchen der Platte S_0 ersetzt, so betrachtet Verf. als ein passendes Maß zur Abschätzung des dabei im Durchschnitt begangenen Fehlers den Ausdruck $E_0(w - w_0)/E_0(w_0)$, wo $E_0(w_0)$ die potentielle Energie der Deformation von S_0 sein soll. Werden einige Einschränkungen hinsichtlich der Randbedingungen gemacht, so läßt sich E_0 durch gewisse Differentialoperatoren ausdrücken. Die Fehlerabschätzung vereinfacht sich wesentlich bei dehnungslöser Deformation, wofür als Anwendungsbeispiel eine schraubenförmige Schale numerisch behandelt wird. Es folgt die Anwendung des Verfahrens auf flache Schalen, wobei sich für w und eine zugeordnete Spannungsfunktion gewisse Diff.-Gleichungen ergeben, die von den ähnlichen, zuerst von V. S. Vlasov, dann von A. A. Nasarov entwickelten Gleichungen, etwas abweichen. S. Woinowsky-Krieger.

Michlin, S. G.: Einige Sätze der Operatoretheorie und ihre Anwendung in der Theorie der elastischen Schalen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 909—912 (1952) [Russisch].

Ausgehend von Gleichungen, die V. S. Vlasov „die Gleichungen der technischen Theorie der Schalen“ nennt, beweist Verf. mit Hilfe der Theorie der Operatoren einen Satz über den relativen mittleren Fehler bei der Bestimmung der in belasteten Schalen auftretenden Spannungen. — Die gerade betrachtete Schale S_ζ sieht er als Individuum einer vom Parameter ζ abhängigen einparametrischen Schar von Schalen an, die als Grenzschar für $\zeta \rightarrow 0$ die ebene Platte besitzt, und ordnet ihr einen Operator P_ζ zu. Der mit Hilfe der Theorie der Operatoren im Hilbertschen Raum bewiesene Satz lautet nun: Ersetzt man die mit der Kraft q auf die Medianfläche belastete Schale S_ζ durch die Platte S_0 , so entsteht ein relativer, mittlerer Fehler bei der Bestimmung der Spannung, der kleiner als eine Größe η bleibt, die ihrerseits beliebig klein gemacht werden kann, wenn bei fest gewählter Schalendicke h der Parameter ζ hinreichend klein ist. (Nach Übersetzung referiert.) E. Hardtwig.

Alumjaë, N. A.: Zur Theorie der axialsymmetrischen Deformationen von Rotationsschalen bei endlichen Verschiebungen. Priklad. Mat. Mech. 16, 419—428 (1952) [Russisch].

Nichtlineare axialsymmetrische Deformationszustände flacher Schalen lassen sich nach Papkovič derart behandeln, daß die Differentialgleichung der Kompatibilität streng, die Gleichgewichtsgleichung dagegen näherungsweise integriert wird. Bei nicht flachen Rotationsschalen ist die Anwendung der Galerkinschen Näherungsmethode auf beide Gleichungen geboten. Die vom Verf. entwickelten Gleichungen enthalten, ähnlich wie bei E. Reissner (dies. Zbl. 41, 532) die Verdrehung der Meridiantangente ϑ und eine Spannungsfunktion als die einzigen abhängigen Variablen. Durch Variation zweier Energieausdrücke zeigt Verf., daß die Anwendung der Galerkinschen Methode auf die Kompatibilitätsgleichung bei gewissen Einschränkungen hinsichtlich der Randbedingungen wohl gerechtfertigt ist. Im folgenden werden nur „geometrisch nicht-lineare“ Probleme betrachtet, bei denen sämtliche Dehnungen um eine Größenordnung kleiner sind als die Winkeländerung ϑ . Verf. diskutiert abschließend einige Sonderfälle, wo diese Einschränkung praktisch zutrifft, und benutzt diese letztere dazu, um seine endgültigen Differentialgleichungen, sowie die zugehörigen Variationsgleichungen weitgehend zu vereinfachen. S. Woinowsky-Krieger.

Kroupa, František: The second boundary condition of the theory of elasticity for annular regions. Czechosl. J. Phys. 1, 137—146 (1952).

Gelöst wird ein ebenes Problem der klassischen Elastizitätstheorie, nämlich die zweite Randwertaufgabe für den Kreisring. Sie besteht darin, Verschiebungs- und Spannungsverteilung innerhalb des Ringes zu bestimmen aus der Verteilung der Verrückungen längs der begrenzenden Kreise (wäre statt dessen die Verteilung der äußeren Kräfte entlang der Begrenzungskreise gegeben, würde es sich um die erste Randwertaufgabe handeln). — Die Methode der Lösung weicht ab von der klassischen Methode der Behandlung derartiger Aufgaben mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion (hier mit U bezeichnet). Sie arbeitet mit Funktionen einer komplexen Variablen $z = x + iy$ nach Grundsätzen, die speziell von russischen Theoretikern ausgearbeitet wurden. Verf. beruft sich auf ein in russischer Sprache erschienenenes Buch

von N. I. Muschelišvili (Einige fundamentale Probleme der mathematischen Theorie der Elastizität, Moskau 1949). Der Grundgedanke ist folgender: Die Komponenten des Spannungstensors p_{ik} (ebener Fall) lassen sich aus der Spannungsfunktion U vermöge $p_{xx} = \partial^2 U / \partial y^2$, $p_{yy} = \partial^2 U / \partial x^2$, $p_{xy} = -\partial^2 U / \partial x \partial y$ herleiten, wobei U die Gleichung des Bipotentials erfüllt: $\Delta \Delta U = \partial^4 U / \partial x^4 + 2 \partial^4 U / \partial^2 x \partial^2 y + \partial^4 U / \partial y^4 = 0$. Dann stellt $\Delta U = P(x, y)$ im betrachteten Bereich eine harmonische Funktion dar: $\Delta P = 0$, und es existiert eine zweite Harmonische $Q(x, y)$, so daß $P + iQ = f(z)$ eine holomorphe Funktion ist. Durch $\frac{1}{4} \int f(z) dz = p + iq = \varphi(z)$ wird eine holomorphe Funktion $\varphi(z)$ definiert. Dann ist auch $p_1 = U - p x - q y$ eine harmonische Funktion, zu der man eine weitere q_1 finden kann, so daß $X(z) = p_1 + i q_1$ im betrachteten Bereich holomorph ist. Die beiden Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z) = dX/dz$ übernehmen nun die Rolle der Airyschen Spannungsfunktion. Es wird nämlich vermöge $2\mu(u + iv) = \kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(z) - \psi(z)$ die Verteilung der elastischen Verformungen u, v im Bereich festgelegt ($\kappa = 3-4\sigma$, σ = Poissonsche Konstante, überstrichene Funktion = konjugiert komplexe Funktion). Ebenso wird durch $p_{xx} + p_{yy} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]$, $p_{yy} - p_{xx} + 2i p_{xy} = 2[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]$ die Spannungsverteilung bestimmt. Hier wurden die komplexen Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ durch die Airysche Funktion U definiert. Man kann sie aber, und das ist entscheidend, von U unabhängig (konform mit den Oberflächenbedingungen) bestimmen. Der Vorteil der Methode liegt in der besonders einfachen Behandlung von Randbedingungen sowie — unter Heranziehung der konformen Abbildung — in der Behandlung mehrfach zusammenhängender Bereiche. — Verf. wendet das geschilderte Verfahren auf den Kreisring an. *E. Hardtwig.*

Inan, Mustafa: Shear center of semi elliptical cross section. Bull. techn. Univ. Istanbul 4, 25—28 (1952).

Ono, Akimasa: Permanent strain in tube-wall yielding under internal pressure. Proc. Japan Acad. 28, 505—510 (1952).

Es wird vorausgesetzt: 1. Die bleibende Verzerrung setzt sich zusammen aus der radialen und tangentialen Verzerrungskomponente; diese sind lineare Funktionen der Verschiebungskomponenten. 2. Die Summe aus der plastischen und elastischen Verzerrung läßt sich darstellen allein durch die radiale Verschiebung. 3. Die bleibende Verzerrung wird hervorgerufen durch Gleiten längs Ebenen, die den Winkel zwischen radialer und tangentialer Richtung halbieren. 4. Die bleibende Verzerrung ist mit keiner Volumendehnung verbunden. 5. Die Spannung hängt nur vom elastischen Verzerrungsanteil ab und berechnet sich nach dem Hookeschen Gesetz. 6. Die Spannungsverteilung ist rotationssymmetrisch; das Fließen erfolgt, wenn die Differenz zwischen tangentialer und radialer Spannung die Fließgrenze erreicht hat. — Die Formeln für die Spannungen im elastischen und plastischen Rohrteil werden angegeben und die bleibende Verzerrung nach der Entlastung diskutiert.

R. Moufang.

Fastov, N. S.: Zu den Gleichungen der Plastizitätstheorie unter Berücksichtigung der Temperaturänderung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 67—70 (1952) [Russisch].

Bezugnehmend auf frühere Arbeiten des Verf. (vgl. z. B. dies. Zbl. 45, 266) wird der Einfluß einer Temperaturänderung auf die Gleichungen der Plastizitätstheorie dadurch berücksichtigt, daß im Ausdruck für die freie Energie neben den Gliedern zweiter Ordnung in den Deformationskomponenten (mit temperaturunabhängigen Koeffizienten) noch Glieder erster Ordnung in diesen Komponenten hinzugefügt werden, die proportional der Abweichung $T - T_0$ der lokalen Temperatur gegenüber der Ausgangstemperatur gesetzt werden. Die Berechnung der Spannungsgrößen ergibt dann ebenfalls eine lineare Temperaturabhängigkeit im plastischen Bereich und eine ebensolche Abhängigkeit der Fließgrenze. *F. Sauter.*

● **Hansen, H. M. und P. F. Chenea:** Mechanics of vibration. New York und London: J. Wiley and Sons, London: Chapman and Hall, 1952. 417 S. mit 345 Abb. \$ 8,00.

Das Buch enthält eine kurzgefaßte Einleitung in die Grundlagen der Schwingungslehre. Nach Behandlung der kinematischen Grundbegriffe werden im ersten Teil Schwingungen von einem Freiheitsgrad behandelt, wobei sich die Verf. auf lineare Systeme (gerade Feder- und Dämpfungskennlinie) beschränken. Der zweite Teil enthält die Schwingungen der Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden; hier werden auch die Lagrangschen Gleichungen 2. Art und die

komplexe Darstellung der Schwingungsvorgänge erläutert. Als Beispiele werden u. a. Schwingungsdämpfer, Fundamentalschwingungen und Drehschwingungen von Verbrennungskraftmaschinen untersucht, wobei allerdings auf die Fragen, die mit der Reduktion der Kurbelwelle auf eine gleichwertige glatte Welle und mit der Reduktion der Pleuel und Kolben zusammenhängen, nicht eingegangen wird. Zur Lösung der Frequenzgleichung werden die Verfahren von Holzer-Tolle und Graeffe benutzt und an Beispielen erläutert. Im dritten Teil werden zunächst die einfachsten Fälle der Schwingungen der Kontinua (Saite und Stab) untersucht, wobei der Leser auch mit dem Verfahren von Rayleigh bekannt gemacht wird. Es folgen Einschaltvorgänge bei Systemen von einem Freiheitsgrad; an dieser Stelle werden auch die im ersten Teil noch nicht behandelten freien gedämpften Schwingungen besprochen. Der Text des Buches schließt mit einer kurzen Behandlung der freien ungedämpften Schwingungen bei gekrümmter Federkennlinie; erzwungene Schwingungen (Kippung) fehlen. Es folgt eine reichhaltige Aufgabensammlung (rd. 300 Aufgaben), durch die sich das Werk von anderen elementaren Lehrbüchern der Schwingungslehre unterscheidet.

A. Weigand.

Lee, E. H.: On a „paradox“ in beam vibration theory. Quart. appl. Math. 10, 290—292 (1952).

In seinem Buch „Vibration problems in engineering“, New York 1937, S. 355 behandelt S. Timoshenko das folgende Problem. Eine konstante Vertikalkraft P bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v über einen elastischen Balken von der Länge l , der an seinen beiden Enden frei auf zwei Stützen gelagert ist. Die über den Balken hinweggleitende Kraft regt denselben zu Schwingungen an, bei denen fortgesetzt eine Umwandlung von kinetischer Energie in potentielle und umgekehrt stattfindet. Das „Paradoxon“, auf welches Verf. hinweist, betrifft die Entstehung dieser Energien, da die Kraft P keinen Weg in ihrer Richtung zurückgelegt hat, wenn sie den Balken von seinem Anfang bis zu seinem Ende durchlaufen hat. Verf. zeigt, daß bei einer sorgfältigen Durchführung der Energiebilanz das Paradoxon nicht existiert. Stellt $y = y(x, t)$ die Biegelinie des Balkens dar, so ist die Leistung, welche die im Punkte $x = vt$ wirkende Kraft P im Augenblick t an den Balken abgibt, durch $P \partial y / \partial t$ gegeben, aber nicht durch $P dy/dt$, wo $dy = \partial y / \partial t + v \partial y / \partial x$ die vollständige Ableitung von y nach t bedeutet. Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{\gamma A}{2g} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \right] = P \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß in jedem Augenblick die Geschwindigkeit der Zunahme der Summe aus kinetischer und potentieller Energie gleich der von der Kraft P an den Balken abgegebenen Leistung ist. Am Schluß weist Verf. auf ein ähnliches Beispiel hin, dessen Behandlung ebenfalls eine Unterscheidung zwischen partieller und vollständiger Ableitung erfordert.

W. Quade.

Spiegel, M. R.: The random vibrations of a string. Quart. appl. Math. 10, 25—33 (1952).

In einer festen Ebene seien $n + 2$ materielle Punkte gleicher Masse gegeben. Jeder Punkt sei mit den folgenden durch eine masselose Feder verbunden, der Anfangs- und der Endpunkt seien fest. Ferner mögen auf dieses Punktsystem zufällige Kräfte wirken, so daß das System in Schwingungen gerät. Verf. berechnet die charakteristische Funktion für die Summe der Quadrate der Abweichungen der Verrückungen des Systems von einer gegebenen Anfangslage und gewisse Mittelwerte, die das durchschnittliche Verhalten der n schwingenden Punkte beschreiben. Durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ werden die entsprechenden Größen für eine schwingende Saite erhalten. Die Resultate stimmen mit denen überein, die G. E. Uhlenbeck und G. A. van Lear (dies. Zbl. 3, 284) auf anderem Wege erhalten haben.

W. Rinow.

Míšek, Karel: Analogue systems for free modes of oscillations of beams. Czechosl. J. Phys. 1, 185—189 (1952).

Bei komplizierten Schwingungssystemen ist es oft von Vorteil, ein vereinfachtes Ersatzsystem zu betrachten, das in der Nähe des Resonanzbereiches sich ähnlich verhält, wie das wirklich vorliegende System. Hierzu ist zunächst erforderlich, daß das Ersatzsystem bezüglich Integralaussagen mit dem Hauptsystem übereinstimmt, es muß in jedem Augenblick sowohl die potentielle, als auch die kinetische Energie bei beiden Systemen den gleichen Wert aufweisen; ferner müssen Eigenfrequenz und Dämpfung übereinstimmen. Schließlich muß die Amplitude des durch eine be-

stimmte Harmonische der Erregerkraft in Schwingung versetzten Hauptsystems mit der Amplitude des Ersatzsystems übereinstimmen (der Vergleich bezieht sich immer nur auf den Resonanzbereich in der Umgebung einer bestimmten Eigenfrequenz des Hauptsystems). Verf. stellt die zugehörigen Formeln für die freien Longitudinal- und Drillschwingungen von prismatischen Stäben zusammen. *H. Neuber.*

Ghosh, M. and S. K. Ghosh: Dynamics of the elastic vibration in a bar excited by longitudinal impact. II. Study of the time of collision. Indian J. Phys. **26**, 463—471 (1952).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (Teil I, dies. Zbl. **42**, 427), in welcher der Longitudinalstoß einer elastisch-nachgiebigen Last auf einen elastischen Stab mit Hilfe der Operatorenmethode behandelt wurde. In vorliegender Arbeit wird der Druckverlauf während des Stoßes sowie die Berührungsdauer näher untersucht. Diese Ergebnisse sollen insbesondere dazu dienen, die Messung der elastischen Eigenschaften mancher Stoffe zu erleichtern, und ferner die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen der molekularen Struktur und den mechanischen Eigenschaften der Materie zu erweitern. Die Ergebnisse zeigen eine starke Schwellbewegung des Druckes während der Berührungszeit. Die Untersuchung der Abhängigkeit der Berührungszeit von den elastischen Eigenschaften der Last und des Stabes, der Stablänge und dem Massenverhältnis zeigt ein stark diskontinuierliches Verhalten, das sich aus Reflexionserscheinungen erklärt. *H. Neuber.*

Federhofer, Karl: Über die Eigenschwingungen der Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa **161**, 89—105 (1952).

Bezeichnen u , v , w die Verschiebungen eines Punktes der Schalenmittelfläche, und zwar u längs der Erzeugenden, v in Richtung der Tangente an einen Kreisschnitt und w in Richtung des Radius, führen die Bedingungen für das Gleichgewicht der Spannungen eines durch die Trägheitskräfte belasteten Schalenelements zu drei Differentialgleichungen für u , v , w (siehe z. B. W. Flüge, Statik u. Dynamik der Schalen, Berlin 1934, S. 229). Die Erweiterung dieser Gleichungen auf veränderliche Wanddicke wurde später von H. Egger angegeben (dies. Zbl. **20**, 363). — In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß selbst bei Annahme einfachster Gesetze für die Wandstärke δ eine Lösung in geschlossener Form nicht möglich ist. Bei Beschränkung auf eine längs der Erzeugenden des Zylinders nur schwache Änderung von δ gelingt es, deren Einfluß auf die Kreisfrequenzen der axialsymmetrischen Eigenschwingungen in relativ einfacher Weise zu ermitteln. *R. Gran Olsson.*

Hydrodynamik:

● **Nielsen, J.: Lehrbuch der rationellen Mechanik. Teil III: Vektoranalysis. Potentialtheorie. Kontinuierliche Medien. Strömungen. Komplexes Potential.** Kopenhagen: Gjöellerup 1952. 197 S. [Dänisch].

Die beiden ersten Bände dieses Lehrbuches haben die Bezeichnungen Statik (erschienen 1933 und 1943) und Dynamik (erschienen 1934 und 1945). Der vorliegende Band, der von Vorlesungen an der Dänischen Technischen Hochschule und der Universität in Kopenhagen herrührt, hat die Aufgabe, den nötigen mathematischen Hintergrund für ein Studium der kontinuierlichen Medien und die grundlegenden Theoreme und Annahmen der Mechanik zu geben. Darum sind keine Probleme mit speziellen geometrischen Begrenzungen erörtert mit Ausnahme der Umströmung des Kutta-Joukowskischen Profils am Schluß des letzten Kapitels. Die Anforderungen an Klarheit und Strenge der Darstellung sind sehr hoch. Das Lehrbuch dürfte daher eine wertvolle Ergänzung zu den vorhandenen Standardwerken über die Kontinuitätsmechanik bilden. Es sind nur Probleme der linearen Elasti-

zität und Viskosität in Betracht gezogen. Die dem Buch beigelegten Untertitel bezeichnen die fünf Kapitel, die mit einem kurzen Anhang über Dyaden abgeschlossen werden. Das Lehrbuch scheint für Mathematiker, die sich nach den Anwendungen der Mathematik in der Mechanik umschauen wollen, besonders geeignet zu sein.

R. Gran Olsson.

● Prandtl, Ludwig: *Essentials of fluid dynamics. With applications to hydraulics, aeronautics meteorology and other subjects.* Authorized transl. London-Glasgow: Blackie and Son, Ltd. 1952. X, 452 p. 35 s net.

Drescher, H.: Untersuchungen an einem symmetrischen Tragflügel mit spaltlos angeschlossenen Ruder bei raschen Änderungen des Ruderausschlags (ebene Strömung). Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch. 6, 71 S. (1952).

Bolz, Ray E.: *Dynamic stability of a missile in rolling flight.* J. aeronaut. Sci. 19, 395—403 (1952).

Verf. stellt die Bewegungsgleichungen für einen Körper auf, der um seine Längsachse symmetrisch ist und um sie Rollbewegungen ausführt. Dabei werden Längs- und Drehbeschleunigungen zugelassen, doch nur für so kurze Zeitabschnitte, daß die Änderungen der Geschwindigkeiten noch verhältnismäßig gering bleiben. Außerdem wird eine eindeutige Bindung zwischen Längs- und Rollgeschwindigkeit angenommen (Beispiel: Raketen mit Flächendrall). Bei der Stabilitätsuntersuchung, die bei stärkeren Änderungen der Geschwindigkeit an mehreren Stellen in dem ganzen Geschwindigkeitsbereich durchzuführen ist, lassen sich die sechs Gleichungen nicht mehr wie im klassischen Fall in ein System für die Längs- und eines für die Querstabilität aufspalten, sondern bleiben gekoppelt. Bei gewissen Annahmen über die Größenordnung der Beiwerte läßt sich die Stabilität (kleiner Schwingungen) auch für Überschallgeschwindigkeiten erörtern. Unter anderem zeigt sich, daß Flossenschiefe und Schubsschiefe im Überschall die Stabilität nicht beeinflussen, während von anderen Unsymmetrien (z. B. der Massenverteilung) das Gegenteil bekannt ist.

U. T. Bödewadt.

Phythian, J. E.: *Some unsteady motions of a slender body through an inviscid gas.* Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 301—317 (1952).

Die bekannte Theorie von Ward (dies. Zbl. 34, 117) wird auf einige nichtstationäre Strömungen ausgedehnt. Strömungen um Körper mit beliebigem Querschnitt werden dabei durch Verteilungen von Multipolen auf der Achse erfaßt. Die Fälle des in der Richtung seiner Achse beschleunigt bewegten und des pendelnden Drehkörpers werden ausführlich behandelt. Es ergibt sich, daß die von der beschleunigten Bewegung herrührenden Luftkräfte klein sind im Verhältnis zu den Luftkräften der stationären Bewegung, falls die Beschleunigung klein ist gegen U^2/l (U = Strömungsgeschwindigkeit, l = Länge des Körpers). Ein entsprechendes Resultat gilt für die oszillierende Bewegung.

C. Heinz.

Vălcovici, V.: *Sur le mouvement tourbillonnaire des fluides barotropes.* Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 4, 541—544 u. russische u. französ. Zusammenfassg. 544, 545 (1952) [Rumänisch].

Les équations du mouvement d'un fluide idéal, barotrope, sous l'action des forces de volume ayant l'expression $g_i = \partial U / \partial x_i$, $U = U(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, peuvent être mises sous la forme $\partial B / \partial x_i + \partial u_i / \partial t - u_i \times \text{rot } u_i = 0$, où $B = \frac{1}{2} q^2 + P - U$, $q^2 = \sum_i u_i^2$, $P = \int d\varphi / \rho$

(ρ = masse spécifique, p = pression), ce qui résulte d'ailleurs également de l'équation de Friedman. On en déduit que, dans un mouvement permanent, le fluide glisse sur des surfaces de tourbillon, ayant l'équation $B = C$ (const.) et dépendant d'un seul paramètre C . Pour que le mouvement soit possible, le vecteur tourbillon $\omega_i = \frac{1}{2} \text{rot } u_i$ doit satisfaire la relation $\text{rot}(u_i \times \omega_i) = 0$. Il s'ensuit que le mouvement laminaire permanent, d'un fluide incompressible, le champ des vitesses étant $u_1 = V(x_1, x_2, x_3) + \varphi_1$, $u_2 = \varphi_2$, $u_3 = \varphi_3$; $\varphi_i = \partial \varphi / \partial x_i$, $\Delta \varphi = 0$ n'est possible que si les conditions $V_3 \varphi_{12} - V_2 \varphi_{13} = 0$, $\dot{V}_3 \varphi_{22} - V_2 \varphi_{23} - V_{23} \varphi_2 - V_{23} \varphi_3 = 0$, $-V_2 \varphi_{33} + V_3 \varphi_{23} + V_{23} \varphi_3 + V_{22} \varphi_2 = 0$ ($\varphi_{ij} = \partial^2 \varphi / \partial x_i \partial x_j$, $\dot{V}_i = \partial V / \partial x_i$, $V_{ij} = \partial V / \partial x_i \partial x_j$). Cas particuliers: a) $\varphi = \text{const.}$ b) $\dot{V} = \text{const.}$ c) $\varphi_3 = V_3 = V_{22} = 0$.

Autoreferat.

Haque, S. M. A.: *On the stability of the motion of a viscous liquid flowing between two parallel plates.* Pakistan J. sci. Research 4, 17—19 (1952).

Die Frage, ob die Poiseuille-Strömung zwischen ebenen Wänden stabil gegenüber kleinen Störungen ist, blieb jahrelang umstritten, wobei insbesondere C. C. Lin und D. Meksyn auf der einen und C. L. Pekeris auf der anderen Seite gegen-

sätzliche Meinungen vertraten. Durch Einsatz elektronischer Rechenmaschinen ist das Problem im Sinne einer Instabilität entschieden worden. Trotzdem unternimmt es der Verf., offenbar in Unkenntnis neuerer Arbeiten, erneut den vermeintlichen Nachweis einer Stabilität der ebenen Poiseuille-Strömung gegenüber allen möglichen kleinen Störungen zu führen.

W. Wuest.

Dizioğlu, Bekir: Zur Theorie des Wärmeüberganges in parallelen Schmier-schichten. (Erste Mitteilung.) *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 17, 159—177 (1952).

In dieser ersten einer Reihe von Mitteilungen handelt es sich um die Bestimmung der thermischen Anlaufstrecke und die Temperaturverteilung in einer Schmierschicht zwischen zwei parallelen Platten, von denen die eine mit der Geschwindigkeit U bewegt wird, bei Erwärmung durch innere Reibung. Die dadurch gestellte erste Randwertaufgabe wird behandelt, wobei eine konstante Wandtemperatur gleich der Zuflustemperatur des Öles angenommen wird. Es ist zu ermitteln, welche Wärme im Ölfilm entwickelt werden muß, damit die beiden Platten die vorgegebene konstante Temperatur beibehalten. Dabei wird eine von der Temperatur unabhängige konstante Zähigkeit angenommen und das Problem als ein zweidimensionales angesehen. Die exakte Lösung wird durch die Fouriersche Theorie der Wärmeleitung gegeben. Zur numerischen Durchführung wird vom Verf. ein Näherungsverfahren entwickelt und der Beweis für die Eigenwertverteilung erbracht. Das Näherungsverfahren besteht darin, daß die in Wahrheit parabolisch verlaufende Geschwindigkeitsverteilungskurve durch einen geeignet gewählten Polygonzug ersetzt wird, der durch einen Parameter q ($0 \leq q \leq 1$) gekennzeichnet wird. Das einschlägige Schrifttum wird angegeben.

Th. Pöschl.

Dizioğlu, Bekir: Zur Theorie des Wärmeüberganges in parallelen Schmier-schichten. (Zweite Mitteilung.) *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 17, 259—281 (1952).

Diese 2. Mitteilung enthält die weitere Ausführung der in der ersten (s. vorstehend. Referat) gegebenen Entwicklungen für die Zahlenwerte $q = 1/4, 1/2$ und 1. Die Fourier-Besselschen Entwicklungskoeffizienten werden mit Hilfe der Eulerschen Summenformel bestimmt und die erhaltenen Temperaturverteilungen berechnet und graphisch dargestellt.

Th. Pöschl.

● **Aržanikov, N. S. und V. N. Mal'cev:** *Aerodynamik*. Moskau: Staatsverlag für die Verteidigungsindustrie 1952. 480 S. R. 12,50 [Russisch].

Le présent livre est destiné à servir de manuel aux élèves des écoles d'ingénieurs d'aéronautique. Les 9 premiers chapitres sont consacrés à l'exposé des résultats classiques de la cinématique et de la dynamique des fluides parfaits compressibles: équations fondamentales sous des formes diverses; théorème de Bernoulli; écoulement à potentiel (cas du plan avec les applications de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe); théorème de Joukowski sur la portance; théorie plane de l'aile d'envergure infinie (signaux pp. 178—184 le calcul approché, dû à Noujine, de l'écoulement autour d'un profil donné quelconque; la méthode de Noujine semble rapide et efficace); théorie des sillages plans; théorie de la résistance tourbillonnaire (signaux, p. 194, une brève analyse des travaux de Kamenskoy); écoulements laminaires des fluides visqueux; solutions classiques des équations de Navier, notions élémentaires sur la similitude et la turbulence. Le chapitre X traite de la couche limite; c'est ici que commence l'exposé des questions moins traditionnelles. Notons, dans cet ordre d'idées, la méthode de Lojciensky pour l'étude approchée des couches laminaire et turbulente sur des profils courbes, qui semble très utilisée par les techniciens russes; la théorie de Lojciensky-Dorodnitsine pour la détermination des points de transition le long des profils courbes. Le chapitre XI expose la théorie de l'aile d'envergure finie. A côté des résultats classiques, mentionnons ici la méthode approchée de résolution de l'équation intégral-différentielle du problème, due à Noujine (pp. 302—310). Les chapitres XII, XIII et XIV résument l'essentiel de la dynamique classique des gaz, avec quelques éléments indispensables de la thermodynamique. Comme applications, on trouvera, au chapitre XV, la théorie de l'onde normale de choc, au chapitre XVII celle de l'onde de choc oblique; le chapitre XVI résume rapidement les éléments de la théorie des écoulements supersoniques plans, avec les applications graphiques de la méthode des caractéristiques. Le chapitre XVIII traite de la théorie de l'aile dans un courant subsonique; on trouvera ici l'exposé de quelques théories récentes. Après avoir étudié le problème linéarisé, les AA. résument la théorie de Tchaplyguine et la variante de celle-ci, due à Christianovitch. Puis les AA. évaluent l'influence de la compressibilité au moyen des calculs approchés de Bou-rago. En ce qui concerne les variations que subissent les vitesses induites du fait de la compressibilité, on lira avec intérêt le bref résumé des travaux de Simonov et Christianovitch (pp. 405—420). Mentionnons enfin, l'étude des caractéristiques aérodynamiques du profil au

delà du domaine critique. Le chapitre XIX étudie la théorie des profils dans le domaine supersonique. On trouvera ici l'analyse de plusieurs travaux récents russes. — On peut regretter que les AA. se soient bornés à résumer, sans les développer, les mémoires récents de leurs compatriotes. La bibliographie étrangère est souvent sacrifiée. *J. Kravtchenko.*

● **Krasil'sčikova, E. A.: Der Flügel endlicher Spannweite in einer kompressiblen Strömung. (Moderne Probleme der Mechanik.)** Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 158 S. R. 4,50 [Russisch].

La présente monographie est consacrée à l'exposition systématique des recherches de l'A. et de ses élèves; aussi bien, on n'y trouve pas de bibliographie étendue des travaux étrangers sur le même sujet. — Considérons une aile mince, de faible courbure, peu différente du plan $z = 0$ du trièdre $Oxyz$ qui lui est invariablement lié. Le corps se déplace d'un mouvement de translation uniforme $u \vec{x} > a \vec{x}$ (a est la vitesse du son) au sein d'un fluide compressible emplissant l'espace. Le champ des vitesses du fluide dérive du potentiel: $\varphi_0(x, y, z)$. Le mouvement ci-dessus est faiblement troublé (de telle sorte que la surface même de l'aile peut subir des déformations) par une perturbation des vitesses dérivant du potentiel: $\varphi_1(x, y, z, t)$. Pour les régimes linéarisés, rappelons que φ_0 et φ_1 satisfont respectivement à :

$$(1) \quad a^2 \Delta \varphi_0 - u^2 \partial^2 \varphi_0 / \partial x^2 = 0; \quad (2) \quad a^2 \Delta \varphi_1 - u^2 \partial^2 \varphi_1 / \partial x^2 - \partial^2 \varphi_1 / \partial t^2 - 2u \partial^2 \varphi_1 / \partial x \partial t = 0,$$

Soient: Σ , le contour apparent de l'aile sur Oxy ; Σ_1 la surface tourbillonnaire (que l'on confondra avec son contour apparent sur Oxy) en forme de bande à bords parallèles à Ox ; Σ_2 , la section par Oxy du domaine extérieur à $\Sigma + \Sigma_1$, limité par le front de l'onde. Les hypothèses simplificatrices habituelles conduisent alors aux problèmes aux limites ci-après. Problème A (ou du régime permanent): trouver, pour $z \geq 0$, une solution de (1) telle que: $\partial \varphi_0 / \partial z|_{z=0} = A_0(x, y)$ dans Σ (A_0 étant une donnée); $\varphi_0 = 0$ sur le front de l'onde; $\varphi_0(x, y, 0) = 0$ dans Σ_2 . Problème B (ou du régime variable): trouver une solution de (2) telle que: $\partial \varphi_1 / \partial z|_{z=0} = A_1(x, y) f[t + \alpha(x, y)]$ dans Σ (A, f α étant des données); $\partial \varphi_1 / \partial t|_{z=0} + u \partial \varphi_1 / \partial x|_{z=0} = 0$ dans Σ_2 ; $\varphi_1(x, y, 0, t) = 0$ dans Σ_2 ; $\varphi_1(x, y, z, t) = 0$ sur le front de l'onde. — Pour résoudre ces problèmes, l'A. part de la solution fondamentale de (2)

$$(3) \quad \varphi^*(x, y, z, t) = C R^{-1} f_1[T - R a / (u^2 - a^2)] + C R^{-1} f_1[T + R a / (u^2 - a^2)]$$

où $T = t + \alpha_1 - u x / (u^2 - a^2)$, $R^2 = x^2 - (u^2/a^2 - 1)(y^2 + z^2)$, f_1 une fonction arbitraire, C et α_1 des constantes arbitraires; à noter que (3) contient comme cas particuliers, plusieurs solutions élémentaires classiques de la théorie des ondes. L'idée de l'A. consiste alors à former une solution de (2) en remplaçant, dans (3), C par une fonction arbitraire des variables auxiliaires ξ et η , en posant dans (3): $f = f_1$, en prenant $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ et en intégrant φ^* dans un domaine convenable en ξ et η . Les conditions aux limites permettent alors de déterminer C dans une portion de Oxy et de déduire de là φ_1 dans certaines régions de ce plan; il reste à étendre ce calcul de φ_1 à tout le plan Oxy . Il va de soi que le problème se simplifie pour φ_0 . — Dans le cas du problème A, la question se ramène à la résolution d'une équation intégrale, réductible dans certains domaines à l'équation classique d'Abel; les résultats sont particulièrement satisfaisants, au point de vue mathématique, dans le cas des ailes présentant un faible allongement. La même méthode permet: 1) d'étudier la surface Σ_1 dans le cas où la condition de Joukowski-Tchaplyguine est satisfaite sur le bord de fuite. 2) de discuter la répartition des pressions sur l'aile. Ces généralités sont illustrées par de nombreux exemples de profils symétriques pour lesquels les calculs ont pu être explicités: ailes fléchées, ailes semi-elliptiques, ailes hexagonales. Des extensions sont possibles au cas d'ailes d'épaisseur non nulle. — L'étude du problème B est principalement abordée dans l'hypothèse où $f(t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha')$, en tenant compte des petites déformations du corps. Si l'envergure devient infinie on retrouve les résultats classiques d'Ackeret et de Prandtl. Mais d'une manière générale, les conclusions sont ici beaucoup moins simples que dans le cas du problème A. *J. Kravtchenko.*

● **El Badraway, Rashad M.: Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit.** Diss. Zürich: Verlag Leemann 1952. 90 S., Fr. 15,00.

Zunächst werden die Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für die ebene Platte im Bereich der Mach-Zahlen von 1,2 bis 10 nach der strengen, nichtlinearen Theorie (unter Vernachlässigung der Reibung) berechnet und tabuliert. Der Vergleich mit den Ergebnissen der linearen Theorie nach Ackeret gibt gute Übereinstimmung bei Anstellwinkeln bis zu 10° und nicht zu hohen Mach-Zahlen. Nach einer eingehenden Untersuchung der Durchkreuzung, des Einholens und der Reflexion von Verdichtungsstößen und Verdünnungswellen wird dann sowohl die nichtlineare als auch die lineare Theorie der ebenen Platte auf ein aus ebenen Platten bestehendes Gitter erweitert. Vorzügliche Schlierenaufnahmen der Strömung zwischen zwei ebenen Platten bestätigen die lineare Theorie und zeigen das Zusammentreffen von Verdichtungsstößen und Verdünnungswellen. Außerdem wird eine lineare Theorie für das nichtstationäre Problem einer plötzlichen kleinen Änderung des Anstellwinkels eines ebenen Plattengitters mittels der Methode

der „instationären Quellen“ entwickelt. Schließlich wendet der Verf. seine Ergebnisse auf die Berechnung des Wirkungsgrads eines Überschallpropellers an und schätzt hierbei auch den Reibungs- und Dickeneinfluß ab. *R. Sauer.*

Courant, Richard: Boundary value problems in modern fluid dynamics. (Summary.) Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 277—279 (1952).

● **Charnes, Abraham:** Wing-body interaction in linear supersonic flow. Urbana, Illinois 1952. (Abstract of a thesis).

Chang, Chieh-Chien and Jack Werner: A solution of the telegraph equation with application to two dimensional supersonic shear flow. J. Math. Physics 31, 91—101 (1952).

The linearized problem of two-dimensional supersonic shear flow is reduced, in a particular case of Mach number profiles, to the telegraph equation. By applying Riemann's method of integration, one obtains an integral relation where some of the Cauchy data are the unknown which one has to determine. In this way, the integral relation becomes a Volterra integral equation of the first kind. Author applies Laplace transform technique to solve this integral equation. Some examples (shear flow over a wedge and a parabolic arc profile) are discussed. *R. Sauer.*

Batchelor, G. K.: Turbulent motion. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 15, 101—141 (1952).

Pugh, Emerson M., R. J. Eichelberger and Norman Rostoker: Theory of jet formation by charges with lined conical cavities. J. appl. Phys. 23, 532—536 (1952).

Bragard, Lucien: Sur une relation entre la densité d'une masse fluide et la pesanteur superficielle. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2341—2343 (1952).

Durch Vergleich der Reihenentwicklungen nach Potenzen des reziproken Abstands für das Newtonsche Potential einer heterogenen Gleichgewichtsfigur mit dem mittels der Greenschen Formel transformierten Potentialausdruck erhält Verf. eine Integralrelation, deren Lösungen die gesuchte Beziehung zwischen Dichte und Schwerkraft liefern. Als Anwendung kommt die von Poincaré gewonnene Beziehung zwischen Masse, Volumen, Winkelgeschwindigkeit und Oberflächenintegral der Schwerkraft. *E. Hölder.*

Sokolov, Ju. D.: Filtration ohne Unterstützung aus einem unkolmatierten Kanal von trapezoidalem Querschnitt in homogenem Grunde. Ukrain. mat. Žurn. 4, 65—96 (1952) [Russisch].

Barrett, L. C. and C. J. Thorne: Oscillations of the gas bubble produced by an underwater explosion. Studies appl. Math. 3, 62 p. (1952).

Wärmelehre:

● **Allis, William P. and Melvin A. Herlin:** Thermodynamics and statistical mechanics. (Internat. Ser. in Pure and Appl. Science.) London: McGraw-Hill, Ltd., 1952. VIII, 239 p. 48 s.

Das vorliegende Buch ist aus einer Kursvorlesung entstanden, die als Einführung für Studierende der Physik in Thermodynamik und statistische Mechanik gehalten wurde. Als Einführung ist das Buch ausgezeichnet geeignet. Unterstützt wird die unterrichtende Tendenz durch viele Tabellen, die dem Leser ein Gefühl für die experimentellen Werte vermitteln, sowie durch eine Reihe einfacher Aufgaben, deren Lösung das Verständnis des Stoffes vertiefen soll. Es werden nur verhältnismäßig wenig Fragestellungen aus dem großen Gebiet herausgegriffen, diese aber werden gründlich besprochen. Nach einer Einführung in die Thermodynamik werden die Anfangsgründe der statistischen Mechanik auf klassischer Grundlage behandelt. Der Einfluß der Quantentheorie wird an den einfachsten, bekannten Beispielen erörtert. *G. Leibfried.*

Fényes, Imre: Die Anwendung der mathematischen Prinzipien der Mechanik in der Thermodynamik. *Z. Phys.* **132**, 140—145 (1952).

Verf. gibt eine formale Abbildung der phänomenologischen Thermodynamik auf die analytische Mechanik an, in der folgende Größen einander entsprechen: $q_1 = V$, $p_1 = P$, $\dot{q}_2 = T$, $p_2 = S$, $L(q_i, \dot{q}_i) = -F(V, T)$, $H(q_i, p_i) = E(V, S)$, ($i = 1, 2$). Die Zustandsgleichungen $T = f_1(V, P)$ und $S = f_2(V, P)$ erscheinen dabei als nichtintegrierte Zwangsbedingungen. Eine dazugehörige „Quantenthermodynamik“ der Gleichgewichtszustände ($\Delta q_i \Delta p_i \cong h$) kann es nicht geben, weil die kanonischen Variablen p_1 und q_2 nicht auftreten. Indem nun zu $-F$ und E je ein weiterer Term $-f(q_i, \dot{q}_i)$ bzw. $+e(q_i, p_i)$ hinzugefügt wird, entsteht eine Verallgemeinerung der Thermodynamik mit p_1 und q_2 , die vom Verf. als Thermodynamik irreversibler Vorgänge gedeutet wird.

G. Süßmann.

Fényes, Imre: Ergänzungen zur axiomatischen Begründung der Thermodynamik. I. Eine axiomatische Deutung des Begriffs „Intensitätsparameter“. *Z. Phys.* **134**, 95—100 (1952).

Die Axiome von Carathéodory und Ehrenfest-Afanassjew über Wärmewirkung und Temperatur werden auf sämtliche thermodynamischen Nahwirkungen und die dazugehörigen Gleichgewichtsparameter (Druck, chemische Potentiale) ausgedehnt.

G. Süßmann.

Hashitsume, Natsuki: A statistical theory of linear dissipative systems. *Progress theor. Phys.* **8**, 461—478 (1952).

Der Zusammenhang zwischen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse und den klassischen Theorien der Schwankungserscheinungen wird untersucht. Zugrunde gelegt wird die Verknüpfungswahrscheinlichkeit für zwei Zustände zu verschiedenen Zeiten, so wie sie Onsager als Funktion der Entropien der beiden Zustände und der Dissipationsfunktion angegeben hat. Daraus werden Verallgemeinerungen der Fokker-Planckschen und der Langevinschen Gleichung für die Brownsche Bewegung hergeleitet. Für kleine Abweichungen vom Gleichgewicht, bei welchen die Entropie als quadratische Funktion der Zustandsvariablen ausdrückbar ist, wird diese Gleichung integriert. Als Beispiele werden die Brownsche Bewegung des freien koloidalen Teilchens im homogenen isotropen Medium und die Wärmeleitung im eindimensionalen isolierten Stab behandelt.

J. Meixner.

Rysseberghe, Pierre van: États stationnaires à production minimum d'entropie dans les systèmes électrochimiques. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **38**, 1060—1067 (1952).

Mit den Methoden der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse werden zwei gleichzeitig an derselben Elektrode ablaufende elektrochemische Reaktionen vom Typ $X + e^- = X^-$, $Y + e^- = Y^-$ in Gleichgewichtsnähe untersucht.

J. Meixner.

Meixner, J.: Strömungen von fluiden Medien mit inneren Umwandlungen und Druckviskosität. *Z. Phys.* **131**, 456—469 (1952).

Es wird der Einfluß schnell ablaufender innerer Umwandlungen in fluiden Medien auf die hydrodynamischen Grundgleichungen und auf andere langsam ablaufende Umwandlungen untersucht. Unter Umwandlungen sind dabei chemische Reaktionen oder innere Anregungen der Moleküle oder dgl. zu verstehen; als schnell werden sie bezeichnet, wenn die Abweichungen vom jeweiligen Gleichgewichtszustand im strömenden Medium stets nur gering sind. In diesem Fall lassen sich die auftretenden Probleme ohne Benutzung der kinetischen Ansätze allein in Rahmen der irreversiblen Thermodynamik behandeln.

F. Sauter.

Rocard, Yves: Les phénomènes irréversibles. *Revue Sci.* **90**, 269—277 (1952).

Dutta, M.: On equation of state of real gases. *Proc. nat. Inst. Sci. India* **18**, 81—91 (1952).

Im Anschluß an frühere Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **44**, 238) über

die statistische Behandlung eines realen Gases wird hier für einatomige Gase eine neue Behandlungsmethode vorgeschlagen. Dabei werden die van der Waalsschen Kräfte nur insofern berücksichtigt, als sie eine geänderte Oberflächendichte und -energie des Gesamtgases hervorrufen. *F. Sauter.*

Price, P. J.: Classical theory of compressibility. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 54—56 (1952).

Durch eine geeignete Umformung wird aus der statistischen Mechanik eine Formel abgeleitet, welche die Kompressibilität eines beliebigen Systems von Atomen als Integralfunktion der Wechselwirkungsenergie von je zwei Teilchen gibt. In dieser Formel treten noch die Verteilungsfunktionen $n_2(r_1, r_2)$ bzw. $n_3(r_1, r_2, r_3)$ für die Anordnung von Gruppen aus zwei, bzw. drei Atomen auf. *F. Sauter.*

Truesdell, C.: On the viscosity of fluids according to the kinetic theory. Z. Phys. **131**, 273—289 (1952).

Die Arbeit stellt eine kritische Prüfung der verschiedenen Ansätze für die Spannungskomponenten und die Temperatur in Gasen unter Berücksichtigung ihrer Viskosität dar. Im besonderen werden die kinetischen Ansätze von Maxwell, Enskog, Kohler, Grad, Born und Green, Irving und Kirkwood hinsichtlich ihrer Konsequenzen für die thermische und kalorische Zustandsgleichung, sowie für die beiden Viskositätskoeffizienten (Stokessche Beziehung) untersucht. *F. Sauter.*

Chandrasekhar, S.: A statistical basis for the theory of stellar scintillation. Monthly Not. Roy. astron. Soc. **112**, 475—483 (1952).

Zur Erklärung der stellaren Scintillation wird angenommen, daß sich in einer Höhe von etwa 4 km in der Atmosphäre eine gestörte Schicht befindet, die bewirkt, daß eine durch sie hindurchgehende Wellenfront gewellt wird. Die beobachteten Erscheinungen werden dadurch erklärt, daß die gestörte Schicht turbulenter Natur ist, in der der Brechungsindex n unregelmäßigen Schwankungen unterliegt.

Es wird eine wechselseitige Beziehung $\overline{\partial n(r_1) \partial n(r_2) / \partial^2 n}$ der momentanen Schwankungen der Brechungsindizes in zwei verschiedenen Punkten r_1 und r_2 eingeführt. Unter der weiteren Annahme, daß die Turbulenz homogen und isotrop ist, ist die so definierte Korrektur nur eine Funktion $M(r)$ des Abstandes der beiden Punkte. Anschließend wird gezeigt, wie die statistischen Eigenschaften der gewellten austretenden Wellenfront sowie die angulare Dispersion der Wellennormalen in Termen der Funktion $M(r)$ ausgedrückt werden kann. Aus den bekannten Tatsachen der astronomischen Beobachtungen wird gefolgert, daß die beobachteten Erscheinungen mit ausreichender Genauigkeit erklärt werden können, wenn man eine turbulente Schicht von einer Dicke von größenordnungsmäßig 100 Meter annimmt. Man findet damit ein Mikromaß der Turbulenz von größenordnungsmäßig 10 cm und einen Wurzelwert der mittleren quadratischen Schwankung des Brechungsindex von der Ordnung $4 \cdot 10^{-8}$. *J. Picht.*

Daniels, H. E.: The statistical theory of stiff chains. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **63**, 290—311 (1952).

Als steife Ketten werden in der vorliegenden Arbeit irgendwelche Folgen von Einzelschritten verstanden, bei denen die Richtung und Länge der einzelnen Schritte durch statistische Gesetze mit der Richtung und Länge der vorhergehenden Schritte verknüpft sind. (Beispiele: Kettenmoleküle, Vielfachstreuprozesse usw.) Für solche steifen Ketten werden in der Arbeit verschiedene allgemeine Eigenschaften und Beziehungen abgeleitet, und zwar sowohl für den Fall ebener wie auch für den Fall räumlich angeordneter Ketten. *F. Sauter.*

Yang, C. N. and T. D. Lee: Statistical theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation. Phys. Review, II. Ser. **87**, 404—409 (1952).

Es wird das thermodynamische Verhalten eines realen Gases (in einer bereits mehrfach durchgeführten Weise) nach der statistischen Mechanik unter Verwendung

der „grand partition function“ (festgehaltene Temperatur, veränderliche Teilchenzahl und Energie des Gases) untersucht und mit der Mayerschen Kondensationstheorie in ihrer ursprünglichen Form verglichen. Besonderes Augenmerk wird dabei auf den mathematisch einwandfreien Grenzübergang zu einem unendlich großen Gasvolumen gelegt. *F. Sauter.*

Lee, T. D. and C. N. Yang: Statistical theory of equations of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model. Phys. Review, II. Ser. 87, 410—419 (1952).

Im Anschluß an den ersten Teil (vgl. vorsteh. Referat) wird gezeigt, daß ein Isingsches Atomgitter mit den zwei Spineinstellungen parallel und antiparallel zu einem äußeren Magnetfeld einerseits, ein gleiches Gitter mit besetzten und unbesetzten Gitterplätzen als sehr schematisches Modell eines Gases andererseits, zu mathematisch übereinstimmenden Zustandssummen führen. Man kann daher die bekannten Ergebnisse über Umwandlungspunkt usw. im ersten Fall auf den Kondensationsprozeß im letzten Fall übertragen. Dies wird für zweidimensionale Gitter durchgeführt. *F. Sauter.*

Mori, Hazime and Syû Ono: The quantum-statistical theory of transport phenomena. I. Progress theor. Phys. 8, 327—340 (1952).

Irving und Zwanzig [J. Chem. Phys. 19, 1173—1180 (1951)] haben eine Bewegungsgleichung für die Wignersche quantentheoretische Verallgemeinerung der Verteilungsfunktion im Phasenraum angegeben. Verff. übertragen, von dieser Gleichung ausgehend, ein von Kirkwood [J. Chem. Phys. 15, 72—76 (1947)] im klassischen Fall angegebenes Verfahren zur Herleitung der Boltzmannschen Integro-Differentialgleichung auf die Quantentheorie der Transporterscheinungen und vergleichen ihr Ergebnis mit der Gleichung von Uehling und Uhlenbeck (dies. Zbl. 6, 334). *G. Höhler.*

Eisenschitz, R.: Quantum hydrodynamics. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 804—806 (1952).

Eine von Irving und Zwanzig entwickelte Methode zur Berechnung hydrodynamischer Eigenschaften bei gegebener Verteilung der Quanten im Phasenraum wird angewandt, um die Kirkwoodsche klassische Behandlung der Transportphänomene quantenmechanisch zu verallgemeinern. *W. Macke.*

● **Bosworth, R. C. L.:** Heat transfer phenomena. Sydney: Associated General Publications 1952. XII, 211 p. 41 figs. \$ 6,—.

Resch, Daniel: Temperature bounds on the infinite rod. Proc. Amer. math. Soc. 3, 632—634 (1952).

Wenn an einem unendlich langen homogenen Stabe zu n verschiedenen Zeiten an n Stellen die Temperaturen gemessen werden, so ergeben sich daraus Schranken für die Temperatur an beliebiger Stelle und zu beliebiger Zeit, falls reiner Temperaturausgleich durch Wärmeleitung ohne Einwirkung von Wärmequellen angenommen wird. Verff. beweist z. B.: Ist $u = u(x, t)$ eine nichtnegative Lösung der Wärmeleitungsgleichung und $u(x_1, t_1) = c_1$, so gilt $u \leq c_1 \cdot H$ für $0 < t < t_1$ und $u \geq c_1 \cdot H$ für $t > t_1$ mit $H = H(x, t) = (t_1/t)^{1/2} \exp[-(x - x_1)^2/4(t - t_1)]$. *U. T. Bödewadt.*

Sestini, Giorgio: Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan. Rivista Mat. Univ. Parma 3, 3—23 (1952).

Eine planparallele Platte der Dicke a hat zur Zeit $t = 0$ an der einen Seite die Umwandlungstemperatur erreicht und wird von dieser Seite her weiter erwärmt, während die gegenüberliegende Fläche wärmeisoliert bleibt. Die Ebene mit der Umwandlungstemperatur verschiebt sich dann als Phasengrenze ins Innere der ursprünglichen Plattendicke, auf beiden Seiten gleicht sich unterdessen die Temperatur durch Wärmeleitung aus. Über den anfänglichen Temperaturverlauf und über die Heizleistung $F(t)$ als Funktion der Zeit werden einige physikalisch sinnvolle Ungleichungen vorausgesetzt. Dann ergibt sich für die Lage der Phasengrenze $\alpha(t)$ mit den Konstanten $B_0 B_1 B_2$ die Beziehung $\alpha(t) = F(t) + B_0 - B_1 W_1 - B_2 W_2$, worin B_0 von der Anfangstemperatur abhängt, während W_1 den Wärmehalt der umgewandelten Schicht $(0, \alpha)$ und W_2 den der noch im Anfangszustand befindlichen Restschicht (α, a) bedeutet. W_1, W_2

hängen also wiederum von $\alpha(t)$ ab. Hieraus entsteht eine Iterationsformel, indem man rechts in W_1, W_2 die vorausgehenden Näherungen für die Grenzabszisse und die Temperaturverteilung einsetzt. Verf. kann damit die Existenz und Einzigkeit der Lösung beweisen, und zwar für ein größeres Zeitintervall als früher Evans (dies. Zbl. 43, 411) in seinem etwas spezielleren Fall.
U. T. Bödewadt.

Elektrodynamik. Optik:

● **Mercier, A.:** *Leçons sur les principes de l'électro-dynamique classique. Préface de Louis de Broglie.* (Bibliothèque scientifique No. 23). Neuchâtel: Éditions du Griffon 1952. 74 p. 7,80 sfr.

Das kleine Büchlein will einige in der Literatur noch nicht ausgestorbene Irrtümer und Irreführungen ausmerzen helfen. Dazu wird ein kritischer Aufbau der Elektrodynamik durchgeführt unter Anerkennung von Bemühungen wie die Sommerfelds in seiner „Elektrodynamik“. Eine Reihe nachdenkenswerter Punkte wird angeschnitten. Selbstverständlich kommt auch die Frage der elektromagnetischen Einheiten ins Spiel. So darf angenommen werden, daß die Schrift zwar nicht in allen Teilen unwidersprochen bleiben wird, daß sie aber mit ihrer klaren Sprache die Klärung der Standpunkte fördern wird.
F. L. Bauer.

● **Hössjer, Gustav:** *On the postulates of electrodynamics.* Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Ries, 135—142 (1952).

Verf. leitet die Maxwell'schen Vakuumfeldgleichungen aus folgenden zwei Postulaten ab:

$$\iint (E_x dy dz + E_y dz dx + E_z dx dy + c H_x dt dx + c H_y dt dy + c H_z dt dz) = \pm 4\pi e$$

$$\iint (H_x dy dz + H_y dz dx + H_z dx dy - c E_x dt dx - c E_y dt dy - c E_z dt dz) = 0,$$

wobei über eine beliebige Fläche integriert wird, die ein Elementarteilchen der Ladung e umgibt. Die spezielle Lorentztransformation wird hergeleitet und abschließend ein einfaches Postulat gegeben, durch das die räumliche Struktur der Elektronen festgelegt wird; sie erhalten im Ruhesystem Kugelgestalt.
G. Süßmann.

● **Hines, C. O.:** *Electromagnetic energy density and flux.* Canadian J. Phys. 30, 123—129 (1952).

Verf. verteidigt die von Macdonald eingeführte (von der Maxwell-Poyntingschen verschiedene) Definition des Energiestromes und der Energiedichte und gibt anschließend eine Modifikation der Macdonaldschen Energiestromdefinition, in die außer dem Vektorpotential auch noch das Skalarpotential eingeht und die den weiteren Vorteil hat, daß der Energiestrom für gekreuzte statische Felder verschwindet. Ref. möchte einwenden, daß die neuen Definitionen keine lorentzinvariante Impulsstromdichte ermöglichen; außerdem verliert die Energiedichte ihren positiv definiten Charakter.
G. Süßmann.

● **Cullwick, E. G.:** *Electromagnetic momentum and Newton's third law.* Nature 170, 425 (1952).

Verf. macht die seit langem bekannte Feststellung, daß mit dem Poyntingschen Energiestrom gemäß der Einsteinschen Energie-Masse-Beziehung eine Impulsdichte verknüpft ist.
G. Süßmann.

● **Mason, M. and W. Weaver:** *The electromagnetic field.* Reprint. New York: Dover Publications 1952. XIII, 390 p. \$ 3,95.

Das Buch gibt eine Einführung in die Theorie der Elektrizität bis zu den Maxwell'schen Gleichungen und ihren einfachsten Anwendungen. Es stellt einen unveränderten Nachdruck der 1929 erschienenen 1. Auflage dar. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt auf den ersten drei Kapiteln, die sich mit dem Coulombschen Gesetz, Elektro- und Magnetostatik befassen. Es wird das experimentell unmittelbar Beobachtbare, die Kraftwirkung einzelner Ladungsträger und Gruppen von Ladungsträgern aufeinander in allen drei Kapiteln in den Vordergrund gestellt und sehr sorgfältig die Schritte gezeigt, die von den Beobachtungstatsachen über ein Kraftgesetz zur Theorie ponderabler Körper führen. Der Feldbegriff, obwohl von Anfang an eingeführt, erscheint nur als Hilfsgröße, ohne reale physikalische Bedeutung. Besonderer Wert wird auf das Herausstreichen des statistischen Charakters der Theorie ponderabler Körper gelegt, die kon-

tinuierlichen Dichten werden nicht a priori eingeführt, sondern aus Mittelwertbildungen über den wirklichen Potentialverlauf des aus Elementarladungen aufgebauten Körpers berechnet. Der Mehraufwand durch diesen Vorgriff auf die Elektronentheorie ist lohnend, da dadurch der Zusammenhang der Theorie mit dem wirklichen Aufbau der Materie deutlicher wird, als bei der üblichen idealisierten Darstellung der Elektrostatik. Weniger gut gelungen als diese drei ersten ist das letzte Kapitel, das sich mit den Maxwell'schen Feldgleichungen befaßt. Die schon in den vorangehenden Kapiteln gelegentlich geäußerte Kritik an der Realität des Feldbegriffes beherrscht hier vollends die Darstellung, nicht zu deren Vorteil. Die Begriffe Energie- und Impulsdichte, Energiestrom und Spannungen werden zwar eingeführt, aber sofort scharf kritisiert und bleiben, als Überbleibsel der Äthervorstellung hingestellt, in der von den Verf. gegebenen Darstellung leere Schemen. Die Lokalisierbarkeit der Energie wird auf Grund der Quantentheorie in Frage gestellt, und die Energie als nicht raum-zeitliche Funktion der Konstellation der Ladungsträger angesehen. Erscheint schon dem Ref. die konsequente Durchführung dieser Vorstellung im Hinblick auf Schwingungsvorgänge, die eine räumliche Loslösung von Energie- und Impulsbeträgen von den Quellen des Feldes bedingen, ohne Rückgriff auf das Fernwirkungsprinzip unmöglich, so hat doch auch die Entwicklung der Quantenelektrodynamik gezeigt, wie man die Quantenvorstellungen in die klassische Elektrodynamik einzufügen hat, ohne das logische Gebäude dieser Theorie zu ändern. Hier hätte eine Revision beim Neudruck not getan. Ebenso haben neuere Untersuchungen zur Elektrodynamik ponderabler Körper gezeigt, daß die von den Verf. gebrauchte Zurückführung des Feldes auf nur zwei Feldvektoren (\vec{E} und \vec{B}) unzweckmäßig ist. — Die Darstellung benutzt durchweg den Vektorkalkül, ferner wird erfreulich oft die Zweckmäßigkeit von Reihenentwicklungen aufgezeigt. In einem mathematischen Anhang ist, unabhängig vom Text, eine knappe Darstellung der Vektoranalysis, Integraltransformationen und Theorie der Vektorfelder beigelegt. Am Schluß jeden Abschnitts befinden sich eine Reihe nicht zu schwerer Übungsaufgaben. F. Beck.

● **Ollendorff, Franz: Berechnung magnetischer Felder.** (Technische Elektrodynamik. Band I.) Wien: Springer-Verlag 1952. X, 432 S. mit 287 Textabb.

Das vorliegende Buch ist das erste einer auf etwa 6 Bände veranschlagten Reihe. Wie im Vorwort vermerkt, wird angenommen, daß der Leser die Maxwell'sche Theorie kennt und daß er die in ihr auftretenden Begriffe und Definitionen des Magnetismus beherrscht. Im vorliegenden Buch soll also lediglich die Feldstruktur behandelt werden. Hierbei werden alle bisher bekannten Methoden herangezogen, insbesondere das Spiegelungsverfahren, die zeichnerischen Verfahren und die Berechnung mittels komplexer Funktionen. Wie ebenfalls im Vorwort bemerkt, stellen sich einer vollständigen Durchführung des so umrissenen Programms so große Schwierigkeiten entgegen, daß von einer vollständigen Beherrschung nicht die Rede sein kann. Der Verf. muß sich daher von vornherein mit relativ einfachen Aufgaben begnügen. Die Kapitel des Buches tragen die Überschriften: „Berechnung mittels reeller Funktionen“, „Berechnung mittels komplexer Funktionen“, „Das Vektorpotential magnetischer Felder“, „Elektrodynamische Integralkräfte“. Von den in diesen Kapiteln behandelten Aufgaben seien erwähnt: „Das erdmagnetische Feld“, „Der ionosphärische Ringstrom“, „Das Feld von Gleichstrom-Motorzählern“, „Das Magnetfeld leerlaufender Einzelpolmaschinen in elementarer Behandlung“, „Das Jochfeld von Einzelpolmaschinen“, „Das magnetische Feld im Nutenanker“, „Eisengeschirmte Spulen“, „Berechnung der Stirnkopfstrahlung von Wechselstrommaschinen“, „Magnetischer Widerstand überlappter Bleche“, „Das Nutenproblem“, „Das Polflankenfeld“, „Berechnung der Jochstrahlung von Transformatoren“, „Ankerrückwirkung in Wechselstrommaschinen mit Einzelpolen“, „Streuung von Autotransformatoren“, „Das Streufeld von Transformatoren mit Scheibenwicklung“, „Wechselstromerregte Spaltpole“, „Magnetische Spanplatten“, „Wirkungsweise des elektrodynamischen Meßwerkes“, „Elektrodynamische Kontaktkräfte“, „Drehspul-Meßwerke“. Wie diese Übersicht zeigt, handelt es sich hier um eine sehr ausführliche Anwendung von allgemeinen Rechenverfahren auf manche bisher kaum ausreichend behandelten Einzelprobleme. Die Behandlungsweise selber ist in manchen Fällen so weit geführt, daß numerische Ergebnisse hervortreten. Es wird nur eine beschränkte Schrifttumsliste beigelegt. Hieraus ist kaum ersichtlich, welche Probleme vorher schon in beträchtlichem Umfang anderweitig behandelt wurden. M. J. O. Strutt.

Lehnert, Bo: On the behaviour of an electrically conductive liquid in a magnetic field. Ark. Fys. 5, 69—90 (1952).

Verf. beschreibt magneto-hydrodynamische Experimente, bei denen eigenartige, physikalisch interessante Phänomene auftreten: Verschwinden von Oberflächenwellen und Turbulenz und scheinbare Veränderung der Zähigkeit sowie Auftreten von relativ stabilen Wirbeln in Quecksilber bei Anwesenheit eines Magnetfeldes. Dazu werden einige einfache Aufgaben durchgerechnet und allgemeinere qualitative Deutungsversuche gegeben. Das Verschwinden der Oberflächenwellen bei 10^4 Gauß ist durch Lundquist (vgl. folgendes Ref.) erklärt worden. G. Süßmann.

Lundquist, Stig: Studies in magneto-hydrodynamics. Ark. Fys. 5, 297—347 (1952).

Die Arbeit stellt die erste systematische Darstellung der sog. Magnetohydrodynamik dar, deren große Bedeutung für die Astrophysik von Alfvén entdeckt worden ist. I. Einleitend wird abgeschätzt, daß im Falle $BL\sigma\sqrt{\mu/\rho} > 1$ (wo L und B die Größenordnungen der linearen Ausdehnung bzw. der Intensität eines magnetischen Feldes sind, μ/μ_0 die Permeabilität, σ die elektrische Leitfähigkeit und ρ die Massendichte) eine starke Kopplung zwischen den elektromagnetischen und hydrodynamischen Erscheinungen eintritt. II. Es folgt die Aufstellung der hydrodynamischen und elektromagnetischen Grundgleichungen. III. Die Gleichungen werden durch Einführung der Vektoren $u = v + \mathcal{B}/\sqrt{\mu\rho}$ und $w = v - \mathcal{B}/\sqrt{\mu\rho}$ in eine symmetrische Form gebracht. IV. Es wird gezeigt, daß im Grenzfall $\sigma = \infty$ die Magnetlinien der Materieströmung genau folgen müssen. Im inkompressiblen Fall ist außerdem die Länge eines mitschwimmenden Feldlinienelementes der Feldstärke proportional. V. Es werden stationäre Zustände (mit Einschluß von Stabilitätsfragen) behandelt. In VI werden für sehr großes, aber endliches σ verschiedene Beschreibungen der langsamen Diffusion der Magnetlinien gegen die Materie diskutiert. Im Abschnitt VII werden Wellenerscheinungen, der stationäre Fluß und die Turbulenz behandelt. VIII bringt eine Diskussion der magnetohydrodynamischen Experimente (vgl. vorangehendes Ref.).
G. Süßmann.

Adirovič, Ė. I.: Zur Kinetik der Bildung und Relaxation einer Raumladung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 1085—1087 (1952) [Russisch].

The author discusses the effect on the exponential law for the decay of free space-charge of replacing Ohm's law by the law $\vec{j} = \sigma \vec{E} - D \text{ grad } \rho$, the latter term being a „diffusion current“ which even if small need not have small divergence. He finds the law

$$\rho = \frac{e^{-t/\tau_0}}{(4\pi Dt)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(x', y', z') \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4Dt} \right\} dx' dy' dz'.$$

This approximates to the exponential law if ρ does not vary much over distances of the order of the Debye distance. The argument is then extended to boundary layers. Further physical refinements are envisaged.
F. V. Atkinson.

Gross, B.: On linear electrical networks. (Preliminary note.) Anais Acad. Brasil. Ci. 24, 443—447 (1952).

Hauptanliegen der Arbeit ist der (in der vorliegenden Fassung dem Ref. an wesentlichen Stellen unzulänglich erscheinende) Versuch, die Eingangsadmittanz F sowie die Eingangsimpedanz $\bar{F} = F^{-1}$ eines eingeschwungenen Zweipols als Funktion des komplexen Frequenzparameters z durch über eine passende Kurve C erstreckte Integrale auszudrücken:

$$-F(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad -\bar{F}(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\bar{R}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta;$$

zwischen R und \bar{R} werden Relationen angegeben. Verf. stellt eine ausführlichere Darlegung in Aussicht.
A. Stöhr.

Bhattacharyya, Bimal Krishna: Admittance and transfer function of a multi-mesh resistance-capacitance filter network. Indian J. Phys. 26, 563—574 (1952).

Für die Übertragungsfunktion und den Eingangsleitwert eines Vierpols, der aus n gleichen hintereinandergeschalteten Vierpolen zusammengesetzt ist, die je aus einem Parallel- C und einem Serien- R bestehen, hatte E. W. Tschudi [Proc. I. R. E. 38, 309—310 (1950)] explizite Ausdrücke (Quotienten von Polynomen, in denen Binomialkoeffizienten auftreten) angegeben und mittels vollständiger Induktion über n bewiesen. L. Storch [Proc. I. R. E. 39, 1456—1458 (1951)] leitete dasselbe Resultat unter Benutzung von Hyperbelfunktionen her, und Verf. in der vorliegenden Arbeit benutzt zum gleichen Zweck Kettenbrüche. Analoge Entwicklungen gelten für solche abgeänderten Vierpole, in denen R und C die Plätze getauscht haben.
A. Stöhr.

● **Kahan, Théo:** Physique des guides d'ondes électromagnétiques. (Mém. Sci. phys., fasc. 52). Paris: Gauthier-Villars 1952. 100 p.

● **Muchmore, Robert B.:** *Essentials of microwaves*. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd. 1952. VII, 236 p. 36s.

Nadii, Antonio: Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche entro un cavo cilindrico riempito di dielettrico eterogeneo. *Matematiche* 7, 1—17 (1952).

Considerato un cavo limitato da due cilindri circolari concentrici e riempito da un mezzo con costante dielettrica inversamente proporzionale al quadrato della distanza dall'asse dei cilindri, l'A. riconduce a trascendenti note il calcolo dei modi simmetrici *TE* e *TM* che si propagano nel cavo e determina semplici limitazioni per la loro velocità. D. Graffi.

Agostinelli, Cataldo: Onde elettromagnetiche stazionarie in una cavità ellissoidale a tre assi con involucro metallico perfettamente conduttore. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 86, 85—99 (1952).

L'A. trova un'espressione analitica di una famiglia di soluzioni delle equazioni del campo elettromagnetico esprimenti onde stazionarie in un dielettrico omogeneo ed isotropo racchiuso da un involucro metallico perfettamente conduttore avente la forma di un ellissoide a tre assi. G. Lampariello.

Hafner, E.: Das vollständige System der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines zweiachsig anisotropen Parallelepipeds. *Acta phys. Austr.* 6, 209—218 (1952).

Ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen wird für die Lösungen der Hertz'sche sowie der Fitzgerald'sche Ansatz gemacht. Die zugehörigen Lösungen bezeichnet Verf. als *Z*-Typ bzw. als *G*-Typ, entsprechend der Beziehung $\mu \mu_0 \mathfrak{H} = i \omega \operatorname{rot} \mathfrak{Z}$ bzw. $\varepsilon_0 \mathfrak{E} = -i \omega \operatorname{rot} \mathfrak{G}$, wo \mathfrak{E} den Tensor der relativen Dielektrizitätskonstanten bedeutet, für den unter der vom Verf. getroffenen Annahme, daß die Hauptachsen des Tensorellipsoids der DK mit den Richtungen der

Kanten des Parallelepipeds zusammenfallen sollen, die Beziehung $\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ gilt. Auf Grund der Randbedingungen ergibt sich für den *Z*-Typ: $Z_1 = z_1 \cos \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 \sin \alpha_3 x_3$;

$Z_2 = z_2 \sin \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 \sin \alpha_3 x_3$ mit $\alpha_j = n_j \pi / l_j$, wo l_j die Kantenlängen des Parallelepipeds sind. ($j = 1, 2, 3$; $n_j = 0, 1, 2, \dots$). Es wird die Eigenwertgleichung für $(k_0^2)_{n_1, n_2, n_3}$

aufgestellt. Mit diesen Eigenwerten ergeben sich $z_1 = \varepsilon_2 k_0^2 - \alpha_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \alpha_2^2 - \alpha_3^2$; $z_2 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} - 1 \right) \alpha_1 \alpha_2$

und mit Z_1, Z_2 aus dem Hertz'schen Ansatz die Komponenten von \mathfrak{E}^z und \mathfrak{H}^z . In entsprechender Weise werden aus dem Fitzgerald'schen Ansatz \mathfrak{E}^g und \mathfrak{H}^g abgeleitet, mit denen als allgemeine Lösung $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}^z, \mathfrak{H}^z\} + A \{\mathfrak{E}^g, \mathfrak{H}^g\}$ folgen, wo A als eine „Anregungskonstante“ bezeichnet wird. Anschließend wird der Nachweis der Vollständigkeit der gefundenen Lösungen erbracht, ausgehend von dem vom Verf. bereits früher abgeleiteten vollständigen System der Eigenschwingungen des optisch einachsigen Kristalls. J. Picht.

Derjugin, L. N.: Die Gleichungen für die Reflexionskoeffizienten von Wellen an einer periodisch unebenen Fläche. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 87, 913—916 (1952) [Russisch].

Verf. behandelt die Reflexion einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer unbegrenzten, ideal spiegelnden Fläche, die periodische Unebenheiten in Form rechteckiger Zacken oder — räumlich betrachtet — in Form von Rillen rechteckigen Querschnittes besitzt. Dabei wird angenommen, daß die ebene Welle senkrecht auf die spiegelnde Fläche trifft. Die Behandlung erfolgt für den Fall, daß der \mathfrak{H} -Vektor in der Längsrichtung der Rillen schwingt, der \mathfrak{E} -Vektor in ihrer Querrichtung. Bei der Behandlung der Reflexion an dieser so „gezackten“ Fläche wird auch die Reflexion an den zur Oberfläche senkrechten Flächen der Zacken berücksichtigt. J. Picht.

Schumann, W. O.: Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen um die Erde und die Signale des Blitzes. *Nuovo Cimento, Ser. IX* 9, 1116—1138 (1952).

Die Ionosphäre (D-Schicht) wird als homogene Schicht endlicher Leitfähigkeit mit scharfer Begrenzung angesetzt. Als Lösungen für die Wellengleichung des Hertz'schen Vektors treten (in Kugelkoordinaten) Produkte von Kugelfunktionen des Azimuts $P_\nu(\cos \theta)$ mit Besselfunktionen des Radius $\zeta^{1,2}(kr)$ auf (k Wellenzahl des Mediums). Zu jeder aufsteigenden Teilwelle in der Ionosphäre gehört eine Kombination von zwei Teilwellen (auf- und absteigend) im Luft-

raum; die Koeffizienten folgen aus den Stetigkeitsbedingungen an der Trennfläche. Offen ist noch die Ordnung ν der Kugel- und Besselfunktionen; aus den Randbedingungen am Luftraum ergibt sich aber eine charakteristische Gleichung für den Radialanteil. Bei beliebiger Wellenlänge hätte diese Gleichung viele Wurzeln. Verf. betrachtet nun sehr lange Wellen ($\lambda > 20$ km) und entwickelt die Radialfunktion $kr \cdot \zeta_{\nu}^{(2)}(kr)$ in eine Taylorreihe bis zum vierten Glied. In dieser Näherung ergibt sich eine einzige Wurzel r_0 , die sehr groß ist; der Realteil ist etwa $ka = 40000 \text{ km}/\lambda$ (a Erdradius). Hinzu kommt ein kleiner Imaginärteil, der nur bei endlicher Leitfähigkeit der Ionosphäre auftritt und eine Dämpfung bedeutet; die entsprechende Eindringtiefe in die Ionosphäre liegt zwischen $\frac{1}{2}$ km für $\lambda = 30$ km und 15 km für $\lambda = 30000$ km. Die zu den charakteristischen ν -Werten gehörigen Kugelfunktionen enthalten eine Singularität bei $\theta = \pi$ („singuläre Eigenfunktionen“ nach Sommerfeld), die die Strahlungsquelle darstellt. Paßt man die Lösung in der Umgebung dieser Stelle der Hertzschen Dipol-Lösung an, so erhält man die numerisch auswertbare Feldstärkeformel:

$$E_{r\text{eff}} \left/ \frac{V}{\text{m}} \right. = 0,3 \cdot \sqrt{\frac{N}{\text{kW}}} \cdot \frac{1}{H/\text{km}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{D}} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{400 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{D}{H} \sqrt{\frac{\kappa}{S/\text{m}} \cdot \frac{\lambda}{\text{km}}} \right\}$$

N Leistung, H Schichthöhe, λ Wellenlänge, D Entfernung, κ Leitfähigkeit der Ionosphäre. Diese Formel wird mit früheren, halbempirischen verglichen. Die Feldstärke steigt mit wachsender Wellenlänge stärker an als bei den Vergleichsformeln. Schließlich wird die Verformung der Blitzentladung bei der Ausbreitung studiert. Verschiedene zeitliche Stromabläufe werden angesetzt und ihr Fourierspektrum dann der Ausbreitung nach vorstehender Formel unterworfen. Für einen ganz kurzen Impuls nimmt der Maximalwert des Signals mit $D^{-7/2}$ ab, während sich die Signaldauer gleichzeitig mit D^2 verbreitert. Die Form des in einem aperiodischen Empfänger aufgenommenen Zeichens hängt in erster Linie von den Ausbreitungserscheinungen ab.

K. Rawer.

Schumann, Winfried Otto: Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen und der Blitzentladung um die Erde. Z. angew. Phys. 4, 474—480 (1952).

Siehe vorsteh. Referat. In der hier vorliegenden, kürzeren Arbeit wird eine etwas andere Ableitung gegeben, die von der Watsonschen Transformation ausgeht.

K. Rawer.

Vineyard, George H.: Geometrical optics and the theory of multiple small angle scattering. Phys. Review, II. Ser. 85, 633—636 (1952).

Verf. behandelt die Vielfachstreuung um kleine Winkel von Wellenstandpunkt im Rahmen des Huygensschen Prinzips durch Berücksichtigung der Phasenänderungen bei den einzelnen Streuprozessen. Er kommt zum gleichen Ergebnis wie die bisher stets benutzte Rechnung mit Hilfe der geometrischen Optik (Strahlenbahnen).

F. Sauter.

Mikaëljan, A. L.: Über ein Verfahren zur Lösung des inversen Problems der geometrischen Optik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 933—936 (1952) [Russisch].

Verf. geht aus von der Eikonalgleichung, angewandt auf ein Medium mit von x und y abhängendem variablen Brechungsindex n . Jede Lösung $S_1(x, y) = \text{const}$ der Wellenflächenschar ist auch Lösung der Gleichung $S_2(S_1(x, y)) = \text{const}$. Man kann nun fragen, welche Brechungsindexverteilungen ergeben untereinander gleiche Wellenflächen bei der Ausbreitung einer von einem Punkt ausgehenden Welle. Eine spezielle Lösung ist $n(x, y) = n_1(x, y) S(S_1(x, y))$, wenn $n_1 = n_1(x, y)$ die vorgegebene Brechungsindexfunktion ist, die einem gegebenen Medium entspricht, und $S_1 = S_1(x, y)$ eine Wellenflächenschar in diesem Medium. Jede beliebige Funktion S von $S_1(x, y)$, in obige Gleichung eingesetzt, ergibt eine Brechungsindexfunktion $n(x, y)$, d. h. ein Medium, in dem sich als Wellenflächen die gleichen Flächen wie in dem Medium vom Brechungsindex $n_1 = n_1(x, y)$ ergeben. Als Beispiel betrachtet Verf. das Maxwellsche Fischeauge bzw. ein scheibenförmiges Medium, dessen Brechungsindex durch $n_1 = 2/(1 + r^2)$ darstellbar ist und das die Eigenschaft besitzt, daß alle von einem Punkte des Randes der Scheibe ausgehenden Strahlen (zweidimensional betrachtet) sich in dem diametral gegenüberliegenden Randpunkt wieder treffen. Ist eine partikuläre Lösung $[n_1(x, y); S_1(x, y)]$ bekannt, so ergibt sich auch sofort nach der oben angegebenen Formel die allgemeine Lösung $[n(x, y); S_1(x, y)]$. Der Verf. geht dann näher darauf ein, wie sich im allgemeinen schnell eine Teillösung finden läßt.

J. Picht.

Mikaëljan, A. L.: Eine Anwendung der Methode der Koordinatensysteme zur Konstruktion von inhomogenen Medien mit vorgegebenen Trajektorien der Lichtstrahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 1101—1103 (1952) [Russisch].

Verf. behandelt die Aufgabe, ein inhomogenes Medium so zu bestimmen, daß

die Lichtstrahlen, die von einem Punkte ausgehen, vorgeschriebene Bahnen durchlaufen, und zwar für den ebenen Fall [eine Aufgabe, die vom Ref. bereits 1932 in einer elektronenoptischen Arbeit (dies. Zbl. 6, 92) durchgeführt wurde (s. a. J. Picht, Einführung in die Theorie der Elektronenoptik, Leipzig 1939, S. 110, dies. Zbl. 22, 37), allerdings auf anderem Wege]. Es wird ein krummliniges Koordinatensystem u_1, u_2 eingeführt, dessen Koordinatenlinien aus den Strahlen und ihren orthogonalen Trajektorien bestehen. Das Medium wird durch die Phasengeschwindigkeit $v(u_1, u_2)$ so bestimmt, daß $\int_{l_z} \frac{dl}{v(u_1, u_2)} = \min$, wo dl die Bogenlänge und

l_z einen beliebigen Strahl bezeichnet. Mit $F = F(u_1, u_2, u'_2)$, $u'_2 = \partial u_2 / \partial u_1$, wo $u_2 = u_2(u_1, z)$ mit z als Parameter die Gleichung der Trajektorienschär ist, wird die Eulersche Differentialgleichung aufgestellt. $u_2 = u_2(u_1, z)$ ist als bekannt angenommen, so daß $v(u_1, u_2)$ aus der Eulerschen Differentialgleichung zu bestimmen ist. Da u_2 Koordinatenlinie ist, so ist $u_2 = u_2(z)$, und es wird $-h_1 \frac{\partial h_2}{\partial u_2} + h_2^2 \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial u_2} = 0$, woraus $v(u_1, u_2) = h_1(u_1, u_2) \cdot S(u_1)$, wo S eine beliebige Funktion von u_1 ist. — Anschließend betrachtet der Verf. einige Spezialfälle als Anwendungsbeispiele.

J. Picht.

● Glaser, Walter: Grundlagen der Elektronenoptik. Wien: Springer-Verlag 1952. X, 699 S. mit 445 Textabb.

Die vorliegende Buchveröffentlichung bringt eine mathematisch sehr eingehende Darstellung der Theorie der Elektronenoptik. Sie behandelt zunächst die — wie üblich — als „Gaußsche Dioptrik“ bezeichnete Abbildung 1. Ordnung durch elektrische, magnetische und elektrisch-magnetische rotationssymmetrische Felder. Hier wird auch kurz auf die experimentelle Felddausmessung und Bahnbestimmung eingegangen. Ferner behandelt Verf. in diesem Abschnitt die strenge Durchrechnung einer typischen magnetischen Polschuhlinse, die Farbabweichung bei Elektronenlinsen, den Aperturbegriff beim Elektronenmikroskop, die Feldbestimmung bei starken Magnetlinsen und andere hierher gehörige Fragen. Der nächste größere Abschnitt handelt von der Theorie der geometrischen Aberrationen, in dem u. a. auch die strenge Berechnung der Aberrationskurven des sogenannten „Glockenfeldes“, die Kautikfläche der Elektronenlinsen, die elektronenoptische Abbildung bei gestörter Rotationssymmetrie sowie die Ablenkung von Elektronenstrahlenbündeln in elektrischen und magnetischen Ablenssystemen ihre Behandlung finden. Das Schlußkapitel bezieht sich auf den Zusammenhang der Elektronenoptik mit der Wellenmechanik, in dem im Anschluß an die Schrödinger-Gleichung die kräftefreie Bewegung der Elektronen, die Beugungsfragen, die geometrische Elektronenoptik als Näherung der Wellenmechanik, eine Übertragung der für Wellenvorgänge beliebiger Öffnung und beliebiger Deformationen geltenden Debye-Pichtschen Formel auf elektronenoptische Vorgänge sowie Fragen des Auflösungsvermögens behandelt werden.

J. Picht.

Glaser, W. und H. Grumm: Die Aberrationskonstanten des elektronenoptischen Abbildungssystems ohne Blende. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 360—372 (1952).

Da bei elektronenoptisch abbildenden Systemen die Öffnung der abbildenden Strahlenbündel nicht durch reelle Blenden bestimmt wird, sondern durch den natürlichen Intensitätsabfall im Bündel, ist es erforderlich, diese Verhältnisse bei Berechnung der Aberrationsverhältnisse zu berücksichtigen. Verf. rekapituliert zunächst die Ausdrücke für die Bildfehlerkoeffizienten bei Systemen mit Blende und ihre Anwendung bei anderer Blendenlage. Anschließend diskutiert Verf. die Frage nach den zweckmäßigen Parametern zur Festlegung der Strahlen eines Strahlenbündels, des zugehörigen Hauptstrahls und der — als Tangente an diesen im Dingpunkt definierten — Bündelachse. Es findet eine Umrechnung der Bildfehlerkoeffizienten statt, bei der die Strahlen durch die erwähnten Parameter gekennzeichnet werden. Es folgen zahlenmäßige Werte der Koeffizienten für den Fall des sogenannten Glockenfeldes, u. zwar mit und ohne Blende, und einige allgemeine Bemerkungen über das Auflösungsvermögen in Abhängigkeit von Dezentrierungswinkel und Bündelapertur.

J. Picht.

Kompfner, R.: Travelling-wave tubes. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 15, 257—327 (1952).

Quantentheorie:

• Flügge, Siegfried und Hans Marschall: *Rechenmethoden der Quantentheorie, dargestellt in Aufgaben und Lösungen. 1. Teil: Elementare Quantenmechanik. (Grundlagen der mathematischen Wissenschaften. Band LIII.)* 2. völlig Neubearb. und vermehrte Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. VII, 272 S. DM 29,80; Ganzl. DM 32,80.

Die zweite und völlig umgearbeitete Auflage dieses Buches bewahrt durchaus den Stil der ersten Auflage, welche sich in den letzten Jahren viele Freunde erworben hat unter allen Physikern, die mit quantenmechanischen Problemen zu tun haben. Das Buch gibt nach wie vor dem Leser die Möglichkeit, sich an Hand praktischer Fragestellungen in die Quantenmechanik „hineinzurechnen“, wobei die einzelnen Aufgaben und Lösungen doch so angeordnet sind, daß sie den gesamten Fragenkomplex der elementaren Quantenmechanik umfassen. Gegenüber der ersten Auflage ist neben vielen detaillierten Änderungen die Behandlung des Diracschen Elektrons fortgefallen. Dafür sind Zwei- und Mehrkörperprobleme in die Behandlung neu einbezogen worden. Einige neu hinzugenommene Aufgaben tragen der Entwicklung der letzten Jahre Rechnung und behandeln Fragen der WKB-Methode und des Schwingerschen Variationsverfahrens zur Berechnung der Phasen bei Streuprozessen.

W. Macke.

Wigner, E. P.: *Die Messung quantenmechanischer Operatoren.* Z. Phys. **133**, 101—108 (1952).

Der Verf. gibt die notwendigen Bedingungen für die Meßbarkeit einer Größe nach der Quantenmechanik an. Die Anwendung der von J. v. Neumann (Mathematische Grundlagen der Quantentheorie, Berlin 1932, dies. Zbl. **5**, 91) angegebenen formalen Vorschrift für die Kopplung von Meßobjekt und Meßapparatur erweist nur solche mit Erhaltungsgrößen nicht vertauschbaren Operatoren mit einer vorgegebenen Apparatur als meßbar, deren Meßanordnung mit sehr großer Wahrscheinlichkeit einen genügend großen Eigenwert für die Erhaltungsgrößen annimmt. Dies bringt Schwierigkeiten für die Messung der elektrischen Ladung mit sich, die dazu führen, daß nur hiermit vertauschbare Operatoren zu meßbaren Größen gehören. Man vgl. hierzu: G. Ludwig, Z. Phys. **135**, 483—511 (1953). Auch dort tritt (jedoch weniger formal begründet) die Forderung auf, daß die Meßapparatur im Vergleich zum Objekt makroskopisch sein soll.

H. Kümmel.

Putnam, C. R.: *The spectra of quantum-mechanical operators.* Amer. J. Math. **74**, 377—388 (1952).

Es werden selbstadjungierte Operatoren A, B untersucht, die in einem dichten Teilraum Ω des betrachteten Hilbertraumes \mathfrak{H} der Relation $(AB - BA)f = if$ ($f \in \Omega$) genügen. F. Rellich zeigte (dies. Zbl. **29**, 52) unter gewissen Voraussetzungen, daß die Operatoren A, B bis auf Unitä äquivalenz mit den bekannten Operatoren vom Heisenberg-Schrödingerschen Typ übereinstimmen. In der vorliegenden Arbeit werden dagegen unter allgemeineren Voraussetzungen, die auch andere Lösungen zulassen, Aussagen über das Spektrum von A, B gemacht.

J. Moser.

Witt, Bryce Seligman de: *Point transformations in quantum mechanics.* Phys. Review, II. Ser. **85**, 653—661 (1952).

Es wird gezeigt, daß sich die Gruppe der Punkttransformationen der klassischen Mechanik auf eine Untergruppe der Gruppe der unitären Transformationen im Hilbertraum isomorph abbilden läßt. Hieraus wird eine eindeutige Vorschrift zum korrespondenzmäßigen Übertragen der klassischen in die quantenmechanischen Größen (für beliebige Koordinaten, unter der Voraussetzung, daß die Lagrange-Funktion die übliche bilineare Form hat) gewonnen. Dies wird insbesondere auf die Quantisierung der Einsteinschen Feldgleichungen angewandt.

H. Kümmel.

Fényes, Imre: Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik. *Z. Phys.* 132, 81–106 (1952).

Die formalen Analogien zwischen Quantenmechanik und statistischer Physik legen den Gedanken nahe, erstere durch eine statistische Methode zu beschreiben. Frühere Versuche in dieser Richtung (z. B. E. Schrödinger, *S.-Ber. preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* 1930, 144 und 1931, 400) führten zu dem Resultat, daß dies nicht möglich sei, und zwar vor allem wegen des hyperbolischen Charakters der Schrödinger-Gleichung, wegen der Nichtvertauschbarkeit der wichtigsten Operatoren und des Beweises der Nichtexistenz „verborgener Parameter“ (J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin 1932, dies. Zbl. 5, 91). Verf. zeigt, daß die in der Wahrscheinlichkeitstheorie auftretenden sog. Markoffschen Prozesse in engem Zusammenhang mit der statistischen Deutung der Quantenprozesse stehen. Dabei gibt es auch eine ausschließlich durch die statistische Betrachtungsweise bestimmte Unschärferelation, die der Heisenbergschen entspricht; es resultiert die Kontinuitätsgleichung der Wellenmechanik und aus einem Variationsprinzip unter anderem die Schrödingergleichung. Der genannte v. Neumannsche Beweis wird zwar als solcher natürlich als richtig anerkannt, jedoch wegen des von vornherein statistischen Charakters z. B. der Wellenfunktion, als Zirkelschluß angesehen, da er nur zeige, daß statistische Zustandsgrößen nicht zugleich auch kausale Zustandsgrößen sein könnten. Nach dieser Auffassung sind also „verborgene Parameter“ vorhanden und zulässig. Und zwar sollen diese gerade die Substruktur bestimmen, die die Quantentheorie mit ihrer üblichen statistischen Interpretation zur Folge hat (wobei freilich diese nur eine Gedankenkonstruktion bleibt, jedoch eine „prinzipielle“ Unmeßbarkeit nicht unbedingt angenommen werden muß. Die Arbeit enthält übrigens einige Rechenfehler; d. Ref.).

H. Kümmel.

Aleksandrov, A. D.: Über den Sinn der Wellenfunktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 85, 291–294 (1952) [Russisch].

Die Absicht der Arbeit ist es, denjenigen Standpunkt, der ψ als Charakteristikum eines objektiven Elektronen-Zustandes auffaßt, zu vertiefen und die beiden anderen Standpunkte (den „Kopenhagener“ und den „statistischen“) zu widerlegen. Verf. betont, daß ψ nicht den objektiven Zustand eines Elektrons „an sich“, sondern „unter entsprechenden klassisch bestimmten Bedingungen“ beschreibt. Dem Kopenhagener Standpunkt wird Verwechslung des objektiven Effekts der Messungswechselwirkung mit dem subjektiven Vorgang der Beobachtung vorgeworfen; „die Erwähnung des Beobachters muß man ausschließen“. Im Unterschied zum statistischen Standpunkt von D. J. Blochinzew (nach dem ψ und die Observablen sich lediglich auf fiktive statistische Kollektive von Elektronen bzw. von Versuchen beziehen) wird vom Verf. die Wahrscheinlichkeit $|\psi|^2$ als ein Maß für die dialektische Kategorie der realen Möglichkeit (von Wechselwirkungsergebnissen) eines Elektrons angesehen. Als Argument gegen die statistische Auffassung wird u. a. die Existenz stationärer Zustände scharfer Energie genannt.

G. Süßmann.

Broglie, Louis de: Sur la possibilité d'une interprétation causale et objective de la mécanique ondulatoire. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 265–268 (1952).

Angeregt durch Überlegungen von D. Bohm erinnert Verf. an seinen Vorschlag aus dem Jahr 1927, in der Quantenmechanik neben der gewöhnlichen, der Schrödingergleichung genügenden Wellenfunktion noch eine zweite Funktion einzuführen, welche in irgendeiner Weise dem Teilchencharakter Rechnung trägt. Und zwar soll die zweite Wellenfunktion die gleiche Phase besitzen wie die erste, jedoch eine Amplitude, die entweder am Teilchenort singular wird oder wenigstens nur in dessen unmittelbarer Umgebung wesentlich von Null verschiedene Werte besitzt. Dabei wird die Möglichkeit besprochen, daß diese zweite Wellenfunktion einer nichtlinearen Wellengleichung genügt.

F. Sauter.

Broglie, Louis de: Sur l'introduction des idées d'onde-pilote et de double solution dans la théorie de l'électron de Dirac. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 557–560 (1952).

Verf. weist auf Schwierigkeiten hin, die bei der Übertragung seiner Vorstellungen von den zwei Wellenfunktionen (vgl. das vorsteh. Referat) auf die relativistische Quantenmechanik dadurch entstehen, daß man in der Diracschen Theorie des Elektrons einerseits mit einer vierkomponentigen Wellenfunktion mit im allgemeinen vier verschiedenen Phasen, andererseits mit zwei verschiedenen, jeweils der Kontinuitätsgleichung genügenden Stromausdrücken zu rechnen hat.

F. Sauter.

Dugas, René: Sur l'interprétation de la mécanique quantique à l'aide de variables cachées au sens de David Bohm. *Revue Sci.* 90, 261—264 (1952).

Landé, Alfred: Quantum mechanics and thermodynamic continuity. *Amer. J. Phys.* 20, 353—358 (1952).

Landé, Alfred: Thermodynamic continuity and quantum principles. *Phys. Review*, II. Ser. 87, 267—271 (1952).

Nach dem sog. Gibbs'schen Paradoxon der klassischen Statistik besteht zwischen „ähnlichen“ und „gleichen“ Gasen in bezug auf die Mischungsentropie eine Diskontinuität. Insbesondere haben zwei Gase, die sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß die Atome in verschiedenen inneren Zuständen sind (etwa verschiedenen Richtungen des Eigendrehimpulses), den vollen Betrag $2nR \log 2$ der Mischungsentropie, während die Mischungsentropie bei genau gleichen inneren Zuständen verschwindet. Verf. stellt nun das plausible scheinende „Kontinuitätspostulat“ auf, wonach diese Unstetigkeit der inneren Zustände (in bezug auf die Mischungsentropie) in Wahrheit nicht bestehen soll. Von da aus gelangt er zum begrifflichen Schema und zu wichtigen mathematischen Prinzipien der Quantenmechanik, insbesondere zum Superpositionsprinzip, wonach jeder Zustand als eine Überlagerung anderer aufgefaßt werden kann. Sogar die quantitative Fassung $\psi(A_k, C_m) = \sum_j \psi(A_k, B_j) \cdot \psi(B_j, C_m)$ erscheint als naheliegende Konsequenz. Es wird die Mischungsentropie nichtentarteter idealer Gase als stetige Funktion der „Ähnlichkeit“ (Beispiel: beliebige Winkel zwischen den Spinrichtungen) angegeben. Verf. schließt ferner, daß der statistische Gewichtungsfaktor $N!/N_1!N_2! \dots$ durch 1 zu ersetzen ist (darüber hinaus liegt der Schluß auf die Forderung der Symmetrie oder Antimetrie von ψ nahe). Dieses Ergebnis erscheint dem Ref. (da die Ununterscheidbarkeit gleicher Zustände implizit vorausgesetzt wird) als Selbstverständlichkeit. In einer konsequenten klassischen Statistik tritt das Gibbs'sche Paradoxon gar nicht auf, denn Teilchen sind stets als unterscheidbar anzusehen und die Mischungsentropie stets $\neq 0$ (S braucht keine streng extensive Größe zu sein). Das „Kontinuitätspostulat“ enthält also (wie die ganze Gibbs'sche Thermodynamik) nach Ansicht des Ref. bereits einen typischen quantentheoretischen Zug: die prinzipielle Ununterscheidbarkeit. Die Arbeit zeigt immerhin, welch grundlegende quantenmechanische Prinzipien aus diesem einen einfachen Zug mit Hilfe thermodynamischer Überlegungen geschlossen werden können. Die Größe und die Rolle der Planckschen Konstanten kann natürlich so nicht herauskommen.

G. Süßmann.

Moisil, Gr. C.: Sur les équations de la distribution spatiale instantanée des grandeurs physiques, dans le cas des phénomènes non stationnaires. *Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Mat. Fiz.* 4, 481—494 u. russische u. französ. Zusammenfassg. 494, 495—496 (1952) [Rumänisch].

On part du fait qu'étant donné un système d'équations aux dérivées partielles linéaires $\sum_j P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_j = 0$ il peut arriver que certaines de ces équations ou de leurs combinaisons, ne contiennent pas la dérivation par rapport au t . On convient de les appeler équations de condition et l'on donne à l'aide de la méthode matricielle utilisée par l'A. dans d'autres travaux, une méthode générale pour obtenir toutes les équations de condition d'un système donné. On montre que la méthode consiste à résoudre des systèmes linéaires à coefficients et inconnues des polynômes. Cette méthode appliquée aux équations de Maxwell dans le vide, montre que les seules équations de condition sont celles données par les équations $\text{Div } E = \text{Div } H = 0$. En ce qui concerne les équations de Dirac pour l'électron magnétique, on montre qu'elles ne possèdent pas d'équation de condition. D'autres applications sont faites aux équations de De Broglie pour le photon et à d'autres systèmes d'équations considérés par des élèves de l'A.

G. Vranceanu.

Foldy, L. L.: The electromagnetic properties of Dirac particles. *Phys. Review*, II. Ser. 87, 688—693 (1952).

Es wird die allgemeinste Erweiterung der Diracschen Feldgleichungen angegeben, die man durch Hinzufügen einer lorentzinvarianten, lokalen, in den Feldstärken linearen „quasistatischen“ (d. h. für verschwindenden Impuls der Diraceteilchen nicht verschwindenden) elektromagnetischen Wechselwirkung erhält. Verf. erhält eine unendliche Reihe von Wechselwirkungstermen; die beiden ersten stellen die Wirkung der Ladung und eines anomalen magnetischen Momentes dar, die übrigen direkte Wechselwirkungen zwischen dem Teilchen und den das äußere Feld erzeugenden Ladungen. Anschließend wird der Übergang zu der nichtrelativistischen sog. Foldy-Wouthuysen-Darstellung durchgeführt (dies. Zbl. 30, 284; 39, 226). Dabei treten neue Koeffizienten auf, die z. T. eine größere anschauliche Bedeutung haben als die ursprünglichen kovarianten. Verf. hofft, dadurch eine in der Literatur aufgetretene Konfusion aufgeklärt zu haben. Die gebotene Theorie soll einen phänomenologischen Rahmen darstellen, in den jede experimentelle oder theoretische Beschreibung von Diraceteilchen eingefügt werden kann. Beim

Vergleich mit den Ergebnissen der Quantenelektrodynamik wird auf eine Schwierigkeit dieses Schemas hingewiesen, die von der verschwindenden Photonenmasse herrührt. *G. Süßmann.*

Nelipa, N. F.: Quantentheorie des „leuchtenden“ Elektrons. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 1259—1262 (1952) [Russisch].

Verf. weist darauf hin, daß Parzen (dies. Zbl. **43**, 423) bei der quantentheoretischen Berechnung der Ausstrahlung eines relativistischen Elektrons in einem Magnetfeld eine unberechtigte Näherung verwendet hat, was eine Überschätzung des Unterschieds zwischen den klassisch und quantentheoretisch berechneten Strahlungsintensitäten zur Folge hat. *E. Gora.*

Guy, Roland: Sur les solutions de l'équation d'évolution. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1194—1196 (1952).

Winogradski, Judith: Sur la forme spinorielle des densités de valeur moyenne des grandeurs physiques attachées aux particules de spin $1/2$. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 463—465 (1952).

Für die klassischen Dichtegrößen der Diracschen Theorie wird eine postulatorische Basis gegeben. *F. L. Bauer.*

Winogradski, Judith: Sur huit familles d'opérateurs associés aux observables des particules de spin $1/2$. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 505—507 (1952).

Verf. hat (vgl. vorangehendes Referat) die aus Spinoren zu bildenden Tensorgrößen aus gewissen Symmetriepostulaten bestimmt. Es wird das bekannte Ergebnis wiedergewonnen, daß die Matrizen, die diese Dichtegrößen als Erwartungswerte Diracscher Wellenfunktionen liefern, ein Diracsches hyperkomplexes System bilden. *F. L. Bauer.*

Winogradski, Judith: Sur les relations entre les densités de valeur moyenne des grandeurs physiques attachées aux particules de spin $1/2$. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 533—535 (1952).

Es wird ein System von quadratischen Beziehungen zwischen den Dichtegrößen der Diracschen Theorie angegeben, welches eine gewisse allgemeinere Schreibweise der Kofinkschen Relationen darstellt. *F. L. Bauer.*

Dirac, P. A. M.: Les transformations de jauge en électrodynamique. Ann. Inst. Henri Poincaré **13**, 1—42 (1952).

Verf. diskutiert zunächst das Wirkungsprinzip für ein elektromagnetisches Feld in Wechselwirkung mit Materie. Der Fermische Ansatz $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A_{\mu\nu} A_{\mu\nu} + \mathfrak{M}$ mit der Nebenbedingung $\partial A_{\mu}/\partial x_{\mu} = 0$ läßt nur eingeschränkte Eichtransformationen zu, während die Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathfrak{M}$ (ohne Nebenbedingung) allgemeine Eichtransformationen zuläßt, falls der Wechselwirkungsterm \mathfrak{M} geeignete Form hat. Der Übergang zur Hamiltonschen Form führt auf Schwierigkeiten, die in früheren Arbeiten des Verf. behandelt worden sind (dies. Zbl. **36**, 141; **42**, 212). Es folgen die Methoden zur Quantisierung, Anwendung auf Vakuumelektrodynamik, Wechselwirkung mit einem Pauli-Weißkopf-Feld und mit einem Spinorfeld. Vgl. Verf., Nuovo Cimento **7**, 925—938 (1950). *G. Höhler.*

Schrödinger, Erwin: Relativistic Fourier reciprocity and the elementary masses. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A **55**, 29—50 (1952).

Der Verf. untersucht diejenigen Verallgemeinerungen der Feldgleichungen für Elementarteilchen, bei denen an Stelle des Operators \square der Operator $F(\square)$ tritt. Ist $F(\square)$ ein Polynom, so sind die Lösungen der Differentialgleichung mit $F(\square)$ bekanntlich (Thirring, dies. Zbl. **40**, 133) Linearaggregate der Lösungen von Klein-Gordon-Gleichungen von Partikeln verschiedener Masse. Born hat nun (dies. Zbl. **35**, 272) $F(\square)$ so gewählt, daß F gleich ist ihrer eigenen vierdimensionalen Fouriertransformierten oder nur die Eigenfunktionen einer vierdimensionalen Oszillatorgleichung umfaßt. Verf. beschäftigt sich nun zunächst ausführlich mit Fourierschen Integralen in 4 Dimensionen und dem Zusammenhang von Fouriertransformierten und Oszillator-Eigenfunktionen und kommt schließlich nach längeren Rechnungen

zum Schluß, daß keines der beiden Bornschen Auswahlpostulate für die Form der Operatoren $F(\square)$ als sichere mathematische Basis für die Wahl spezieller solcher Operatoren angesehen werden kann (wenn man insbesondere das Ziel definiter Massenzahlverhältnisse im Auge hat). F. Cap.

Thomas, L. H.: The relativistic dynamics of a system of particles interacting at a distance. Phys. Review, II. Ser. 85, 868—872 (1952).

Der Verf. versucht eine relativistisch invariante Fernwirkungstheorie einzuführen, indem er nur Invarianz gegen eine inhomogene Lorentz-Gruppe fordert und die Existenz invarianter Weltlinien aufgibt. H. Kümmel.

Rubinowicz, A.: Fields defined by elementary laws. Acta phys. Polon. 11, 155—178 (1952).

Verf. untersucht lineare Felder, welche nicht durch Differentialgleichungen, sondern durch die Gestalt der radial-symmetrischen Quellfunktion gegeben sind. Durch l' -fache Differentiation nach den verschiedenen kartesischen Koordinaten erhält man Funktionen des gegebenen Feldes, welche als Mehrfachquellen (multiple source) bezeichnet werden. Zu jeder Ordnung l' gibt es $(l' + 1)(l' + 2)/2$ linear unabhängige Mehrfachquellen. Jede dieser Funktionen läßt sich nach Kugelflächenfunktionen vom Index $l', l' - 2, \dots, 1$ (bzw. 0) entwickeln. Ihre Anzahl reicht aus, um in Umkehrung dieser Entwicklung aus Mehrfachquellen der Ordnung l' je einen Multipol (Kugelflächenfunktion) aller Ordnungen $l \leq l'$ von gleicher Parität aufzubauen. Für alle diese Multipole werden einfache geschlossene Ausdrücke angegeben. Für jede Ordnung l gibt es deren unendlich viele, falls nicht die Quellfunktion einer homogenen linearen Differentialgleichung genügt, deren Operator ein Polynom in dem Laplaceschen Operator Δ ist. — Verf. zeigt, wie sich für Felder, welche nur durch die Form der elementaren Quelle gegeben sind, Randwertprobleme lösen lassen. — Die Formeln lassen sich auch auf zeitabhängige Felder anwenden. W. Franz.

Scherrer, W.: Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld. Commentarii math. Helvet. 26, 184—202 (1952).

Die Arbeit stellt eine Weiterführung der Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 34, 275; 39, 423) dar. (Im Ref. 39, 423 mußes heißen: „Zu einer früheren Arbeit...“) G. Ludwig.

Sokolov, A. A.: Bemerkungen zur Quantentheorie des Gravitationsfeldes. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6) 9—20 (1952) [Russisch].

Verf. geht von den bekannten linearisierten Feldgleichungen des Gravitationsfeldes (erste Näherung für schwache Felder) aus. Er vereinfacht die Lösungen dieser Gleichungen, die Gravitationswellen entsprechen sollten, indem er durch eine Koordinatentransformation die Größen h_{44} und h_{4i} ($i = 1, 2, 3$) zum Verschwinden bringt ($h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ metrischer Tensor des Minkowskischen Raumes). Es folgt die Anwendung des Quantisierungsformalismus. A. Papapetrou.

Petiau, Gérard: Sur la représentation des équations d'ondes de corpuscules de spin 0 ou $\frac{1}{2}$. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1534—1537 (1952).

Mit Hilfe von zwei Projektionsoperatoren lassen sich die in der abstrakten Kemmer-Procaschen Matrizenalgebra enthaltenen irreduziblen Matrizenysteme für Wellengleichungen vom Spin 1 einzeln ausblenden. F. L. Bauer.

Úlehla, Ivan: The relativistic theory of particles with maximum spin 1. Czechoslov. J. Phys. 1, 121—126 (1952).

L'A. développe une recherche systématique des équations d'ondes linéaires relativistes les plus générales susceptibles de représenter le corpuscule de spin maximum 1. En partant des conditions générales établisés par Gelfand et Jaglom [Žurn. eksper. teor. Fiz. 18, 703—733 (1948)] et LeCouteur (ce Zbl. 40, 131) l'A. arrive après des calculs algébriques assez longs à un système d'équations d'ondes tensorielles renfermant quatre coefficients ou masses arbitraires. Ce système a déjà été rencontré et discuté (G. Petiau, ce Zbl. 33, 235). G. Petiau.

Goto, K.: On the meson wave equation in de Sitter space. Progress theory. Phys. 8, 672—675 (1952).

El-Nadi, M.: Sur la théorie du photon de L. de Broglie. *J. Phys. Radium* **13**, 540—542 (1952).

Durch Hinzunahme von „nach links wirkenden“ Dirac-Matrizen gelingt es Verf., die de Broglieschen Gleichungen der 2. Verschmelzungsstufe (zum Spin 1) für eine 4-reihige Matrix von Wellenfunktionen zu formulieren. — Ref. möchte bemerken, daß diese formale Möglichkeit an den Spin 1 gebunden ist und darauf beruht, daß man sämtliche Darstellungen der 2. Verschmelzungsstufe (zum Spin 1) mittels der Kommutatoralgebra der Dirac-Matrizen erhält. *F. L. Bauer.*

Vrkljan, V. S.: Nochmals über die de Brogliesche Theorie der Teilchen mit dem Spin-Maximum 3/2 und die Schrödingerschen Oszillationen. *Österreich. Akad. Wiss., math.-naturwis. Kl., Anzeiger* **1952**, 53—55 (1952).

Tokuoka, Zensuke and Hajime Tanaka: On the equivalence of the particle formalism and the wave formalism of meson. *Progress theor. Phys.* **8**, 599—614 (1952).

Die Äquivalenz des Klein-Gordon-Procaschen und des Duffin-Kemmerschen Formalismus für Boseteilchen wird durch explizite Rechnungen nachgewiesen. *W. Thirring.*

Nambu, Yoichiro: On Lagrangian and Hamiltonian formalism. *Progress theor. Phys.* **7**, 131—170 (1952).

Die Beziehungen zwischen der Tomonaga-Schwingerschen und der Feynmanschen Quantenfeldtheorie werden am Modell der nichtrelativistischen Quantenmechanik analysiert. Mit Hilfe einer Modifikation der *P*-Operation gelingt es dem Verf., im Dysonschen Ausdruck für den *S*-Operator *H* durch *L* zu ersetzen. Die Betrachtungen werden auf Systeme mit höheren Zeitableitungen und auf (zeitlich) nichtlokale Systeme ausgedehnt. *G. Süßmann.*

Jauho, Pekka: On the commutation relations and vacuum expectation values in the quantum theory of fields. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. **127**, 8 S. (1952).

Verf. bestimmt diejenigen Lösungen der Gleichung $(\square - m^2)\psi = 0$, welche invariant gegenüber Lorentztransformationen (ohne Zeitumkehr) sind und daher als rechte Seite von Vertauschungsrelationen bzw. als Ausdruck für den Vakuum-erwartungswert brauchbar sind. Das Problem wurde bereits von Thirring (dies. Zbl. **40**, 138) untersucht. Vgl. auch Ref., dies. Zbl. **44**, 439. *G. Höhler.*

Peierls, R. E.: The commutation laws of relativistic field theory. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **214**, 143—157 (1952).

Verf. gibt einen Formalismus zur Gewinnung der Vertauschungsrelationen in der relativistischen Quantenfeldtheorie an, der die Einführung kanonischer Variabler und des Hamiltonformalismus vermeidet und nur an das Variationsprinzip $\delta \mathcal{L} = 0$ anschließt. Er wendet diese Methode auf die Quantenelektrodynamik und die Theorie der geladenen Vektormesonen an. Zum Schluß diskutiert er die Verhältnisse für den Fall nichtkanonischer Bewegungsgleichungen. *H. Kümmel.*

Iwata, Giiti: The unitary transformation and the quantization. *Progress theor. Phys.* **7**, 39—44 (1952).

Verf. zeigt, daß sich auch in der Feldmechanik die zeitliche Entwicklung durch unitäre Transformationen darstellen läßt. *H. Kümmel.*

Udgaonkar, B. M.: Relativistic field quantization. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **36**, 482—492 (1952).

Es wird die Quantisierung von Spinwellengleichungen behandelt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß nicht Ladungsdichte und Energiedichte verschwinden, ist die, daß die nichtverschwindenden Wurzeln des Minimalpolynoms, dem die Basismatrizen der Wellengleichung genügen, einfache Wurzeln sind. Ferner sind einige für die Quantisierung im allgemeinsten Fall nützliche Identitäten angegeben, insbesondere eine geschlossene Formel für die zu verwendenden Kommutatorregeln. *F. L. Bauer.*

Hurst, C. A.: An example of a divergent perturbation expansion in field theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 625—639 (1952).

Für ein Skalarfeld φ , das in einfacher Weise mit sich selbst gekoppelt ist ($\lambda \varphi^3$ oder $\lambda \varphi^4$ in H), wird bewiesen, daß die irreduziblen Graphen zu einer Entwicklung nach der Kopplungskonstanten λ führen, die nicht konvergiert, solange die Gesamt-ruhemasse kleiner ist als die Summe der Ruhemassen der beteiligten Partikel. Verf. versucht dann plausibel zu machen, daß dies auch für freie Partikel zutreffen kann, daß der Einfluß der reduzierten Graphen an dem divergenten Charakter der λ -Reihe nichts ändert und daß auch das S der Elektrodynamik nur (höchstens) asymptotisch in $\lambda = 1/137$ ist. Unabhängig vom Verf. ist ein ähnlicher Beweis von W. Thirring gefunden worden [Helvet. phys. Acta 26, 33—52 (1953)]. *G. Süßmann.*

Hamilton, J.: Real and virtual processes in quantum electrodynamics. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 640—651 (1952).

Verf. behandelt das von Eden (dies. Zbl. 46, 439) entdeckte nichtanalytische Verhalten des S -Operators beim Zusammenfallen von Singularitäten der Fortpflanzungsfunktionen. Nur solche Koinzidenzen erweisen sich als von Bedeutung, die aufeinanderfolgende „reale“ Prozesse beschreiben. Graphenteile dagegen, die nicht in physikalische Teilprozesse zerfallen, werden „virtuelle“ Teile genannt. Mit Hilfe dieser Begriffe wird dann die Unitaritätsbedingung für den Dysonschen S -Ausdruck untersucht, insbesondere im Zusammenhang mit der Konvergenzfrage (s. vorhergeh. Ref.). *G. Süßmann.*

Miyatake, Osamu: On the singularity of the perturbation-term in the field quantum mechanics. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 3, 145—155 (1952).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 48, 223) wird die mathematische Struktur von Feldtheorien untersucht. Insbesondere wird gezeigt, daß eine Theorie der üblichen Struktur, welche zwei Felder in Wechselwirkung beschreibt, nicht widerspruchsfrei sein kann; denn, wenn die Hamiltonfunktion auf zwei Weisen in ein ungestörtes und ein Störglied aufgespalten wird, so sind im allgemeinen die Räume der Eigenzustände der beiden ungestörten Hamiltonfunktionen aufeinander orthogonal, und die Nullpunktsenergien der beiden unterscheiden sich um einen divergierenden Anteil.

M. R. Schafroth.

Nishiyama, Toshiyuki: A quantum theory of boson assemblies. I. Progress theor. Phys. 8, 655—668 (1952).

Zur Untersuchung zeitabhängiger Probleme für eine Boson-Gesamtheit bildet Verf. die Dichtematrix aus den Feldoperatoren, leitet aus ihr den Dichteoperator, den Stromoperator und die Wignersche Phasenraumverteilungsfunktion her und gibt die Bewegungsgleichungen an. Anwendung auf erzwungene Schwingungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Dann definiert Verf. einen Geschwindigkeitsoperator, untersucht seine Eigenschaften und benutzt ihn und die Quadratwurzel aus dem Dichteoperator zu einer Umformung des Hamiltonoperators, die im zweiten Teil der Arbeit Verwendung finden soll.

G. Höhler.

Nakamura, Tûtô: Statistical mechanics of cooperative phenomena. Progress theor. Phys. 7, 241—254 (1952).

Es wird versucht, die statistischen Ansätze von Kirkwood, bzw. von Born und Green zur Behandlung von Flüssigkeiten auf die kooperativen Phänomene zu übertragen. Verf. kommt dabei nach entsprechenden Vereinfachungen zu zwei Integralgleichungen, welche einerseits dem Formalismus von Bragg und Williams, andererseits der Näherungsmethode von Bethe entsprechen. Dabei ergibt sich auch eine Analogie zum quasi-chemischen Verfahren von Fowler-Guggenheim sowie zur Näherung von Kramers und Wannier.

F. Sauter.

Pais, A. and R. Jost: Selection rules imposed by charge conjugation and charge symmetry. Phys. Review, II. Ser. 87, 871—875 (1952).

In einer Mesonentheorie, die invariant gegen Ladungskonjugation (Vertauschung von Nukleonen und Antinukleonen bei gleichzeitiger Ladungsumkehr der Mesonen) und ladungssymmetrisch (Vertauschung von Protonen mit Neutronen bei gleichzeitiger Ladungsumkehr der Mesonen) ist, lassen sich bekanntlich Erweiterungen des Furryschen Theorems angeben. Diese Erweiterungen, ursprünglich bewiesen für die „closed loops“ in gegebenen Graphen, werden in der vorliegenden Arbeit unmittelbar aus der Invarianz der Theorie ohne Heranziehung von Störungsrechnung gewonnen (wobei die Berufung auf die Invarianz der Vakuum Erwartungswerte allerdings überflüssig ist; Ref.). Für eine Reihe von Zerfallsprozessen erhält man so strenge Verbote in jeder störungstheoretischen Näherung. Berücksichtigung des Maxwellfeldes hebt einige der Verbote auf; wegen der Kleinheit der Feinstrukturkonstanten mag es aber in solchen Fällen gerechtfertigt sein, von „schwachen Auswahlregeln“ zu sprechen. *G. Lüders.*

Wolfenstein, L. and D. G. Ravenhall: Some consequences of invariance under charge conjugation. Phys. Review, II. Ser. 88, 279—282 (1952).

Zwecks Gewinnung von Auswahlregeln werden die der Ladungskonjugation entsprechenden feldtheoretischen Operatoren angegeben. Anwendung speziell auf den Zerfall von Positronium: Zustände, für die die Summe aus Bahndrehimpuls und Spin (für die große Komponente der Wellenfunktion) gerade/ungerade ist, können nicht in eine ungerade/gerade Zahl von Lichtquanten zerfallen, wobei der Zerfall in ein einziges Lichtquant natürlich wegen Energie-Impuls-Erhaltung unmöglich ist. Weitere Anwendungen auf den Zerfall von schweren Mesonen. *G. Lüders.*

Gora, E.: Lower limits for interaction times in photon scattering processes. Phys. Review, II. Ser. 88, 1212—1213 (1952).

Der Verf. hat früher (dies. Zbl. 44, 440) halbklassisch gezeigt, daß man die Selbstbeschleunigung von geladenen Teilchen unter dem Einfluß der Strahlungskraft ausschließen kann, wenn man die Beschleunigung (durch eine Lichtquelle) mit Hilfe einer geeigneten Einschaltfunktion langsam einsetzen läßt. Etwas Entsprechendes wird hier in quantenmechanischer Behandlung getan. Die Diskussion befaßt sich hauptsächlich mit dem Falle sehr harter Strahlung ($\gamma = \hbar \nu / mc^2 \gg 1$). Um die bekannten Formeln für Streuquerschnitte und Selbstenergieeffekte zu erhalten, muß man wieder eine Mindest-Wechselwirkungszeit von der Größenordnung $\gamma \tau_0$ annehmen, $\tau_0 = \hbar^2 / m e^2 c$. Für (extrem harte) Photon-Photon-Streuung wird ein $\tau_0 = (\hbar c / e^2)^4 (r_0 / c) \cong 3,3 \cdot 10^{-15}$ sec berechnet und mit der Lebensdauer des neutralen Mesons in Zusammenhang gebracht. *W. Wessel.*

Goto, K.: Principle of detailed balance in quantum field theory. Progress theor. Phys. 8, 565—567 (1952).

Ma, S. T.: Bound states and the interaction representation. Phys. Review, II. Ser. 88, 1211 (1952).

Befaßt sich mit einem scheinbaren Widerspruch in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 47, 219) betreffend die Unitarität des Operators $W_+(t)$. *W. Wessel.*

Kümmel, Hermann: Freie Elektronen in der unitären Quantenelektrodynamik. Z. Phys. 134, 78—94 (1952).

Verf. diskutiert die in der Ludwigschen unitären Quantenelektrodynamik (dies. Zbl. 41, 572; 46, 441) auftretenden wechselwirkungsfreien Operatoren und berechnet unter Zugrundelegung eines einfachen Absorbermodells (dies. Zbl. 46, 221) die Wirkungsquerschnitte für die Rutherford'sche, Möllersche und Comptonsche Streuung, für die Bremsstrahlung und für die Paarerzeugung und -Vernichtung; er erhält die bekannten Ergebnisse. In höheren Näherungen treten allerdings in der im Feynman'schen Sinne zu formulierenden Positronentheorie Abweichungen zwischen der unitären und der üblichen Elektrodynamik auf, die vielleicht durch Verbesserung des Absorbermodells behoben werden können. *G. Süßmann.*

Jekeli, W.: Quantisierung der Strahlungsprozesse am Kerntropfen. Z. Phys. 131, 481—487 (1952).

Die Quantisierung eines inkompressiblen, aber deformierbaren „Kerntropfens“ wird durchgeführt in Analogie zur üblichen Quantisierung eines Strahlungsfeldes.

Die Wechselwirkung des Tropfens mit dem elektromagnetischen Feld wird behandelt. Die Drehimpulserhaltung des Gesamtsystems tritt in den Matrixelementen dabei explizit in Erscheinung.

W. Macke.

Yennie, D. R.: Angular momentum in nonlocal field theory. Phys. Review, II. Ser. 85, 877—880 (1952).

Fierz hat neuerdings (dies. Zbl. 38, 408) darauf hingewiesen, daß jede irreduzible freie-Teilchen-Lösung der Yukawaschen nicht-lokalen Feldtheorie einem lokalen Feld von bestimmtem Spintyp äquivalent ist. Verf. gibt in einigen einfachen Fällen dafür die explizite Schreibweise an. Abschließend ist die Hoffnung ausgedrückt, daß vermöge einer wesentlich nicht-lokalen Wechselwirkung die nicht-lokale Feldtheorie mehr liefern sollte als „only a new method of introducing particles of different spin“.

F. L. Bauer.

Yennie, Donald R.: Quantum corrections to classical nonlinear meson theory. Phys. Review, II. Ser. 88, 527—536 (1952).

Für die (zur Erklärung der Absättigung der Kernkräfte) von Schiff (s. folgend. Referat) vorgeschlagene klassische nichtlineare Mesongleichung werden quantenmechanische Korrekturen berechnet. Die (im linearen Falle berechnete) Annahme, daß die klassische Näherung (der hohen Quantenzahlen wegen) genügt, erweist sich als falsch: die nach Abzug divergenter Renormierungsterme verbleibende Korrektur an der klassischen Feldenergie nimmt mit anwachsender (als statisch gegeben vorausgesetzter) Nukleondichte nicht ab, sondern zu. Die Existenz einer konsistenten Renormierung bei Anwesenheit eines äußeren Feldes wird bewiesen. Die erhaltenen Korrekturen sind numerisch nicht zuverlässig, aber sie zeigen, daß die Quanteneffekte nicht außer acht gelassen werden dürfen.

G. Süßmann.

Schiff, L. I.: Nonlinear meson theory of nuclear forces. I. Neutral scalar mesons with point-contact repulsion. II. Nonlinearity in the meson-nucleon coupling. III. Quantization of the neutral scalar case with nonlinear coupling. Phys. Review, II. Ser. 84, 1—9, 10—11 (1951), 86, 856 (1952).

Der Tellersche Gedanke, für die Absättigung der Kernkräfte nichtlineare Beziehungen in den Mesonenfeldern verantwortlich zu machen, wird quantitativ durchgeführt am Beispiel eines nichtquantisierten, skalaren Mesonenfeldes. Die übliche Mesongleichung wird dabei durch einen additiven nichtlinearen Term Φ^n erweitert. Die Kernkräfte zeigen qualitativ alle erwarteten Eigenschaften wie Absättigung und Reduktion der Zweikörperkräfte im Kerninnern, deren letztere die freie Beweglichkeit der Nukleonen im Kerninnern verständlich macht. Die Bindungsenergie der Kerne läßt sich jedoch nur zu 42% erreichen, auch wenn man über die beiden Konstanten in der Mesongleichung für Kopplung und Nichtlinearität extreme Annahmen macht. Die Konsequenzen eines solchen nichtlinearen Feldes auf die magnetischen Kernmomente sowie auf die Meson-Nukleon-Streuung werden diskutiert. In Teil II wird eine nichtlineare Mesonentheorie zur Beschreibung der Kernkräfte untersucht. Angenommen wird ein nichtquantisiertes, skalares Mesonenfeld. Es läßt sich zeigen, daß die Wechselwirkung zwischen δ -funktionsartigen Nukleonen nicht verändert wird, wenn man die übliche Mesonentheorie durch Annahme einer Nichtlinearität im Kopplungsterm erweitert. Eine solche Erweiterung kann daher auch nicht zur Erklärung der Absättigung der Kernkräfte beitragen. In Ergänzung zu Teil II wird in Teil III gezeigt, daß die Einführung einer Nichtlinearität im Kopplungsglied der Mesongleichung auch dann lediglich zu Yukawakräften führt, wenn man das Mesonfeld quantisiert, die Beschreibung der Nukleonen durch δ -funktionsartige Quellen des Mesonenfeldes jedoch beibehält.

W. Macke.

Henley, E. M.: Nonlinear pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. 87, 42—45 (1952).

Es ist von Schiff vorgeschlagen worden (s. vorstehend. Referat), die Absättigung der Kernkräfte durch ein nichtlineares Mesonfeld zu erklären. In der vorliegenden Arbeit werden die Schiffschen Ansätze auf den Fall pseudoskalarer Mesonen (mit Ableitungskopplung) erweitert und einige wesentliche Unterschiede gegenüber skalaren Mesonen herausgestellt.

H. Lehmann.

Fried, Burton David: The electron-neutron interaction as deduced from pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. 88, 1142—1149 (1952).

Die Wechselwirkung zwischen Neutronen und Elektronen kann man entweder mit Hilfe der Mesonentheorie nach Slotnik-Heitler, Case, Dancoff-Drell, Borowitz-Kohn oder ohne Mesonentheorie nach Foldy mit Hilfe einer Diracgleichung für das Neutron berechnen; die Diracgleichung muß man dazu um ein Pauliglied erweitern, welches dem anomalen magnetischen Moment des Neutrons entspricht. Die berechnete Wechselwirkung pflegt man durch ein Kastenpotential darzustellen mit einem konventionellen Radius gleich dem klassischen Elektronenradius und einer zu berechnenden Potentialtiefe. Für sie erhielten Case, Borowitz-Kohn 1300 eV, Foldy 4800 eV, Slotnik-Heitler 5000 eV, Dancoff-Drell 5220 eV. Messungen des Zusammenwirkens von Elektronen- und Kernstreuung für Neutronen ergaben für die Potentialtiefe 4–6000 eV. Das Hauptziel der Abhandlung des Verf. ist, durch Anwendung der regularisierenden Feynman-Dyson-Wickschen Rechentchnik auf die pseudoskalare Mesonentheorie zwischen der Vielzahl der theoretischen Werte zu entscheiden. Er findet 5380 eV in guter Übereinstimmung mit Slotnik-Heitler und Dancoff-Drell. Er berechnet die „Ein-Neutron“-Matrixelemente der S -Matrix nach der Störungstheorie für schwache Kopplung und führt sie bis zur 2. Ordnung in der Meson-Nukleon-Kopplung durch. Damit leitet er Ausdrücke für das magnetische Moment des Neutrons und für die Wechselwirkung Elektron-Neutron ab. Den empirischen Wert für das magnetische Moment des Neutrons benutzt er im 1. Ausdruck dazu, die Kopplungskonstante festzulegen, und gewinnt aus dem 2. Ausdruck obige Tiefe des Wechselwirkungspotentials. Die gute Übereinstimmung mit dem Experiment bleibt verwunderlich, da die Meson-Nukleon-Kopplungskonstante keineswegs klein ist und nicht zu verstehen ist, warum der Beitrag höherer Näherungen vernachlässigt werden darf. Für das Analogon der Feinstrukturkonstanten ergibt sich z. B. 7,33 aus dem experimentellen Wert des magnetischen Moments des Neutrons.

W. Kofink.

Muto, Toshinosuke, Makoto Tanifuji, Kenza Inoue and Takeo Inoue: Interaction of μ meson with matter. II. Progress theor. Phys. 8, 13–27 (1952).

Teil I Progress theor. Phys. 6, 27–36 (1951). — Es wird der Zerfall des negativen μ -Mesons behandelt in analoger Weise zu der von Tiomno und Wheeler durchgeführten Methode, hier jedoch mit einem Anfangszustand, in dem das μ -Meson in der K -Schale eines Atoms gebunden ist. Die Rechnungen werden für verschiedene Feldkopplungen durchgeführt. Die Masse des Neutrinos wird mit 0,20 und 40 Elektronenmassen angesetzt.

W. Macke.

Huby, R.: The theory of the deuteron stripping reaction. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 215, 385–398 (1952).

Neuberechnung des Wirkungsquerschnittes für die durch Deuteronen ausgelösten Prozesse auf der Basis der Arbeiten von Butler (dies. Zbl. 45, 140), jedoch mit verbessertem mathematischen Apparat. Damit läßt sich die Anlagerung des Neutrons an den Kern im gebundenen und virtuellen Zustand darstellen. Außerdem wird der Absolutwert des Wirkungsquerschnittes der Rechnung zugänglich.

K.-H. Höcker.

Friedrichs, K. O.: Zur asymptotischen Beschreibung von Streuprozessen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1952, 43–50 (1952).

Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem Streuprozess das Teilchen zur Zeit t einen bestimmten Impuls hat, wenn im Anfangszustand sein Impuls nur angenähert scharf festgelegt war. Mit $t \rightarrow \infty$ folgt einerseits das Ergebnis der üblichen stationären Streurechnung und im Spezialfall scharfen Anfangsimpulses andererseits ergeben sich die üblichen zeitproportionalen Übergangswahrscheinlichkeiten.

G. Höhler.

Chew, Geoffrey F. and Gian Carlo Wick: The impulse approximation. Phys. Review, II. Ser. 85, 636–642 (1952).

Man untersucht die Streuung eines Nukleons an einem zusammengesetzten Kern. Dabei werden folgende Annahmen gemacht. 1. Das einfallende Teilchen reagiert mit den verschiedenen Bausteinen des Systems niemals gleichzeitig. 2. Die Amplitude der einfallenden Welle werde durch die Anwesenheit mehrerer Nukleonen nicht beeinflußt. 3. Die Bindungsenergie der Nukleonen wird während des eigentlichen Streuakts vernachlässigt entsprechend der Behandlung sehr kurzzeitiger Stöße in der klassischen Dynamik. In summa wird versucht, die Streuamplitude zu berechnen, indem man die Streuamplituden von freien Nukleonen überlagert, die die

gleiche Impulsverteilung aufweisen wie die im Kern gebundenen Nukleonen. Besondere Aufmerksamkeit wird bei Durchführung dieses Programms dem Punkt 3 gewidmet. Die Bedingungen, unter denen das Verfahren anwendbar ist, werden diskutiert.

K.-H. Höcker.

Ashkin, J. and G. C. Wick: Comment on the „Impulse approximation“. Phys. Review, II. Ser. 85, 686 (1952).

Entwicklung eines bei Chew und Wick (s. vorsteh. Referat) auftretenden Ausdrucks. S. auch. nachsteh. Referat.

K.-H. Höcker.

Chew, Geoffrey F. and M. L. Goldberger: The scattering of elementary particles by complex nuclei. — A generalization of the impulse approximation. Phys. Review, II. Ser. 87, 778—782 (1952).

Einige formale Unzulänglichkeiten in der Arbeit von Chew und Wick (s. vorstehende Ref.) werden hier beseitigt. Dabei wird eine systematische Diskussion der Annahmen 1 und 2 jener Arbeit ermöglicht. Die Streuung eines Nukleons an einem zusammengesetzten Kern kann ausschließlich durch Zweiteilchenoperatoren dargestellt werden. Die Ergebnisse der Arbeit von Ashkin und Wick (vorsteh. Ref.) sind hier als Sonderfall enthalten.

K.-H. Höcker.

Überall, Herbert: Die Energieabhängigkeit der Phasenverschiebung bei der Proton-Proton-Streuung. Acta phys. Austr. 6, 119—134 (1952).

Eine einfache Funktion des Phasenwinkels wird nach Potenzen der Energie des einfallenden Teilchens entwickelt. Die Koeffizienten der Entwicklung werden explizit berechnet. Es sind im wesentlichen Besselfunktionen, die den Kernradius und den Bohrschen Radius im Argument enthalten.

K.-H. Höcker.

Hittmair, Otto: Über Interferenzeffekte in Winkelkorrelationen. Acta phys. Austr. 6, 71—77 (1952).

Über Spin und Parität von Kernen kann man wertvolle Aufschlüsse erhalten durch Betrachtung der Winkelkorrelation von sukzessiven Kernstrahlungen (elektromagnetischen oder materiellen Charakters), die in so kurzen Abständen folgen, daß in der Zwischenzeit keine Umorientierung der Kernspinachse erfolgt. Die Grundlagen zur theoretischen Behandlung, die den Vorzug weitgehender Unabhängigkeit von speziellen Kernmodellen hat und gruppentheoretisch argumentiert, wurden von Racah (dies. Zbl. 45, 140) gelegt. — Die zunächst getroffene Annahme reiner Multipolübergänge entspricht aber offensichtlich gelegentlich nicht dem empirischen Befund. Ling und Falkoff (dies. Zbl. 36, 267) haben Interferenzeffekte bei gemischten Multipolübergängen für $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelationen diskutiert. Verf. führt die Betrachtung ohne Benützung der speziellen Form der jeweiligen Hamilton-Funktionen auf allgemeiner gruppentheoretischer Basis, seine Überlegungen gelten damit für Emissionen von Partikeln mit beliebigem Spin. Bereits im einfachsten Fall der Interferenz zweier Multipolübergänge kommt ein für die Mischung typischer Faktor in die Rechnung, der die explizite Kenntnis der Kernwellenfunktion erfordern würde. Er kann aber glücklicherweise in gewissen Fällen [Mischung von L - und $(L-1)$ -Multipolübergängen] eingeeengt werden und muß im übrigen aus dem Experiment bestimmt werden. Ergebnisse werden kurz angegeben für einen sukzessiven Beta-Gamma-Übergang bei K^{42} und Rb^{86} mit einer Multipolmischung des Beta-Übergangs. Bemerkenswert ist, daß auch erlaubte Beta-Strahlung Winkelkorrelation liefern soll, wenn sie Interferenzen verschiedener Multipolübergänge aufweist. Ein nahezu erlaubtes Beta-Spektrum und eine ausgeprägte Winkelkorrelation sollen also auf Beta-Interferenzen schließen lassen.

F. L. Bauer.

Lloyd, Stuart P.: Explicit $\gamma\gamma$ angular correlations. II. Polarization correlations. Phys. Review, II. Ser. 88, 906—908 (1952).

Teil I, dies. Zbl. 45, 139. Grundsätzliche Bemerkungen zur Definition einer Winkelkorrelation zwischen zwei sukzessiven eben-polarisierten Gammastrahlungen und zum experimentellen Hintergrund; bei der theoretischen Behandlung fällt die bisherige Mittelung über die Polarisationszustände weg, explizite Endformeln sind angegeben.

F. L. Bauer.

Biedenharn, L. C., Keith Boyer and R. A. Chapiro: Angular correlations of the radiations from deuteron stripping reactions. Phys. Review, II. Ser. 88, 517—519 (1952).

Vertiefung der Theorie von Butler (dies. Zbl. 45, 140) über Winkelkorrelation der abgestreiften Teilchen nach Deuteronbeschuß [insbesondere $(p\gamma)$ -Korrelation

bei ($d, p\gamma$)-Prozessen], unter Berücksichtigung der neueren Fortschritte in der allgemeinen Theorie der Winkelkorrelation. *F. L. Bauer.*

Olbert, Stanislaw: Application of the multiple scattering theory to cloud-chamber measurements. I. Phys. Review, II. Ser. 87, 319—327 (1952).

An der Molièreschen Behandlung der Vielfachstreuung wird eine Korrektur angebracht, welche den Einfluß des endlichen Kernradius der streuenden Atome (Verringerung der Streuwahrscheinlichkeit um große Winkel gegenüber der Rutherfordschen Streuung am reinen Coulombfeld) auf die Winkelverteilung bei der Vielfachstreuung darstellen soll. Und zwar wird die von Molière verwendete Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Einzelstreuung bei einem bestimmten Streuwinkel (von der Größenordnung Wellenlänge des gestreuten Teilchens durch Kernradius) abrupt abgebrochen. Die mit dieser Einzelstreuungswahrscheinlichkeit berechnete Vielfachstreuungskurve weicht von der Molièreschen nur im Ausläufer für große Vielfachstreuungswinkel, nicht aber im Gaußschen Anfangsteil ab. *F. Sauter.*

Machida, Shigeru und Kazuhiko Nishijima: Remarks on the adiabatic nuclear potential. Progress theor. Phys. 7, 57—68 (1952).

Bei der üblichen Einführung der Kopplungsglieder zwischen Nukleonen und Mesonenfeld wird das zeitabhängige Glied mit γ_5 als Faktor weggelassen. Beim pseudoskalaren Potential bringt dieses nicht-statische Glied gegenüber dem von den Ortskoordinaten abhängigen Ausdruck keinen nennenswerten Beitrag, wenn der Abstand der Nukleonen größer ist als etwa die halbe Reichweite der Kernkräfte. Dieser „kritische Abstand“ wird für verschiedene phänomenologische Potentiale explizit ausgerechnet. Auswirkungen der nicht-statischen Kräfte im Kerninnern werden diskutiert. *K.-H. Höcker.*

Gombás, P.: Die statistische Theorie des Atomkerns. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 1, 329—390 (1952).

Die im Tröpfchenmodell zusammengefaßten empirischen Aussagen über die Atomkerne werden im Anschluß an frühere Arbeiten durch ein Modell begründet, in dem der Kern als quantenmechanisches Problem vieler Teilchen mit Zweikörperkräften beschrieben wird, die als reine Austauschkräfte vom Yukawatyp angesetzt werden. Durch Annahme nahezu freier Beweglichkeit der Teilchen im Kern und Anwendung des Hartree-Fockschen Variationsverfahrens wird die Kernenergie berechnet. Als einzige Konstante geht die Kopplungskonstante $g^2/\hbar c$ in die Theorie ein, welche mit dem Wert 0,121 die empirischen Werte befriedigend wiedergibt. Beachtlich gegenüber früheren Arbeiten ist, daß der so erzielte Wert für $g^2/\hbar c$ nicht wesentlich größer ist, als der zur Beschreibung des Deuterons erforderliche Wert. Daß die Korrelation zwischen den Nukleonen unberücksichtigt bleibt, läßt einige Bedenken gegen das Verfahren aufkommen, da frühere Versuche gezeigt haben, daß diese Variationsverfahren bei Einführung neuer Parameter, die der Korrelation Rechnung tragen, nicht mehr konvergieren. Trotz aller Sorgfalt, die der Durchführung des Verfahrens gewidmet wurde, wird man den sehr interessanten Ergebnissen allerdings eine nur mehr phänomenologische Bedeutung beimessen dürfen, da die Annahme reiner Austauschkräfte durch keinerlei anderweitige Erfahrungen bestätigt wird. Es dürfte heute feststehen, daß zum Absättigungscharakter der Kernkräfte, welcher hier durch diese Annahme reiner Austauschkräfte erzwungen wird, sicherlich andere Ursachen, wie Anwesenheit von Mehrkörperkräften, Nichtlinearität der die Wechselwirkung vermittelnden Mesonenfelder und auch die eventuelle Existenz eines abstoßenden Zentrums im Zweiteilchenpotential, nicht unerheblich beitragen. Für die Existenz einer Yukawakraft bei großer Kopplungskonstanten fehlt außerdem vom gegenwärtigen Stand der Feldtheorie aus jede theoretische Begründung, insbesondere können die π -Mesonen als pseudoskalare Teilchen ein solches Feld nicht erzeugen. Da jedoch bis heute keinerlei in sich widerspruchsfreie Argumente über die zwischen den Nukleonen herrschenden Kräfte existieren, wird man vorerst auf diesem Gebiet nichts anderes tun können, als eine Beschreibung des Gesamtkerns mit „phänomenologischen Kräften“ zu versuchen. *W. Macke.*

Bau der Materie:

Gáspár, R. und P. Gombás: Über ein analytisches Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenfunktionen und Energieeigenwerte von Atomelektronen. II. Berechnung der höheren Energiezustände. Die Elektronenstruktur des Se-Atoms. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 2, 335—343 (1952).

Erweiterung von I (dies. Zbl. 48, 219) auf höhere Energiezustände mit Anwendung auf das Se-Atom. *F. Penzlin.*

Brooks, Franklin C.: Convergence of intermolecular force series. *Phys. Review*, II. Ser. 86, 92—97 (1952).

Es wird gezeigt, daß die üblichen Entwicklungen der Störungstheorie zur Berechnung van der Waalsscher Kräfte divergieren in den Bereichen geringer Entfernung, in denen sie üblicherweise verwandt werden. In einer genäherten Weise werden diese Divergenzen beseitigt und die so resultierenden Kräfte mit anderen experimentellen Fakten wie dem H_2^+ von Hylleraas verglichen. *W. Macke.*

Murai, Tomokazu and Gentaro Araki: Calculation of heteronuclear molecular integrals. *Progress theor. Phys.* 8, 615—638 (1952).

Takayanagi, Kazuo: On the inelastic collision between molecules, II. — Rotational transition of H_2 -molecule in the collision with another H_2 -molecule. *Progress theor. Phys.* 7, 497—508 (1952).

Duchesne, Jules: Contribution à l'étude des relations entre les forces interatomiques et la structure électronique des molécules polyatomiques. *Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°* 26, Nr. 7, 44 p. (1952).

Bates, D. R.: Relative transition probabilities in band systems of diatomic molecules. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* 112, 614—636 (1952).

Araki, Gentaro and Tomokazu Murai: Molecular structure and absorption spectra of carotenoids. *Progress theor. Phys.* 8, 639—654 (1952).

Ledinegg, E. und P. Urban: Zur gruppentheoretischen Behandlung der linearen Atomkette. *Acta phys. Austr.* 6, 7—29 (1952).

Die Hulthénsche Behandlung der Austauschintegrale der linearen „eingefrorenen“ Atomkette wird unter besonderer Betonung der gruppentheoretischen Hintergründe dargestellt. Mit Hilfe von gebräuchlichen Spin-Austauschoperatoren wird das Eigenwertproblem durchsichtiger formuliert. Zur schließlichen Berechnung des Grundzustandes der zyklisch geschlossenen Kette ist eine minimale Basis für den Raum der Eigenfunktionen zum Gesamtspin 0 erforderlich. Sie wird nach einem kombinatorisch-topologischen Verfahren von Rumer (dies. Zbl. 6, 42) erhalten, welches gegenüber dem ursprünglichen Vorgehen Hulthéns übersichtlicher ist und damit, im weiteren Hulthén folgend, die Berechnung eines neuen Wertes für $N = 12$ ($\eta_{12} = 1,3979 J$) erlaubt. Vor einigen sinnstörenden Druckfehlern sei gewarnt [Gl. (11 b), (16 b), (25) zweite Zeile und andere]. *F. L. Bauer.*

● **Massey, H. S. W. and E. H. S. Burhop:** Electronic and ionic impact phenomena. (International Series of Monographs on Physics.) Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press, Geoffrey Cumberlege, 1952. XVIII, 670 p. 70 s. net.

Die Monographie umfaßt in zehn Kapiteln die folgenden Gegenstände: 1. Durchgang von Elektronen durch Gase; totaler Stoßquerschnitt, seine Definition und Messung. 2. Experimentelle Analyse der Stoßquerschnitte für Zusammenstöße von Elektronen mit Atomen. 3. Zusammenstöße von Elektronen mit Atomen — theoretische Beschreibung. 4. Zusammenstöße von Elektronen mit Molekülen. 5. Reflexion und Sekundäremission von Oberflächen infolge von Elektronenbombardement. 6. Elektronische Zusammenstöße unter Emission von Strahlung. 7. Zusammenstöße zwischen Atomen unter gaskinetischen Bedingungen. 8. Durchgang homogener Strahlen von positiven Ionen oder neutralen Atomen durch Gase. 9. Zusammenstoß positiver Ionen und neutraler Atome mit Oberflächen. 10. Rekombination. — Bewußt weggelassen sind nach den Angaben des Vorworts: Elektronenbeugung; energiereiche Teilchen; Kernprozesse; chemische Kinetik. Der in dem Buch enthaltene Bereich von Erscheinungen deckt sich z. T. mit der theoreti-

schen Monographie von Mott und Massey „The theory of atomic collisions“ (Oxford, 2. Aufl. 1949, dies. Zbl. 39, 224); die jetzt gegebene Darstellung unterscheidet sich aber ganz wesentlich von der früheren: Unter Bezugnahme auf Mott und Massey wird das Wesentliche der gesamten Theorie in einer neuen, besonders anschaulichen und auch für den Experimentator verständlichen Weise beschrieben und durch viele wertvolle neue Figuren und Diagramme dem Leser nahegebracht. In den Teilen des Buches, welche bei Mott und Massey nicht behandelt sind, wie vor allem Zusammenstöße mit Molekülen und Oberflächenerscheinungen, wird in etwas ausführlicherer Darstellung eine ebenso klare Beschreibung der Theorie gegeben. Besonders angenehm empfindet man, daß in dem Buch vollständige Zusammenstellungen der zu den einzelnen Gegenständen überhaupt vorhandenen Theorien enthalten sind und daß man überall neben der Theorie in sehr glücklicher Weise die sämtlichen Anwendungsmöglichkeiten und alle Beziehungen zu den Experimenten auffindet, wobei von den einfachen Stoßexperimenten bis zum Elektronenmikroskop und der Interferenz von Radiowellen schlechterdings alles enthalten zu sein scheint. Die Darstellung der mathematischen Zusammenhänge erscheint — obwohl sie nur einen Teil des Buches ausmacht — klar und einwandfrei (wenn man etwa von dem kleinen Schönheitsfehler absieht, daß auf Seite 105 die Wahrscheinlichkeit α dafür, daß ein Teilchen des Impulses p einen Stoß erleidet, in irreführender Weise auf das Intervall zwischen p und dp bezogen wird, als ob es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelte). Daß auch die äußere Form des Buches befriedigt, versteht sich bei einer Ausgabe der Oxford University Press. Doch fühlt sich Ref. verpflichtet, auf einen Übelstand in der Art des Zitierens hinzuweisen: Wenn man glaubt, angesichts eines vollständigen Autoren- und Sachverzeichnisses auf ein alphabetisch geordnetes Gesamtliteraturverzeichnis verzichten zu können und die Zitate in Fußnoten bringt, so sollte man grundsätzlich dort auch die Namen der Verff. wiedergeben, vor allem, wenn man auf späteren Seiten mit loc. cit. ohne Angabe der früheren Seitenzahl zurückverweist.

Walter Franz.

Kober, Hermann: Die Absorption in einem Elektronen-Gas-Gemisch. Ann. der Physik, VI. F. 11, 1—11 (1952).

Als Beitrag der freien Elektronen in einem ionisierten Gas zum Quadrat des Brechungsindex liefert die Elektronentheorie einen Ausdruck der Form

$$4\pi N e^2/m (\omega^2 - i \omega S \alpha).$$

Dabei bedeutet N die Zahl der freien Elektronen in der Volumeinheit und S die mittlere Zahl der Stöße eines Elektrons mit den Gasmolekülen in der Zeiteinheit. Für den Zahlenfaktor α fand H. A. Lorentz den Wert 2, Salpeter, Lassen und Kraus dem Wert 1. Zur Neuberechnung dieses Faktors untersucht Verf. die Wirkung eines elektrischen Wechselfeldes auf die freien Elektronen im Gas unter Berücksichtigung ihrer Zusammenstöße mit den Gasmolekülen mit gaskinetischen Methoden im Anschluß an die Boltzmannsche Stoßgleichung. Er findet für α den Wert 4/3.

F. Sauter.

Darwin, Charles G.: The refractive index of an ionised gas. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 593—600 (1952).

Schlüter, Arnulf: Der Zusammenhang der Schwingungsformen eines Plasmas. Ann. der Physik, VI. F. 10, 418—421 (1952).

In einem Plasma gibt es die Langmuirschen Plasmaschwingungen, die gewöhnlichen elektromagnetischen Wellen, die longitudinalen Druckwellen, die Larmorwellen der Elektronen und Ionen um die magnetischen Kraftlinien und die Alfenschen magneto-hydrodynamischen Wellen. Es wird gezeigt, daß alle diese Wellenformen verhältnismäßig einfach zusammenhängend aus einer makroskopisch-hydrodynamischen Betrachtungsweise folgen. Ohne äußeres Magnetfeld braucht man dazu nur die Maxwellsche Gleichung für eine durch den Strom erzwungene Welle $c^2 \Delta \mathfrak{E} - c^2 \text{grad div } \mathfrak{E} = 4\pi di/dt + \partial^2 \mathfrak{E} / \partial t^2$ und die Diffusionsgleichung

$4\pi \{(\partial \mathcal{E} / \partial t) (i / \omega_p^2 + \gamma i / \omega_p^2)\}$ (ω_p = Plasmafrequenz, γ = Frequenz der auslöschenden Stöße). Mit äußerem Magnetfeld H_0 führt der mit einer Welle verbundene Strom über die Lorentzkraft $[i H_0]$ zu einer Beschleunigung des Plasmas. Es werden nicht alle Lösungen diskutiert, sondern nur an speziellen Beispielen der Lösungsgang aufgezeigt.

R. Seeliger.

Schlüter, Arnulf: Plasma im Magnetfeld. Ann. der Physik, VI. F. 10, 422—429 (1952).

Es handelt sich um den Zusammenhang zwischen einer makroskopischen Beschreibung des Verhaltens des Plasmas in einem Magnetfeld und einer mikroskopischen, bei der man die Bahnen der einzelnen geladenen Teilchen verfolgt. Die Diskussion geschieht an Hand der Auflösung verschiedener Paradoxien, die bei der mikroskopischen Betrachtungsweise sich ergeben. Mathematisch enthält die Arbeit nichts Erwähnenswertes; ihr Wert liegt in den physikalischen Beweisführungen.

R. Seeliger.

Goldstein, Louis: On the critical state of normal fluids. Phys. Review, II. Ser. 85, 35—37 (1952).

Es wird gezeigt, daß normale Flüssigkeiten im Impulsraum ihrer Relativkoordinaten ein Verhalten zeigen, welches in der Nähe ihres kritischen Punkts zu Kondensationserscheinungen in eben diesem Raume führt.

W. Macke.

Temperley, H. N. V.: On the relationships between the Landau and London-Tisza models of liquid helium II. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 490—511 (1952).

Die beiden Theorien zur Beschreibung des superfluiden Heliums von Landau wie von London-Tisza werden miteinander verglichen. Während die erste eine modifizierte Debyesche Beschreibung gibt, entwickeln die letzteren Verff. die Beschreibung als kondensiertes Bose-Einstein-Gas. Eine gemeinsame Eigenschaft beider Theorien besteht in der Bedingung $(\partial S / \partial N)_{E,V} \leq 0$ bzw. $(\partial F / \partial N)_{V,T} \geq 0$ unterhalb einer bestimmten Temperatur. Weiter sollen beide die Bildung des „Films“ erklären können, und ihre Wellenfunktionen haben die Eigenschaft großer Empfindlichkeit gegen den Einfluß äußerer Kraftfelder.

W. Macke.

Woldringh, H. H.: On the flow of He II around a spherical obstacle. Physica 18, 277—284 (1952).

Das Zwei-Phasen-Modell für Helium II wird verwandt, um den Fall einer wärmeleitenden Kugel zu behandeln, die von Helium II umspült wird. Als Grenzbedingung im unendlich Fernen wird angenommen, daß die Geschwindigkeiten beider Flüssigkeitsphasen von gleicher Richtung sind, aber von verschiedenem Betrag sein können. Die Verteilungen von Temperatur, Druck und Geschwindigkeit sowie die auf der Kugel angreifende Gesamtkraft werden bestimmt.

W. Macke.

Falkenhagen, H., M. Leist und G. Kelbg: Zur Theorie der Leitfähigkeit starker nicht assoziierender Elektrolyte bei höheren Konzentrationen. Ann. der Physik, VI. F. 11, 51—59 (1952).

Von Eigen und Wicke war darauf hingewiesen worden, daß in der Theorie starker Elektrolyte bei hohen Konzentrationen der endliche Raumbedarf der einzelnen Ionen berücksichtigt werden muß. Unter Verwendung dieser Vorstellungen berechnen die Verff. die Leitfähigkeit starker Elektrolyte und finden dabei für höhere Konzentrationen größere Leitfähigkeitswerte als nach der bisherigen Behandlung ohne Berücksichtigung des Raumbedarfes. Für NaCl, KBr und RbCl stimmen die Neuberechneten Werte bis zu Konzentrationen von 1 Mol pro Liter sehr gut mit dem experimentellen Befund überein.

F. Sauter.

Falkenhagen, H. und G. Kelbg: Klassische Statistik unter Berücksichtigung des Raumbedarfs der Teilchen. Ann. der Physik, VI. F. 11, 60—64 (1952).

Die von Eigen und Wicke angegebene Formel für die Verteilungsfunktion in starken Elektrolyten unter Berücksichtigung des Raumbedarfs der einzelnen Ionen wird auf den Fall von Ionen verschiedener Größe verallgemeinert.

F. Sauter.

Potts, R. B.: Some generalized order-disorder transformations. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 106—109 (1952).

Kramers und Wannier (dies. Zbl. 27, 285) hatten gezeigt, daß die Zustandssumme für ein quadratisches Isingnetz mit Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn, wobei die einzelnen Netzkpunkte nur zweier Modifikationen (oder Einstellungen) fähig sind, durch eine bestimmte Inversionstransformation ungeändert bleibt, sofern gleichzeitig die Temperatur entsprechend geändert wird; dabei geht eine bestimmte Temperatur in sich selbst über und kann daher als Umwandlungstemperatur dieser Anordnung angesehen werden. Verf. untersucht nun, ob eine solche Transformationseigenschaft für quadratische Isingnetze auch angegeben werden kann, wenn die einzelnen Netzkpunkte mehrerer Modifikationen fähig sind. Er findet, daß dies nur für Gitter mit zwei, drei oder vier Modifikationen möglich ist.

F. Sauter.

Murray, F. J.: The Curie point in the three dimensional order-disorder problem. Ann. of. Math., II. Ser. 55, 250—279 (1952).

Erweiterung und Verschärfung der van der Waerdenschen Betrachtungen über die Existenz eines Umwandlungspunktes in einem dreidimensionalen Ising-Gitter mit jeweils zwei Modifikationen der einzelnen Gitterelemente.

F. Sauter.

Zvonkova, Z. V. und G. S. Ždanov: Eine direkte Methode zur Bestimmung der Vorzeichen der Strukturamplituden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 529—532 (1952) [Russisch].

Um im Falle zentrosymmetrischer Strukturen die Vorzeichen (S) der Strukturamplituden $F_H \equiv F_{h_1 h_2 h_3} = \sum_{j=1}^n f_j \cos 2\pi (h_1 x_j + h_2 y_j + h_3 z_j)$ bei beliebiger Größe $|F_H|$ derselben direkt

bestimmen und damit eine direkte Fouriersynthese $\varrho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_{h_1, h_2, h_3} \sum_{-\infty}^{\infty} \pm |F_H| \cos 2\pi (h_1 x + h_2 y + h_3 z)$ ausführen zu können, wird der verallgemeinerte mittlere Ausdruck $\overline{C_H(K)} = \sum_j \cos H_j \cos K_j / \sum_j \cos H_j$ eingeführt, wodurch sich die Gleichung

$F_{H+K} + F_{H-K} = 2F_H \overline{C_H(K)}$ ergibt, welche nach Ausscheidung der Vorzeichen ($S_{H+K} = \pm 1, \dots$) die Grundbeziehung des neuen Verfahrens (1) $S_{H+K} \cdot |F_{H+K}| + S_{H-K} \cdot |F_{H-K}| = 2S_H \cdot |F_H| \cdot S_H(K) \cdot |\overline{C_H(K)}|$ liefert. Aus (1) folgt: sind die Vorzeichen S_H und $S_H(K)$ gleich (bzw. verschieden), so ist das Vorzeichen S_{H+K} oder S_{H-K} der dem Betrage nach größeren Strukturamplitude F_{H+K} oder F_{H-K} positiv (bzw. negativ). Um nach (1) die Vorzeichen bestimmen zu können, ist es erforderlich, daß das Vorzeichen $S_{H_i}(K)$ für gegebenes K bei Variation der H_i gleich bleibe. Die Möglichkeit der Erfüllung dieser Forderung kann bewiesen werden. Mittels des Verfahrens werden die Strukturamplituden durch Veränderung der Werte H und K in zwei Gruppen mit entgegengesetztem Vorzeichen zerlegt. — Eine statistische Variante dieser Methode erhält man durch Benutzung des arithmetischen Mittels $\overline{\cos(K)} = \sum_j \cos K_j / n$. Ist $|F_K|$ groß, $|F_H|$ und $|F_{H+K}|$ aber beliebig, so ergibt sich (2) $S_H =$

$\overline{S_{K_i}} \cdot S_{H+K_i}$ (Mittelung über viele K_i); sind alle $|F|$ -Werte groß, wird (2) zu (3) $S_H = S(\overline{S_{K_i}} \cdot S_{H+K_i})$. Dies stellt eine von W. H. Zachariasen [Acta Cryst. 5, 68 (1952)] abgeleitete Beziehung dar. [Nach Ansicht des Ref. gilt die ganze Theorie exakt nur für Strukturen mit gleichen Atomen; praktisch hingegen mag sie sehr wohl in erster Linie für solche mit ähnlichen Atomen (wie C, N, O) anwendbar sein.] Als Beispiel wird die Struktur von Ammoniumrhodanid $\text{NH}_4 \text{SCN}$ angegeben [J. phys. Chem. USSR 23, 1945 (1949)]. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

W. Nowacki.

Línek, Allan: A method of determining the approximate structure if the position of a certain number of atoms is known. Czechosl. J. Phys. 1, 134—136 (1952).

Ist $f = \sum_{n=1}^N f_n e^{-2\pi i (b x_n)}$ die Strukturamplitude eines Kristalls, der je Gitterzelle N Atome mit den Atomamplituden f_n an den Orten x_n enthält, so diskutiert Línek den Fall, daß alle f_n und $N_j \leq N$ Atomlagen x_n bekannt sind. Dieser Anteil liefert die errechenbare Teilstruktur-

amplitude $f_j = \sum_{n=1}^{N_j} f_n e^{-2\pi i(bx_n)}$ und $|f_j|^2$. Bekannt aus der experimentell beobachteten Streuintensität ist auch $|f|^2$. Durch Fourierinverstransformation erhält man aus f_j eine Teilelektronenverteilung ϱ_j der gesuchten Verteilung ϱ des unendlich großen Kristalls, wobei $\varrho_x = \varrho - \varrho_j$ der den nicht lokalisierten $N - N_j$ Atomen zugehörige Elektronendichteverlauf je Gitterzelle entspricht. Durch dieselbe Inverstransformation erhält man aus $|f|^2$ die Pattersonfunktion $P(x)$, aus $|f_j|^2$ die Teil-Pattersonfunktion P_j . Línék diskutiert $P - P_j$ und zeigt, daß diese Differenz einen Summanden enthält, der die bekannte Teilstruktur ϱ_j aufweist, wobei aber um jedes ihrer $N - N_j$ Atome die Reststruktur ϱ_x aufgebaut ist und der in ϱ_j fehlende Restanteil im „Pattersonraum“ am Orte $x = 0$ liegt. In einfacheren Fällen, z. B. dem der Weinsteinsäure mit 2 unbekannten Atomlagen $N - N_j = 2$, kann man nach Línék diese beiden Lagen auf 2% genau errechnen. In komplizierteren Fällen dagegen muß er auf $P - P_j$ die Superpositionsmethode von Buerger [Acta Cryst. **3**, 341 (1950)] anwenden und gewinnt nach seiner Angabe für Naphthalin 4 fehlende Atomlagen gleichfalls auf 2% genau. Falls man in P_j die fehlenden Atome in falschen Lagen berücksichtigt, zeigt $P - P_j$ negative Partien, womit ein Indiz gegeben ist, wann man Fehler macht. Línék hält die Möglichkeit für gegeben, hieraus ein ziemlich allgemein gültiges schnell konvergierendes Iterationsverfahren zu entwickeln, das auch noch funktionieren soll, wenn die Lage aller Atome unbekannt ist. R. Hosemann.

Eastabrook, J. N. and A. J. C. Wilson: The diffraction of X-rays by distorted-crystal aggregates. III. Remarks on the interpretation of the Fourier coefficients. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 67—75 (1952).

Wie in Teil I [A. R. Stokes u. A. J. C. Wilson, Proc. phys. Soc. **56**, 174 (1944)] und II [A. J. C. Wilson, Acta Cryst. **2**, 220 (1949)] gezeigt wurde, ist die Form einer Röntgenlinie ($h00$) eines Gitters mit kleinen Teilchen und Verzerrungen durch eine Fourier-Reihe mit Koeffizienten $A(h, m) = N(m) J(h, m)$ gegeben, wobei über den Abstand m zweier Zellen summiert wird. Die anfängliche Neigung ($m \rightarrow 0$) von $A(h, m)$ als Funktion von m bestimmt die mittlere Teilchengröße, die anfängliche Krümmung ergibt eine untere Grenze der mittleren quadratischen Verzerrungen. In der vorliegenden Mitteilung wird untersucht, welche möglichen Aussagen unter Berücksichtigung der experimentellen Bedingungen tatsächlich gemacht werden können. Zwei Beschränkungen sind besonders wichtig: Die anfängliche Form der Kurve hängt von dem kaum genau erfaßbaren Auslauf der Linie in den Untergrund ab, und bei großen Teilchen, die gleichzeitig Dehnungen und Stauchungen aufweisen, verläuft $A(h, m)$ für große m exponentiell mit m , so daß die Extrapolation $m \rightarrow 0$ auf zu kleine Werte der Teilchengröße und der Gitterverzerrungen führt. Da gewöhnlich nur wenige Ordnungen einer Linie ($h00$) gemessen werden können, so sind die möglichen Aussagen im allgemeinen beschränkt. Nur in drei besonderen Fällen, z. B. bei fehlenden und bei kurzperiodischen Gitterverzerrungen, können die Fourier-Koeffizienten aus zwei Linien ermittelt und so genaue Aussagen gemacht werden. A. Kochendörfer.

Wiśniewski, F. J.: Une déduction non ondulatoire des formules de la diffraction des particules sur un cristal. Nuovo Cimento, Ser. IX **9**, 186—188 (1952).

Wiśniewski betrachtet ein im Punkt A startendes Teilchen der Ruhmasse m_0 , das in einen Kristall eindringt und an einem am Orte P liegenden Atom vollelastisch kollidiert, um schließlich zum Aufpunkt B außerhalb des Kristalles zu gelangen. Betrachtet er ferner zwei Punkte P' , P'' unmittelbar vor und hinter P auf der Teilchenbahn und variiert beider Lage längs einer Kristall/Netz-ebene mit dem reziproken Vektor b , so leitet er hieraus für $P' \rightarrow P'' \rightarrow P$ mit Hilfe des Hamiltonschen Extremalprinzips die Lauesche Reflexionsbedingung ab: $b = (s' - s'')/\lambda$ (λ Wellenlänge der Strahlung, s' , s'' Einheitsvektoren in Richtung der einfallenden und gestreuten Strahlung). Die Variation lautet ($L = p v - H$ Lagrangefunktion, p Impulsvektor und H Gesamtenergie des Teilchens):

$$(1) \quad \delta \int_A^{P'} L dt + \delta \int_{P''}^B L dt = 0 \text{ mit } P' \rightarrow P'' \rightarrow P.$$

Ist W Hamiltons Prinzipalfunktion, für die die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung lautet grad $W = p$; $\delta W/\delta t = -H$, so folgt aus (1): (2) $\delta(W' - W'') = (p' - p'') \delta x - (H' - H'') \delta t$. Letzteres verschwindet identisch (vollelastischer Stoß, der zugleich fordert $|p'| = |p''|$). Also steht $p' - p''$ senkrecht auf δx . Da der geometrische Ort für alle Punkte auf einer Kristallnetzebene gegeben ist durch $(bx) = \text{const}$ und nach Wiśniewski δx senkrecht stehen soll auf b : $(b \delta x) = 0$, so folgt aus (2), was zu beweisen war: $p' - p'' = h b$, wobei h eine skalare Konstante der Dimension einer Wirkung ist, die nach der de Broglieschen Beziehung nichts anderes sein kann als das Plancksche Wirkungsquantum. R. Hosemann.

Raynor, G. V.: The band structure of metals. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. **15**, 173—248 (1952).

Zusammenfassender Bericht über die existierenden Berechnungen der Energiebänderstruktur der Metalle, und zwar im einzelnen der Alkalimetalle, der Metalle der

ersten Nebengruppe des periodischen Systems, der zweiwertigen Metalle, des Aluminiums, der Übergangsmetalle und von Legierungen, einschließlich einer Übersicht über andere Metalle und über die Nichtmetalle.

Walter Franz.

Hoffmann, T. A.: Some investigations in the field of the theory of solids. V. Adsorption surface states. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 2, 195—207 und russische Zusammenfassg. 208 (1952).

Im Anschluß an die früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 42, 232; 43, 443; 47, 455) wird der Einfluß einer auf die Endfläche eines Kristalls aufgetragenen Fremdatomschicht untersucht. Wie früher wird die Wechselwirkung zwischen nicht benachbarten Atomen vernachlässigt und außerdem die einzelne senkrecht zur freien Oberfläche verlaufende atomare Kette als von den benachbarten unabhängig betrachtet. Es zeigt sich, daß ganz allgemein außerhalb des Energiebandes des Kristalls 0, 1 oder 2 diskrete Energieniveaus auftreten. Sie entsprechen, für den Fall, daß die „Fremd“-Atome mit den Atomen des Materials identisch sind, den Tammschen bzw. Shockleyschen Oberflächenzuständen. Das Auftreten solcher Terme wird möglich, wenn der Abstand der absorbierten Atome von den Nachbaratomen kleiner ist als der normale Atomabstand in der Substanz. Sie ergeben sich (wie bei Shockley) paarweise, solange man das Überlappungsintegral benachbarter Atome vernachlässigt. Bei Berücksichtigung der Überlappung ist dies nicht mehr der Fall. Am Beispiel des Lithiums wird gezeigt, daß dort das Auftreten eines Oberflächenzustandes wahrscheinlich, zweier Oberflächenzustände dagegen ziemlich ausgeschlossen ist; Stabilitätsbetrachtungen zeigen, daß im Falle ungerader Valenzen eine aus Eigenatomen bestehende Oberflächenschicht in jedem Falle stabil sein sollte, während sich über gerade Valenzen in der behandelten Näherung keine Aussagen machen lassen. Eine absorbierte Fremdatomschicht sollte im Fall ungerader Valenzen nur dann stabil sein, wenn der Oberflächenzustand in das Energieband des Materials hineinfällt.

Walter Franz.

Drăganu, Mircea: Sur l'émission électronique dans un champ électrique intense par des électrodes cylindriques indéfinies. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 4, 629—634 u. russische und französ. Zusammenfassg. 634, 634 (1952) [Rumänisch].

L'A. étudie l'émission électronique dans un champ électrique intense par des électrodes cylindriques indéfinies. La méthode utilisée est celle de L. Nordheim et R. H. Fowler. Les calculs montrent que la correction due au rayon de courbure du cylindre est tout à fait négligeable, ce qui explique l'absence d'un tel effet expérimental.

Autoreferat.

Eisenstein, Julian: Spin-spin relaxation in a simple system. Phys. Review, II. Ser. 85, 603—606 (1952).

Verf. betrachtet ein System, bestehend aus zwei örtlich festgehaltenen Dipolen vom Spinnmoment $1/2$ unter der gegenseitigen Dipolwechselwirkung und unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes. Für den Fall, daß dieses Magnetfeld zeitlich konstant ist, werden die Energieeigenwerte des Systems angegeben. Ferner werden die Differentialbeziehungen zur Berechnung des magnetischen Momentes der Anordnung für den Fall eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes angegeben und für bestimmte Funktionen $H(t)$ integriert.

F. Sauter.

Kac, M. and J. C. Ward: A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model. Phys. Review, II. Ser. 88, 1332—1337 (1952.)

MacDonald, D. K. C. and K. Sarginson: Galvanomagnetic effects in conductors. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 15, 249—274 (1952).

Marcus, Paul M.: The free energies and phase transition of a cylindrical superconductor. Phys. Review, II. Ser. 88, 373—381 (1952).

Vor Kenntnis der phänomenologischen, elektrodynamischen Theorie der Supraleitung von London und v. Laue wurden einige Eigenschaften des Supraleiters von Gorter und Casimir (dies. Zbl. 8, 3:0) durch thermodynamische Untersuchung des Zweiphasensystems Supra-Normalleiter verständlich gemacht. Der supraleitende Zustand wurde dabei als vollständiger Diamagnetismus betrachtet. Die Elektrodynamik von London-v. Laue widerlegt bekanntlich diese Auffassung. Trotzdem werden bis heute sehr häufig die Gorter-Casimir'schen Ausdrücke für freie Energie und Enthalpie benutzt, obwohl die aus der richtigen Elektrodynamik abgeleiteten Beziehungen durch h. v. Laue (dies. Zbl. 31, 191) angegeben wurden. Verf. leitet für den Spezialfall des zylindrischen Supraleiters im homogenen Feld freie Energie und freie Enthalpie nochmals auf Grund der korrekten elektrodynamischen Vorstellung ab und gibt diese Ausdrücke als Funktion des äußeren Feldes H , und des magnetischen Flusses Φ , zunächst unabhängig von der speziellen Form der Londonschen Gleichungen, an. Sodann wird unter Heranziehung dieser Gleichungen, aber ohne Zusatzannahmen, wie z. B. die Existenz einer Oberflächenenergie, die

Bedingung für die Phasenumwandlung und die kritischen Feldstärken (H_{cm} : krit. Feldstärke des unendlichen supraleitenden Halbraumes; H_c : krit. Feldstärke des endlichen zylindrischen Supraleiters; H_{ct} : Feldstärke, bei der vollständige Umwandlung zum Normalleiter eintritt) abgeleitet. Es ergibt sich für den semikonvex geformten Körper $H_{cm} < H_c < H_{ct}$. Weiter werden Stabilitätsfragen untersucht und der vollständig supraleitende Körper als metastabiler Zustand erkannt, der durch eine Potentialschwelle daran gehindert wird, in die Londonsche „Schichtenstruktur“ [F. London, „Superfluids“, Teil I, New York 1950, S. 16—19, dies. Zbl. 41, 585; siehe auch Ann. der Physik, VI. F. 10, 296—316 (1952)] überzugehen. *F. Beck.*

Astronomie. Astrophysik. Geophysik

Rodriguez-Salinas, Baltasar: Über verschiedene Verfahrensweisen bei der Bestimmung der Perioden der Gezeiten und ihrer Vorhersage für einen bestimmten Ort. *Revista Acad. Ci. Madrid* 46, 441—457 (1952) [Spanisch].

Bei manchen astronomischen, geodätischen, meteorologischen und geophysikalischen Problemen, etwa bei der Bestimmung der Gezeiten, erwächst die Aufgabe, den Ausdruck $h = h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$ zu berechnen oder doch näherungsweise zu bestimmen (h die gemessene physikalische Größe). Der Verf. löst diese Aufgabe mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und der Laplace-Transformation, bzw. durch eine Kombination dieser beiden Methoden.

H. Nabl.

Ledoux, P.: Note sur les périodes de pulsation d'étoiles à grande concentration massique et le problème des céphéides. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 21, 408—420 (1952).

Pajares, Emilio: Über ein Problem der Bahnbestimmung von Doppelsternen. *Revista Acad. Ci. Madrid* 46, 307—313 (1952) [Spanisch].

Ferrari d'Occhieppo, Konradin: Die Häufigkeitsfunktion der Sternmassen. *Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa* 161, 175—206 (1952).

Kikuchi, Sadaemon: The distribution function of velocities of the stellar system in steady state. *Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser.* 36, 63—72 (1952).

Durch Umformung der Beziehung $\varrho(x, y, z) = \iiint f(u, v, w) du dv dw$ zwischen der räumlichen Dichte der Sterne ϱ und ihrer Geschwindigkeitsverteilungsfunktion f versucht Verf. Einblick zu bekommen in den Zusammenhang zwischen f und der Potential- oder Dichteverteilung eines Sternsystems. Das Potential soll dabei zum Teil von den betrachteten Sternen herrühren, zum Teil anderen Ursprungs sein. Die resultierende Integralgleichung liefert f , wenn der Zusammenhang zwischen Potential und Dichte bekannt ist. Einige (künstliche) im wesentlichen eindimensionale Probleme werden durchgerechnet.

A. Unsöld.

Knighting, E.: On the equation of diffusion in the atmosphere. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 423—431 (1952).

Die zweidimensionale Diffusionsgleichung mit einem Diffusionskoeffizienten proportional einer bestimmten Höhe über einem gegebenen Nullniveau (zumeist dem Erdboden) wird näher untersucht. Die Ergebnisse können in den Problemen der unteren Atmosphäre Anwendung finden. Es werden Lösungen mit den gebräuchlichen Grenzbedingungen gegeben, aber auch auf Lösungen für besondere Probleme wird hingewiesen. Eingehende Untersuchungen werden zur Festlegung der Größe des Exponenten im Potenzgesetz des Diffusionskoeffizienten vorgenommen und Schlüsse über die Anwendbarkeit der Lösungen in verschiedenen Fällen gezogen. *A. Defant.*

Dedecker, Paul: L'influence de la force de Coriolis sur les mouvements atmosphériques. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 38, 637—641 (1952).

Aus den exakten Bewegungsgleichungen für eine Luftmasse auf der rotierenden Erde wird die auf sie wirkende Corioliskraft abgeleitet. Das Resultat wird mit jenem verglichen, das aus angenäherten Gleichungen abgeleitet werden kann.

A. Defant.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abascal, E. Vidal s. Vidal
 Abascal, E. 398, 408.
 Achiezer, N. I. (Familie ganzer Funktionen) 47.
 Aczél, J. (Vektoren und Quaternionen) 386.
 Adam, P. Puig s. Puig
 Adam, P. 289.
 Adams II, E. N. (Electron in a perturbed potential) 235.
 Adem, José (Steenrod squares) 170.
 Adirovič, E. I. (Raumladung) 437.
 Adkins, J. E. and R. S. Rivlin (Elastic deformations of isotropic materials. IX.) 182.
 Agamirzjan, L. A. (Axialsymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie) 339.
 Agnew, Ralph Palmer (Summability methods) 41; Tauberian series) 294.
 Agostinelli, Cataldo (Limiti relativi al campo ellittico) 49; (Propagazione di onde elettromagnetiche) 208; (Funzioni epicicloidali) 305; (Onde elettromagnetiche in cavità ellissoidale) 438.
 Ahlfors, Lars V. (Hyperbolic Riemann surfaces) 59.
 — — — and H. L. Royden (Riemann surfaces) 59.
 Aigner, Alexander (Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$) 275.
 Aiyer, K. Rangaswami s. Rangaswami Aiyer, K. 134.
 Akivis, M. A. (Geometrie der Hyperflächen) 397.
 Aleksandrov, A. D. (Wellenfunktionen) 442.
 Alexander, S. N. s. J. L. McPherson 105.
 Alexandroff (Aleksandrov), P. S. (Dualitätssätze und Dimension) 412.
 Alexiewicz, A. and W. Orlicz (Differentials in Banach spaces) 352.
 Alexits, G. (Fonctions orthogonales) 302.
 Alfsen, Erik (Diffusion) 228.
 Allen, D. N. de G. and R. T. Severn (Relaxation methods. II.) 202.
 — H. S. (Spaces of linear functionals) 87.
 Allis, William P. and Melvin A. Herlin (Thermodynamics and statistical mechanics) 431.
 Almeida Costa, A. (Theorie der Ringe) 24.
 Altshiller-Court, N. (College geometry) 373.
 Alumjaé, N. A. (Kritischer Wert eines Spannungszustandes) 181; (Axialsymmetrische Deformationen) 424.
 Amaldi, E. (Diffraction effects) 228.
 Amato, V. (Equazioni delle curve G_s) 11.
 Anderson, Orson L. (Stress deviator tensor) 183.
 — R. D. (Mappings in the plane) 411; (Dimension-raising mappings) 412.
 — T. W. and D. A. Darling („Goodness of fit“ criteria) 113.
 Andreev, P. P. (Mathematische Tafeln) 105.
 Andreian, Cabiria (Théorème des disques) 417.
 Andreoli, Giulio (Spazi algebrici proiettivi) 259.
 Andreotti, A. (Surfaces algébriques irrégulières) 146, 379; (Surfaces irrégulières) 379.
 Ankeny, N. C. (Theorem of Suetuna) 31.
 Aoki, Kiyoshi (Maps of a sphere) 416.
 Apfelbeck, Alois (Khintchine's principle of transfer) 278.
 Araki, Gentaro and Tomokazu Murai (Molecular structure of carotenoids) 453.
 — — s. T. Murai 453.
 Arima, Kihachiro (Integral functions) 311, 312.
 Arnous, E. (Dämpfungsphänomene. III.) 224.
 — — und K. Bleuler (Dämpfungsphänomene. II.) 224.
 Arrault, Jean (Série trigonométrique) 42.
 Artmann, Kurt (Interferenzdoppelbrechung) 236.
 Artobolevskij, I. I. s. L. V. Assur 387.
 Aržanikov, N. S. und V. N. Mal'cev (Aerodynamik) 429.
 Aržanyč, I. S. (Anholonome konservative Systeme) 175.
 Ascoli, Guido (Communication de H. Schwerdtfeger) 11.
 — R. (Interazioni non localizzabili) 225.
 Ashkin, J. and G. C. Wick („Impulse approximation“) 451.
 Ashley, Holt, John Dugundji and Donald O. Neilson (Air loads on a wing) 190.
 Assur, L. V. (Ebene Stabmechanismen) 387.
 Ataman, Adnan (Artificial slot antennas) 209.
 Atanasjan, L. S. (Signierte Mannigfaltigkeiten) 401.
 Atkinson, F. V. (Nullstellen gewisser extremaler Polynome) 46.
 Aubert, K. E. (Abstract ideal theory) 24.
 — — — s. V. Brun 272.
 Aufenkamp, Don s. A. Lichnerowicz 419.
 Aumann, Georg (Lebesguesches Maß) 37; (Integralerweiterungen) 37.
 Avazašvili, D. Z. (Beugung monochromatischer Wellen) 211.
 Aymerich, Giuseppe (Oscillazioni di circuiti elettrici) 207; (Oscillazioni forzate periodiche) 328.
 Azorin, F. (Nichtzentrale t -Verteilung) 365.

- Bäbler, F. (Bemerkungen zur Arbeit von Cantoni) 418.
- Badrawy, Rashad M. El. s. El Badrawy, Rashad M. 430.
- Bagchi, Hari Das (Circular cubics. II.) 140.
- — — and Manindra Chandra Chaki (Plane collineations) 137; (Autopolar plane cubics) 140.
- — — e Biswarup Mukherji (Types of curves) 141.
- — — and Bhola Nath Mukherji (Bateman functions) 306; (Gegenbauer functions) 306.
- Bagemihl, F. s. A. Y. Khinchin 272.
- Bahadur, Raghu Raj and Leo A. Goodman (Impartial decision rules) 119.
- Baiada, Emilio (Criterio di convergenza) 291.
- Bajraktarević, M. (Bornes du module d'une somme) 305.
- Baldassarri, Mario (Sistemi algebrici) 139; ($I_{n,2}^3$ e varietà rappresentative) 381.
- Ballieu, Robert (Matrices inverses) 11.
- Bang, Thøger (Points singuliers) 40.
- Baños jr., Alfredo and Robert K. Golden (Electromagnetic field) 205.
- Baranova, E. I. (Energieniveaus eines atomaren Elektrons) 219.
- Barasch, Murray L. s. H. B. Callen 199.
- Barbalat, I. (Limites multiples) 409.
- Barenblatt, G. I. und B. M. Levitan (Randwertprobleme der turbulenten Wärmeleitung) 335.
- Bargmann, V. (Bound states in field of force) 219.
- Bari, N. K. (Primitive Funktionen) 42; (Eindeutigkeit der Entwicklung in trigonometrische Reihe) 303.
- Barlotti, Adriano (Formule di prostaferesi) 374.
- Barner, Martin (Projektive Differentialgeometrie der Kurven) 392; (Differentialgeometrie der Kurvenpaare) 392; (Differentialgeometrie der Netze) 395.
- Barrett, L. C. and C. J. Thorne (Oscillations of gas bubble) 431.
- Bartlett, M. S. (Statistical significance) 118.
- Basu, S. K. (Cesàro and Hölder means) 295.
- Batchelor, G. K. (Turbulent motion) 431.
- Bates, D. R. (Transition probabilities) 453.
- Battistini, Mario (Girolamo Cardano) 242.
- Beard, R. E. (Use of incomplete gamma function) 125.
- Becher, Karl (Elektrodynamik. II.) 204.
- Beckenbach, E. F. (Mean values of analytic function) 313.
- Beckmann, Martin (Model of transportation) 130.
- Behrend, F. A. (Metrisierbarkeitsbegriff) 283.
- Bellman, Richard and Richard Latter (Integral equation) 346.
- Bendukidze, A. D. (Starke Summierbarkeit) 295.
- Benson, F. (Productivity of machines) 364.
- Berezki, Ilona (Markovsches Problem) 246.
- Bereis, Rudolf (Böschungslinien auf Drehquadriken) 172; (Perspektiver Schnelleri) 172.
- Berg, Paul W. and Peter D. Lax (Fourth order operators) 74.
- William D. et Otton Martin Nikodým (Ensembles convexes. I. II.) 86.
- Berghuis, J. (Abgebrochene Potenzreihen) 301; (Entire functions in analytic interpolation) 310.
- — s. J. A. Zonneveld 301.
- Bergmann, Gustav (Multiplicative closures) 22.
- Bergström, Harald (Stable distribution functions) 360.
- Berkeley, Edmund C. (Symbolic Logic) 244; (Circuit algebra. Introduction) 251.
- Berman, D. L. (Lineare Operationen) 95; (Lineare trigonometrische Polynomoperationen) 95.
- Gerald (Finite projective geometries) 371.
- Beurling, Arne (Géométrie métrique des surfaces) 388.
- Bhatia, A. B. and K. Huang (Perturbation calculation) 229.
- Bhatnagar, K. P. (Laplace integral) 84.
- Bhattacharyya, Bimal Krishna (Filter network) 437.
- Biarge, Julio Fernández (Zirkulare Kubiken) 140.
- Biedenharn, L. C., Keith Boyer and R. A. Charpie (Angular correlations of radiations) 451.
- Biernacki, Mieczysław (Inégalité due à Tchétyscheff) 289.
- Bilo, J. (Géométrie projective quaternionienne) 131.
- Bing, R. H. (Partitioning curves) 412.
- Biot, A. (Systèmes pancratiques) 214.
- Birindelli, Carlo (Formule interpolatorie) 357.
- Biswas, S. N. (Radiation damping) 229.
- Bjušgens, S. S. (Stromlinien. II.) 390.
- Black, Max s. G. Frege 1.
- Blackman, M. (Vibrational frequencies of ionic lattice) 235.
- Blanc, Charles (Étude stochastique de l'erreur) 100.
- Blanchard, René (Triangles inscrits et circonscrits) 138.
- Blaschke, Wilhelm (Varietà di Segre) 377.
- Bleuler, K. s. E. Arnous 224.
- Block, H. D. and Buchanan Cargal (Arbitrary mappings) 34.
- Blomqvist, N. (Exhaustion process) 111.
- Boas, Ralph P. (Fonctions possédant une suite de dérivées positives) 293.
- jr., R. P. (Inequalities) 55; (Growth of analytic functions) 312.
- Bochner, S. (Functions of exponential type) 63.
- — and K. Yang (Tensorfields) 158.
- Boer, J. de (Sequenz-Tests) 366.
- Bohm, D. (Quantum theory) 218.
- Bohman, Harald (Approximation of analytic functions) 299.
- Bohr, Harald (Zeuthens Mathematikgeschichte) 241.
- Boivie, O. s. H. Laadi 117.
- Bolotovskij, B. und A. Kolomenskij (Energieverlust) 213.
- Boltjanskij, V. (Schnittflächen) 170.
- Bolz, Rav E. (Dynamic stability) 428.

- Bompiani, E. (Metriche non-Euclidee) 132; (Geometrie non-euclidee. I. II.) 372; (Coordinate di Grassmann) 376; (Calottes superficiali) 394; (Curvatura pangeodetica) 394.
- Bononcini, Vittorio E. (Problema di Dirichlet) 79; (Integrali regolari) 82.
- Bordoni, Piero Giorgio (Nociolo di sicurezza) 166.
- Borel, Armand (Fonctions automorphes) 64.
- Borg, Göran (Uniqueness theorems in spectral theory) 68.
- Bose, B. N. (Operational calculus) 346.
- N. N. (MacRobert's E-function) 346.
- R. C. and K. A. Bush (Orthogonal arrays) 8.
- — — and T. Shimamoto (Block designs) 116.
- S. K. (Maximum and minimum function) 56; (Whittaker transform) 84; (Maximum function) 312; (Laplace transforms) 346.
- Bozworth, R. C. L. (Heat transfer phenomena) 434.
- Botella Raduan, F. (Geometrie in Riemannschem Raume) 398.
- Bottema, O. (Polardreiecke) 376.
- Bouchout, V. van (Verbiegung einer Kongruenz) 390.
- Boyer, Keith s. L. C. Biedenharn 451.
- Braconnier, Jean (Algèbres de groupes) 348.
- Brafman, Fred (Ultraspherical polynomials) 306.
- Bragard, L. (Harmoniques sphériques) 305; (Intégrales doubles) 305; (Densité d'une masse fluide et la pesanteur superficielle) 431.
- Brandt, Heinrich (Quadratisches Reziprozitätsgesetz) 273.
- Brauer, Alfred (Characteristic roots. V.) 10.
- Brechovskich, L. H. und I. D. Ivanov (Grenzen der Anwendung der Strahlungstheorie) 209.
- Brelot, Marcel (Problème de Dirichlet) 78.
- Britzelmayr, Wilhelm (Axiomatik der Wahrscheinlichkeitslehre) 247.
- Brodskij, A. s. D. Ivanenko 226.
- M. L. (Fehler der Eigenwerte einer variierten Matrix) 101.
- Broer, L. J. F. (Shock structure. I.) 196.
- Brogie, Louis de (Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules) 220; (Interprétation de la mécanique ondulatoire) 442; (Idées d'onde-pilote) 442.
- — — s. A. Mercier 435.
- Broman, Arne (Conformal mapping) 57.
- Brooks, Franklin C. (Intermolecular force series) 453.
- Brouwer, L. E. J. (Invariante Punktkerne) 284.
- Brun, Viggo, J. O. Stubban, J. E. Fjelstad, R. Tambs Lyche, K. E. Aubert, W. Ljunggren and E. Jacobsthal (Binomial coefficients) 272.
- Brusotti, Luigi (Metodi di esaurimento) 241.
- Brzezicki, A. de Castro s. Castro Brzezicki, A. de 328.
- Buch, Kai Rander (Sentence-length) 118.
- Buchi, J. Richard (Representation of complete lattices) 22.
- Buckel, Walter (Ähnlichkeit im Großen) 58.
- Bückner, Hans (Formula for an integral) 323; (Integral-Gleichungen) 537.
- Bukovszky, Ferenc (Wahrscheinlichkeitstheorie) 359.
- Buneman, O. (Circulation) 204.
- Buquet, A. (Équation diophantienne $x^3 + dx + e = z^2$. I.) 29.
- Burger, E. (Cayley-Zahlen) 265.
- Burhop, E. H. S. s. H. S. W. Massey 453.
- Burniat, Pol (Surfaces algébriques) 380.
- Burton, Leonard P. (Oscillation theorems) 66.
- Busbridge, W. s. V. Kourganoff 201.
- Buscham, W. (Integrodifferentialgleichungen) 343.
- Bush, K. A. s. R. C. Bose 8.
- Bustamante, Enrique (Elementary particles) 220.
- Butzer, P. L. (Kantorovitch polynomials in L^r) 46.
- Caccioppoli, Renato (Misura e integrazione sugli insiemi. I. II.) 37; (Integrazione sulle varietà parametriche. I. II.) 37; (Funzioni pseudo-analitiche. I. II.) 60; (Nota del B. Ferretti) 96.
- Caldirola, P. e P. Gulmanelli (Nuova equazione ondulatoria) 221.
- Callen, Herbert B., Murray L. Barasch and Julius L. Jackson (Irreversibility) 199.
- — — s. R. F. Greene 197.
- Călugăreanu, G. (Normes d'un espace vectoriel) 347.
- Campbell, Robert (Sommes de Féjer) 45; (Séries de polynômes orthogonaux) 46; (Fonctions de Lamé) 50.
- Capon, R. S. (Hamilton's principle) 175.
- Caprioli, Luigi (Onde elettromagnetiche trasversali) 208.
- Caputo, Michele (Configurazione delle curve algebriche sghembe) 143.
- Carafa, Mario (Calcolo di un determinante) 100.
- Cargal, Buchanan s. H. D. Block 34.
- Carlitz, L. (Ménage polynomials) 7; (Irreducible polynomials) 27; (Coefficients of hyperelliptic functions) 30; (Primitive roots in a finite field) 273.
- Carlson, Fritz (Séries de Dirichlet) 53.
- Carruth, Philip W. (Products of ordered systems) 23.
- Cartan, Henri (Théorème de Radó) 320.
- — et Jean-Pierre Serre (Espaces fibrés. I.) 413.
- Cartwright, M. L. (Van der Pol's equation) 69.
- Casa, Carlos Federici s. Federici Casa, Carlos 375.
- Castro Brzezicki, A. de (Nichtlineare Mechanik. I.) 328; (Differentialgleichungssysteme der nichtlinearen Mechanik) 328.
- Cattabianchi, Luigi Tanzi s. Tanzi Cattabianchi, Luigi 49.
- Cattaneo, Carlo (Torsione di sfere) 182.
- Cavallaro, M. Vincenzo G. (Points isodynamiques)

- 134; (Triangles brosteiné-riens) 134.
- Čeban, V. G. (Elastoplastische Stäbe) 187.
- Černý, Karel (Minimum of binary biquadratic forms) 32.
- Cetović, Simon (Différentiabilité des fonctions réelles) 291.
- Cetlin, M. L. (Synthese von Relais-Kontaktschemata) 250.
- Chak, A. M. s. H. M. Srivastava 51.
- Chaki, Manindra Chandra s. Hari das Bagchi 137, 140.
- Chamard, Lucien (Distance d'un point à un ensemble) 407.
- Champernowne, D. G. (Income distribution) 128.
- Chandrasekhar, S. (Thermal instability) 239; (Stellar scintillation) 433.
- Chang, C. C. and H. D. Conway (Marcus method applied to solution of loaded plate) 180.
- — — and Jack Werner (Telegraph equation) 431.
- Fu-Hwa (A series) 272.
- Shih-Hsun (Theorem of Goureat and Heywood) 343.
- Chaplanov, M. G. (System analytischer Funktionen) 90.
- Charnes, Abraham (Wing-body interaction) 431.
- Charpie, R. A. s. L. C. Biedenbarn 451.
- Charrueau, André (Formules matricielles) 139.
- Chattelun, Lucien (Calcul vectoriel. I.) 386.
- Chenea, P. F. s. H. M. Hansen 425.
- Cheng, M. T. (Multiple trigonometric series) 305; (Theorem of Nicolesco) 340.
- Chernoff, H. (Asymptotic efficiency for tests) 118.
- Cherubino, Salvatore (Sistemi lineari infiniti) 355.
- Chew, Geoffrey F. and M. L. Goldberger (Scattering of particles) 451.
- — — and Gian Carlo Wick (Impulse approximation) 450.
- Chinčhin, A. Ja. (Äquivalente Ereignisse) 107.
- — — s. A. Y. Khinchin 272.
- Chisini, O. (Courbes de di-ramation) 143; (Trecceratteristiche) 378.
- Chodžaeu, L. Š. (Newton-sches Potential) 352.
- Chow, Wei-Liang (Fundamental group of an algebraic variety) 383; (Picard varieties) 384.
- Christov, Chr. Ja. (Lichtstrahlen durch eine kristallinische Platte) 213.
- Chuang, Chi-Tai (Fonctions convexes croissantes) 290.
- Chung, Kai Lai (Renewal theorem) 111.
- Church, A. (Formal logic) 1.
- Cicco, John de s. E. Kasner 76.
- Cini, M. (Dirac's electrodynamics) 204; (Commutation laws) 222.
- Cinquini, Silvio (Funzioni quasi-periodiche) 62.
- Cinquini-Cibrario, Maria (Metodi esistenziali) 97.
- Clark, F. E. (Positivity of polynomial forms) 12.
- J. T. (Logic) 244.
- Clendenin, W. W. s. P. J. Luke 232.
- Clifford, A. H. (Partially ordered Abelian groups) 91.
- Cockcroft, W. H. (Homomorphisms of sequences) 21.
- Cohen, Eckford (Congruences du deuxième degré) 269.
- Hirsh (Stability equation) 67.
- Cohn, Harvey (Fields of small discriminant) 26.
- Collatz, L. (Aufgaben monotoner Art) 98.
- Collingwood, Edward F. (Inversion de la seconde inégalité fondamentale) 312; (Fonction méromorphe) 313.
- Colombo, Giuseppe (Isteresi oscillatoria) 71.
- Comét, Stig (Conformal mapping) 20.
- Comole, Raymond (Écoulement radial) 195, 196.
- Conforto, Fabio (Geometria simplettica) 147.
- Consoel, R. (Processus composés de Boisson) 362.
- Conte, Luigi (Elisse di Fagnano o di Huygens?) 243; (V. Viviani) 243.
- Conway, H. D. s. C. C. Chang 180.
- Corben, H. C. (Unified field theory) 220; (Field theory) 221; (Current density) 221.
- Corkan, R. H. and A. T. Doodson (Free tidal oscillations) 196.
- Cossu, Aldo (Trasformazioni puntuali) 156.
- Costa, A. Almeida s. Almeida da Costa, A. 24.
- Cotlar, Mischa (Ergodentheorie) 92.
- Couffignal, Louis (Machines à penser) 105.
- Courant, Richard (Modern fluid dynamics) 431.
- Courtois, V. (Al-Biruni) 242.
- Cowden, Dudley J. (Correlation coefficient) 116.
- Cowling, T. G. (Oscillation theory) 238.
- Cox, R. T. (Brownian motion) 200.
- Coxeter, H. S. M. (Rings of spheres) 140.
- Craggs, J. W. (Penetration of a plate by a cone) 184.
- Crispen, J. W. s. K. M. Siegel 48.
- Croisot, R. (Demi-groupes) 253.
- Cugiani, Marco (Frazioni continue) 298.
- Cullwick, E. G. (Electromagnetic momentum) 435.
- Curry, Haskell B. (Logique algébrique) 2; (System LD) 2; (Permutability of rules) 2; (Elimination theorem) 3.
- Curtis, Charles W. (Noncommutative polynomials) 24.
- Cypkin, M. E. s. A. P. Norden 398.
- Dabrowski, Janusz (Interference of electric dipole radiation) 212.
- Daniels, H. E. (Stiff chains) 433.
- Danielsson, Gösta (Inequality $d^2 \leq (R + r)(R - 3r)$) 134.
- Danilovskaja, V. I. (Dynamisches Problem der Thermoelastizität) 203.
- Danos, Michael (Multipol-schwingungen des Atomkerns) 230.
- Danskin, J. M. (Dresher's inequality) 40.
- jr., J. M. (Minimizing surfaces) 81.
- Darling, D. A. s. T. W. Anderson 113.
- Darwin, Charles G. (Refractive index) 454.

- Davenport, Charles K. (Graphical methods in history of logic) 6.
- H. (Diophantine approximation) 32.
- jr., W. B., R. A. Johnson and D. Middleton (Statistical errors) 200.
- Davies, R. O. (Subsets of finite measure) 37.
- Davis, Anne C. ($\xi^n = \alpha$ pour des types d'ordre) 283.
- Chandler (Estimating eigenvalues) 95; (Intersection of linear subspace with positive orthant) 406.
- R. C. (Prediction of stochastic processes) 362.
- Daykin, P. N. (Self-energy problem) 223.
- Dean, W. R. (Motion of viscous liquid) 195.
- Debrunner, H. (Zerlegungsgleichheit von Würfeln) 135.
- Dedecker, Paul (Force de Coriolis) 459.
- Dehalu, M. (Système électro-mécanique) 418.
- Dekker, J. W. (Inhalt des Prismoids) 290.
- Delange, Hubert et Marc Zamsky (Séries divergentes) 294.
- Delevsky, J. (Paradoxes mathématiques) 248.
- Delone, B. N. (Galoissche Theorie) 251.
- Dénes, Peter (Diophantische Gleichung) 29; ($x^l + y^l = cz^l$) 275.
- Dengler, M. A. and Martin Goland (Subsonic calculation) 188.
- Denjoy, Arnaud (Addition des permutations) 35; (Suites finies) 35; (Définition d'un nombre ordinal) 35; (Permutations clivées) 35; (Nombres de seconde espèce de la classe II) 35; (Suites canoniques. I. II.) 35; (Nodales des suites régulières) 35.
- Derjugin, L. N. (Reflexionskoeffizienten) 438.
- Diaz, J. B. and M. H. Martin (Problem of Cauchy. II.) 333.
- Dienes, Z. P. (Gradi di rigore) 6.
- Dietz, Helmut (Darstellungstheorie über einem Galoisfeld) 255.
- Dieudonné, Jean (Théorème de Šmulian) 86; (Groupes de Lie algébriques) 255; (Orthogonal groups) 256.
- Dilgan, Hâmit (Vitesse moyenne des planètes) 238.
- Dirac, P. A. M. (Theory of electrons. II.) 204; (Jauge en électrodynamique) 444.
- Dizioglu, Bekir (Wärmeübergang in Schmier-schichten. I. II.) 429.
- Dobronravov, V. V. (Anholonome Systeme) 176.
- Dodo, T. and R. Utiyama (Equivalence principle) 221.
- Dolbeault, P. (Formes différentielles méromorphes) 330.
- Dolph, C. L. and M. A. Woodbury (Covariances of stochastic processes) 112.
- Donaldson, W. J. s. A. Keith 281.
- Donder, Théophile de (Relativité générale) 216.
- Doodson, A. T. s. R. H. Corkan 196.
- Dorodnicyn, A. A. (Verteilungsgesetze der Eigenwerte) 324.
- Dorrance, William H. (Hypersonic velocities) 189.
- Dow, Sterling (Greek numerals) 241.
- Dowker, C. H. (Theorem of Hanner) 410.
- Drăganu, M. (Émission électronique) 458.
- Drandell, Milton (Convex sets) 165.
- Drazin, M. P. (Skew-symmetric matrices) 9.
- Drescher, H. (Symmetrischer Tragflügel) 428.
- Dubnov, Ja. S. (Vektorrechnung. II.) 148; (Diagonaleigenschaften von Netzen) 154.
- Dubrovskij, V. M. (Formel von Nikodym) 287.
- Duchesne, Jules (Forces interatomiques) 453.
- Dufresne, Pierre (Dépouillements. IV.) 115.
- Dugas, René (Mécanique quantique) 443.
- Dugué, Daniel (Théorème de Bernstein) 292.
- Dugundji, John s. H. Ashley 190.
- Duncan, D. G. (Algebra of S-functions) 11.
- Dungen, F. H. van den (Principe de Rayleigh) 356.
- Duparc, H. J. A., C. G. Lekkerkerker and W. Permans (Formula of Jensen) 297.
- Duparc, H. J. A. und W. Permans (Rapport ZW 1949—001) 249.
- Dürbaum, Hansjürgen (Ganzheitsbereiche) 267.
- Dutta, M. (Real gases) 432.
- Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz (Inventory problem. II.) 371.
- Dynkin, E. B. (Maximale Untergruppen) 16; (Halbeinfache Liesche Algebren) 17; (Homologien einer Lieschen Gruppe) 21.
- Džavadov, M. A. (Konforme Abbildungen) 137.
- Džems-Levi, G. E. (Transformationen von Nomo-grammen) 103.
- Džvaršejšvili, A. G. (Fourier-Denjoysche Reihen) 304; (Darstellung durch Fourierintegral) 304.
- Eastabrook, J. N. and A. J. C. Wilson (Diffraction of X-rays. III.) 457.
- Eaves, J. C. (Sets of matrices) 9.
- Eckert jr., J. Presper, James R. Weiner, H. Frazer Welsh and Herbert F. Mitchell (UNIVAC system) 104.
- Edwards, R. E. (Bounded continuous functions) 90.
- Egerváry, Jenő (Orthozentrisches Koordinatensystem) 374.
- Eggleston, H. G. (Reuleaux triangle) 166.
- Egorov, I. P. (Maximal bewegliche A_n) 159; (Maximal bewegliche L_n) 160.
- Ehlers, Georg (Lineare Differentialgleichungssysteme) 70.
- Eichelberger, R. J. s. E. M. Pugh 431.
- Eisenschitz, R. (Quantum hydrodynamics) 434.
- Eisenstein, J. (Spin-spin relaxation) 458.
- El Badrawy, Rashad M. (Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit) 430.
- Elfving, G. (Decision function theory) 119.
- Ellis, H. W. (P^2 -integral and Cesàro-Perron scale) 288.
- El-Nadi, M. (Théorie du photon) 446.
- El'sgol'c, L. É. (Variationsprobleme) 82.

- Elteren, Ph. van (Methode der m Rangordnungen) 367.
 Elwert, G. (Ionisationsformel eines Plasmas) 233.
 Emanuele, Maria Antonietta (Trigonometria generale) 372.
 Erdős, P. (Convergence of power series) 310.
 — and R. Rado (Classifications of subsets) 282.
 Erim, Kerim (Descartes) 242; (Foundations of mathematics) 248; (Stieltjesche Integrale) 288.
 Eringen, A. Cemal (Ripple-type buckling) 181.
 Errera, A. (Suite sans répétitions) 8.
 Estill, Mary Ellen (Problem of Souslin's) 284.
 Eyraud, Henri (Théorie des changes) 370.
 Fabricius-Bjerre, Fr. ((6,1)-transformation) 142; (Theorem of G. Bol) 391.
 Faircloth, O. B. and H. S. Vandiver (Diophantine equations) 29.
 Falk, Gottfried (Relativitätsmechanik) 218.
 Falkenhagen, H. und G. Kelbg (Klassische Statistik) 455.
 — —, M. Leist und G. Kelbg (Leitfähigkeit starker Elektrolyte) 455.
 Fan, Ky and Noel Gottesman (Compactifications) 169.
 Fáy, István (Anneaux spectraux. III. IV.) 416.
 Fast, H. et A. Götz (Fonction de Crofton) 407.
 Fastov, N. S. (Plastizitätstheorie) 425.
 Federhofer, Karl (Eigenschwingungen der Kreiszylinderschale) 427.
 Federici Casa, Carlos („Zusammengesetzte Örter“. I.) 375.
 Fejér, Leopold (Trigonometrische Polynome) 43.
 Fejes Tóth, L. (Ikosaeder) 166.
 Feller, William (Riesz' potentials and semi-groups) 85.
 Fenchel, W. (Convex sets and polarity) 165; (Spherical trigonometry) 375.
 Fényes, Imre (Mathematische Prinzipien der Mechanik) 432; (Ergänzungen zur Thermodynamik. I.) 432; (Quantenmechanik) 442.
 Fenyő, István (Inhomogene Integralgleichungen) 344.
 Fernández, Germán (Kurven einer Hyperfläche) 398.
 Fériet, Joseph Kampé de s. Kampé de Fériet, Joseph 336.
 Ferrari d'Occhieppo, Konradin (Häufigkeitsfunktion der Sternmassen) 459.
 Ferraro, V. C. A. and D. J. Memory (Oscillations of a star) 238.
 Feuer, Paula (Electronic states in crystals) 235.
 Finikov, S. P. (Analytische Geometrie) 136; (Differentialgeometrie) 149; (W-Kongruenzen) 397.
 Finzi, Arrigo (Transformation d'une courbe fermée) 259.
 — Bruno (Equazioni elettromagnetiche. I.) 203; (Campi elettromagnetici) 203.
 Fishel, B. (Differential equations) 67.
 Fjelstad, J. E. s. V. Brun 272.
 Fletcher, H. J. and C. J. Thorne (Sine and cosine transforms) 346.
 — T. J. (Inferential problems) 7.
 Flügge, Siegfried und Hans Marschall (Quantentheorie. I.) 441.
 Fodor, G. (Conjecture of P. Erdős) 282.
 Foix, Auguste (Équations de Maxwell) 212.
 Földes, István (Goldbach hypothesis) 277.
 Foldy, L. L. (Dirac particles) 443.
 Følner, E. (Espaces de dimensions infinies) 89.
 Fomin, S. V. s. I. M. Gelfand 92.
 Forbat, M. N. (Théorème de Sylvester) 252.
 — N. H. (Hamilton-Jacobische Differentialgleichung) 419.
 Fortet, K. (Méthodes de Monte-Carlo) 231.
 Fourès, Léonce (Recouvrements régulièrement ramifiés) 317.
 Fraenz, Kurt (Theorie der elektrischen Ströme) 206.
 Fraisse, Jean (Réserves mathématiques) 127.
 Francesco-Saverio, Rossi (Coefficienti di Legendre) 303.
 Franckx, E. (Calcul des réserves) 127.
 Frank, Evelyn (Continued fractions) 309.
 Frankl, F. I. (Gravitationswellen und die Bewegung von Gasen in starken, veränderlichen Gravitationsfeldern) 215.
 Fraser, D. A. S. and Irwin Guttman (Bhattacharyya bounds) 120.
 Frazer, Lowell K. (Linear line complexes) 390.
 Frege, Gottlob (Philosophical writings) 1.
 Freud, Géza (Tauberscher Satz. II.) 296.
 Freudenthal, Hans (Elementarteilerttheorie) 10; (Weak law of large numbers) 111; (Gambling) 111.
 Fried, Burton David (Electron-neutron interaction) 449.
 Friedrichs, K. O. (Quantum theory of fields) 223; (Streuprozesse) 450.
 Fröhlich, O. K. (Schiefstellung von Bauwerken) 181.
 Fubini, S. (Sull'operatore $U(t)$) 222.
 Fuchs, L. (Operator groups) 13.
 — — and T. Szele (Semi-simple rings) 263.
 Fujiwara, Izuru (Quantized operator) 221.
 Fumi, F. G. (Matter tensors) 386.
 Fusa, Carmelo (Curve plane algebriche) 143.
 Gachov, F. D. (Riemannisches Randwertproblem) 59; (Bemerkung von Gochberg) 353.
 Gaddum, Jerry W. (Convex cones) 165.
 Gaeta, Federico (Variétés algébriques d'un espace projectif) 146; (Sistemi lineari) 381.
 Gagua, M. B. (Satz von Bernstein) 301; (Darstellung durch partikuläre Lösungen elliptischer Gleichungen) 302.
 Galerkin, B. G. (Werke. I.) 421.
 Gallarati, Dionisio (Curve sferiche) 150.

- Gallissot, François (Transformations infinitésimales) 331; (Application des formes extérieures) 420.
- Gambier, Bertrand (Couple de coniques) 138.
- Ganea, Tudor (R -equivalent spaces) 410; (Transformations continues) 417.
- García, Godofredo (Diffusionsgleichung) 202; (Allgemeine Relativität) 216.
- Gårding, Lars (Problème de Goursat) 334.
- Garnier, René (Transformations de Lorentz) 137.
- Garnir, H. G. (Fonctions de Green de l'opérateur métaharmonique) 340.
- Garrido, Jules (Groupes de symétrie des ornements) 241.
- Gáspár, R. (Energieeigenwerte von Atomelektronen. I.) 219.
- — und P. Gombás (Energieeigenwerte von Atomelektronen. II.) 452.
- Gates jr., Leslie D. (Differential equations in distributions) 352.
- Gauthier, L. (Classification des courbes algébriques) 143.
- Geach, Peter s. G. Frege 1.
- Gegelija, T. G. (Singuläre Integralgleichungen) 346.
- Geiringer, Hilda (Idealplastischer Körper) 183; (Plastizitätsproblem) 183.
- Gelbaum, B. R. and G. K. Kalisch (Measure in semigroups) 22.
- Gelfand, I. M. (Spektrum von Differentialoperatoren) 96.
- — — und S. V. Fomin (Geodätische Strömungen) 92.
- Gel'fond, A. O. (Gleichungen in ganzen Zahlen) 28; (Transzendente und algebraische Zahlen) 33.
- Genoux, François (Fonctions presque périodiques) 63.
- Gerber, E. H. s. H. R. Lawrence 189.
- Gericke, Helmuth (Grundgedanken der modernen Algebra) 7.
- Germa, R. H. (Équations récurro-différentielles) 321; (Systèmes d'équations récurro-différentielles) 321; (Équations intégro-différentielles récurrentes) 343; (Équations intégrales à plusieurs variables indépendantes) 343; (Noyaux itérés d'équations intégrales de Volterra. I. II.) 343.
- Gerretsen, J. C. H. (Geometria differenziale) 390.
- Gessow, Alfred and Garry C. Myers jr. (Helicopter) 191.
- Gheorghiu, Octavian E. (Objets géométriques) 386.
- Ghosh, M. and S. K. Ghosh (Elastic vibration in a bar. II.) 427.
- S. K. s. M. Ghosh 427.
- Gibellato, Silvio (Velocità indotte da sistema di p vortici) 188.
- Gini, C. (Asimmetria delle distribuzioni statistiche) 115; (Problèmes démographiques internationaux) 123.
- Giovanardi, Ilde (Propagazione delle onde elettromagnetiche) 208.
- Giovannozzi, Renato (Giunto elastico) 177.
- Giuliano, Landolino (Relazioni integrali fra funzioni di Bessel) 48; (Funzioni generalmente a variazione limitata) 291.
- Givens, Wallace (Fields of values of a matrix) 250.
- Glaser, Walter (Elektronenoptik) 440.
- — und H. Grumm (Aberationskonstanten) 440.
- Glazman, I. M. (Spektrum von Randwertproblemen) 96.
- Gleason, A. M. (Hilbert's fifth problem) 255.
- Glicksberg, Irving (Representation of functionals) 90.
- Glover, I. E. (Analytic functions with singular points) 52.
- Gluškov, V. M. (Zentralreihen unendlicher Gruppen) 13.
- Godeaux, Lucien (Surfaces algébriques irrégulières) 380; (Surfaces multiples) 380.
- — et Octave Rozet (Géométrie projective) 136.
- Godwin, H. J. ($\int_0^\infty x^m \left(\sqrt[2]{2\pi} \right) \cdot \int_x^\infty \exp(-\frac{1}{2} t^2) dt \Big)^n dx$) 106.
- Goland, Martin s. M. A. Dengler 188.
- Goldberger, M. L. s. G. F. Chew 451.
- Golden, Robert K. s. A. Baños jr. 205.
- Goldstein, Louis (Critical state of normal fluids) 455.
- Gol'dštejn, L. V. (Theorie der Kurven) 391.
- Gombás, P. (Atomkern) 452.
- — s. R. Gáspár 452.
- Gomes, Ruy Luís (Zwei Ungleichungen) 88; (Beispiel einer Lebesgueschen Menge) 286.
- Gomm, Gerhart (Fernsprechverkehr) 114.
- Gonçalves, J. Vicente (Formule de Taylor) 292; (Développement de $f(x,y)$) 292.
- Gonzalez, Mario O. (Differentialgleichungen) 321.
- Goodman, A. W. (Inaccessible boundary points) 57.
- Leo A. (Poisson-gamma distribution) 107; (Serial number analysis) 121.
- — — s. R. R. Bahadur 119.
- Goormaghtigh, R. (Transformation géométrique) 149.
- Gora, E. (Photon scattering processes) 448.
- Götling, Erik (Formal mathematics) 247.
- Goto, K. (Meson wave equation) 445; (Detailed balance) 448.
- Gottesman, Noel s. Ky Fan 169.
- Götz, A. s. H. Fast 407.
- Grad, Harold (Statistical mechanics) 198.
- Graffi, D. (Corpi di massa variabile) 174.
- Green, John W. (Families of sets) 87; (Subharmonic functions) 341.
- Greenberg, J. Mayo s. E. W. Montroll 212.
- Greene, Richard F. and Herbert B. Callen (Irreversible thermodynamics. II.) 197.
- Grémillard, Jean (Problème des trois corps) 420.
- Grimm, G. und M. Rueff (Analytische Geometrie. I.) 374.
- Grinbljum, M. M. (Operator-integral) 93.
- Grioli, Giuseppe (Dinamica del solido pesante asimmetrico) 174; (Deformazione di corpo elastico)

- 178; (Elastostatica isoterma) 178; (Teorema di Menabrea) 178; (Statica delle piastre omogenee) 178; (Problema di De Saint-Venant) 178.
- Groot, S. R. de s. H. A. Tolhoek 196.
- Gross, B. (Electrical networks) 437.
- Grove, V. G. (Quadric of Lie) 156.
- Grümm, H. s. W. Glaser 440.
- Grünbaum, Adolf (Extended linear continuum) 5.
- Grundy, P. M. (Fitting of normal distributions) 115.
- Grzegorzcyk, A. and C. Kuratowski (Janiszewski's property) 411.
- Guazzone, Stefano (Iper-superficie di S_k) 144; (Sezioni spaziali) 144.
- Guitel, Geneviève (Trièdres et tétraèdres) 135.
- Gulmanelli, P. s. P. Caldirola 221.
- Günther, Marian (Multi-electron problem) 222.
- Gupta, A. K. (Deviation of normal population) 120.
- S. s. R. C. Majumdar 220.
- Gurin, L. (Mittelbildung der Differentiation) 292.
- Güttler, A. (Miesche's Theorie der Beugung) 211.
- Guttman, Irwin s. D. A. S. Fraser 120.
- Guy, Roland (Équation d'évolution) 444.
- Haacke, Wolfhart (Stabilität von Differentialgleichungen) 70; (Stabilität erzwingener Schwingungen) 186.
- Haas, Felix (Characteristics of differential equations) 64.
- Hadwiger, H. (Distanzintegrale für Eikörper) 167; (Minkowskische Maßzahlen) 167; (Polyederfunktionale) 288; (Isoperimetrische Ungleichung) 406; (Extremale Rotationskörper) 406.
- Hafner, E. (Elektromagnetische Eigenschwingungen eines Parallelepipedes) 438.
- Hagedorn, R. (Bariumtitanat) 235.
- Hägmark, Per (Quintic Diofantine equations) 274.
- Hahn, Wolfgang (Lineare Differentialgleichungen. II.) 306.
- Haken, Hermann (Identitätsproblem) 13.
- Hald, A. (Statistical theory) 364; (Statistical tables) 365.
- Hällström, Gunnar af (Einschnittgebiete) 58; (Lineares Inselproblem) 114.
- Halmos, Paul R. (Operatoren in Hilberträumen) 93.
- Hamilton, J. (Quantum electrodynamics) 447.
- Hammersley, J. M. (Conjecture of Nelder) 108.
- Hanner, Olof (Mappings of spaces) 410.
- Hansen, H. M. und P. F. Chenea (Mechanics of vibration) 425.
- Haque, S. M. A. (Viscous liquid between plates) 428.
- Harris, T. E. (First passage) 363.
- Hart, Walter W. and Veryl Schult (Solid geometry) 374.
- Hartman, Philip (Non-oscillatory linear differential equations) 66; (Singular boundary value problems) 68.
- — and Aurel Wintner (Perturbations of spectrum) 67; (Vibration diagrams) 177; (Differential equations) 333.
- S. (Punkte $n\zeta$ auf Kreisperipherie) 279.
- Hashimoto, Hiroshi (Local properties on spaces) 408.
- Junji (Ideal theory for lattices) 259.
- Hashitsume, Natsuki (Linear dissipative systems) 432.
- Hasse, Helmut (Gauss'sche Summen) 269.
- — und Walter Klobe (Aufgabensammlung) 248.
- Hattori, Akira (Simple algebras and orthogonal groups) 263.
- Haug, Albert (Ausstrahlungsbedingung) 341.
- Haupt, Otto (Algebra. I.) 7.
- Hausner, M. and J. G. Wendel (Ordered vector spaces) 87.
- Havlíček, Karel (Surfaces réglées) 389.
- Hayashi, Chushiro and Yasuo Munakata (Relativistic integral equation) 224.
- Hayman, W. K. (Modulus of integral functions) 55; (Values in given domain) 314.
- Heading, J. and R. T. P. Whipple (Reflexion of long wireless waves) 240.
- Heinz, Erhard (Minimalflächengleichung) 154.
- Helsel, R. G. and N. Levine (Product transformations) 39.
- Henley, E. M. (Meson theory) 449.
- Henriksen, Melvin (Ring of entire functions) 90.
- Herlin, Melvin A. s. W. P. Allis 431.
- Herrmann, Horst (Matrizen) 139.
- Herstein, I. N. (Structure of linear models) 9.
- Hesse, Mary B. (Philosophy of logic) 244.
- Hestenes, Magnus R. and Eduard Stiefel (Conjugate gradients for linear systems) 99.
- Hewitt, Edwin (Integral representation) 286.
- Hijikata, Katsunori s. T. Nakamura 232.
- Hildebrand, F. B. (Heat-flow equation) 76.
- Hille, Einar (Behavior of solutions) 65; (Fokker-Planck's equation) 335.
- Hinds, A. K. and W. M. Whyburn (Differential system) 329.
- Hines, C. O. (Energy density and flux) 435.
- Hiramatu, Hitosi (Affine collineations) 402.
- — s. K. Yano 161.
- Hittmair, Otto (Interferenzeffekte) 451.
- Hjelm, Johannes (Grundlagen der Geometrie) 130.
- Hlavatý, Václav (Schrödinger laws) 162; (Embedding theory) 403.
- Hlawka, Edmund (Mehrfache Integrale) 407.
- Hoberg, G. G. (Burroughs Laboratory Computer) 105.
- Hodge, W. V. D. (Harmonic integrals) 157; (Algebraic varieties) 417.
- — — and D. Pedoe (Methods of algebraic geometry. Vol. II, Book III. IV.) 145.
- Hoek, U. H. van der (Sterblichkeitsgesetz und Anzahl der Todesfälle) 124.

- Hoffman, A. J. (Cyclic affine planes) 131.
Hoffmann, T. A. (Theory of solids. V.) 458.
Hölder, E. (Greenscher Tensor) 331.
Holley, Julian L. (Dynamic model. I.) 129.
Holton, Gerald (Introduction in physical science) 418.
Hopf, Eberhard (Elliptic differential equations) 78.
— H. und K. Voss (Flächentheorie im Großen) 153.
Horváth, J. (Primzahlen. II.) 277.
Hössjer, Gustav (Electrodynamics) 435.
Houston, R. A. (Mathematical physics) 418.
Hsü, Hsien-yü s. Ch.-m. Tung 306.
Hu, Hai-Chang (Boundary value problems) 101; (Deflections of plates and beams) 423.
— Sze-tsen (Cohomology rings) 258; (Cohomology theory) 258.
Hua, Loo-Keng (Total matrix ring) 261.
— — — and I. Reiner (Automorphisms of the projective unimodular group) 257.
Huang, K. s. A. B. Bhatia 229.
Huby, R. (Deuteron stripping reaction) 450.
Hullu, A. de s. J. P. Roijen 124.
Humblet, Jean (Niveaux virtuels) 227.
Hunter, H. E. s. K. M. Siegel 48.
Hurst, C. A. (Divergent perturbation expansion) 447.
Hutcherson, W. R. (Voisinage d'une involution) 380.
Huybrechts, M. and M. Schönberg (Ionization and polarization effects) 228.
Hwang, Cheng-Chung (Imbedding of Riemannian space) 399.
— S. S. (Anticyclones) 239.
Hyman, Morton A. (Boundary-value problems) 102.
Ide, Saburo (Curves in n -dimensional space) 400.
Ievlev, V. M. (Wärmeinhalt einer Gasströmung) 193.
Ikeda, Masatoshi (Quasi-Frobenius rings) 25; (Theorem of Kaplansky) 262.
— Mineo (Spherically symmetric space-times) 162.
Ikenberry, E. and W. A. Rutledge (Hermit polynomials $H_n(hw)$) 53.
Inan, Mustafa (Semi elliptical cross section) 425.
Ingraham, L. (Conformal relativity) 217.
Inkeri, K. (Minkowskischer Satz) 32; (Binary quadratic forms) 273.
Inoue, Kenza s. T. Muto 450.
— Takeo s. T. Muto 450.
Inzinger, Rudolf (Geometrische Realisierung des Hilbertschen Raumes) 88; (Faltungsgeometrie) 88.
Ioffe, B. L. und I. M. Šmuškevič (Bildung von π -Mesonen) 227.
Ionescu Tulcea, C. T. (Intégration des fonctions d'ensemble) 286.
Isard, Walter (Optimum space-economy) 370.
Iseki, Kanesiroo (Fundamentaldiskriminanten) 28.
Iséki, Kiyoshi (Distributive lattices) 23.
Ishaq, Mohd. s. S. M. Shah 297.
Ispas, C. I. (Identités de Veblen) 403.
Itô, Hiroshi (Density matrix in Hartree-field. I.) 199.
Ivanenko, D. und A. Brodskij (Mehrfache Prozesse) 226.
Ivanov, I. D. s. L. H. Brechovskich 209.
Iwasaki, Koziro (Theorem of Ankeny) 271.
Iwata, Giiti (Realization of contact transformations) 214; (Unitary transformation) 446.
Izmajlov, V. D. (Invariante Geometrie) 155.
Izumi, Yoshihisa (ω -Vollständigkeit) 246.
Jabłoński, A. (Franck-Condon principle) 232.
Jackson, Julius L. („Irreversibility“) 201.
— — — s. H. B. Callen 199.
— Lloyd (Principle of maximum) 341.
Jacobson, N. (Operator commutativity) 264.
Jacobsthal, E. s. V. Brun 272.
Jaeger, Arno (Differentialgleichungen in Körpern) 268.
Jaffé, George (Diffusion of neutrons) 202.
Jaiswal, J. P. (Meijer transform) 85.
Jakubovič, V. A. (Charakteristische Exponenten und Stabilitätskriterien) 66.
Janenko, N. N. (Verbiegbare Flächen) 389.
Jankowski, W. (Zéros de polynômes) 252.
Jánossy, L. (Passage of a wave packet) 219; (Theory of cascades) 231.
Jansen, J. H. C. (Gleichgewichtslinien) 126.
Järnefelt, G. (Ordinary differential equations) 268.
— — and Paul Kustaanheimo (Finite geometries) 371.
Jauho, Pekka (Commutation relations and vacuum expectation values) 446.
Jean, Maurice (Couplage intermédiaire. II.) 222.
Jehne, Wolfram (Idealklassenfaktorensysteme) 26.
Jekeli, W. (Strahlungsprozesse am Kerntropfen) 448.
Jensen, Arne (Random sampling) 119; (Distribution patterns) 361.
— Henry (Geometrischer Beweis) 138.
Jessen, Børge (Strong differentiation) 39.
Johansson, Ingebrigt (Topology) 408.
Johnson, L. H. (Nomography) 102.
— R. A. s. W. B. Davenport jr. 200.
Jonas, Hans (Bäcklund-Transformation) 152; (Scherksche Minimalfläche) 389.
Jones, D. S. (Diffraction) 211.
Jongmans, F. (Périodes des formes harmoniques) 399; (Variétés kählériennes) 400.
Jordan, Pascual (Erhaltungssätze) 215; (Schwerkraft und Weltall) 216; (Kosmologische Gleichungen) 216; (Birkhoffscher Satz) 216.
Jørgensen, Vilhelm (Bloch's theorem) 56.
Jost, R. s. A. Pais 447.

- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 293.
- Juhos, Béla von („Wahrheit“ wissenschaftlicher Sätze) 5.
- Juréen, Lars s. H. Wold 129.
- Kac, M. (Laplace's equation) 340.
- and J. C. Ward (Two-dimensional Ising model) 458.
- Kahan, Théo (Physique des guides) 437.
- et G. Rideau (Théorie des collisions) 82.
- Kähler, Erich (Corps algébriques) 266.
- Kalinovskaja, S. S. (Abweichungen im Potenzmittel) 46.
- Kalisch, G. K. s. B. R. Gelbaum 22.
- Kalmár, László (Decision problem) 246.
- Kamata, Koichi s. J. Nishimura 230.
- Kampé de Fériet, Joseph (Classe de solutions de l'équation de la chaleur) 336.
- Kaplan, S. A. (Wirbelfreie Strömung) 238.
- Wilfred (Close-to-convex schlicht functions) 311.
- Kaplansky, Irving (Locally compact rings. III.) 25; (Topological algebra) 269.
- Kar, S. C. (Logische Quantendynamik des Elektrons. I.) 219.
- Karamata, J. (Développements asymptotiques) 44.
- Karhunen, Kari (Stationäre zufällige Funktionen) 109; (Extrapolationsproblem) 363.
- Karplus, Robert and Abraham Klein (Atomic energy levels. III.) 225.
- Kárteszi, Ferenc (Skew quadrangles) 375.
- Karush, W. (Linear problems) 95; (Heat flow problem) 340.
- Kasch, Friedrich (Separable Algebren) 25; (Endomorphismenring eines Vektorraums) 261.
- Kasner, Edward and John de Cicco (Fourier heat equation) 76.
- Katětov, Miroslav (Nicht-separable metrische Räume) 412.
- Katô, Tosio (Least eigenvalue of Hill equation) 67; (Inequalities for operators) 353; (Perturbation theory) 354.
- Katsurada, Yoshie (Space of higher order. III.) 404.
- Kawada, Yukiyo (Probability theory) 107; (Derivations in simple algebras) 264.
- Kawaguchi, Akitsugu (Non-linear connections) 404.
- Každan, Ja. M. (Momentenproblem) 96.
- Keith, A. and W. J. Donaldson (Calculus) 281.
- Kelbg, G. s. H. Falkenhagen 455.
- Keller, Ott-Heinrich (Modell der projektiven Ebene im R_4) 172.
- Kelly, L. M. (Normed lattices) 24.
- P. J. and L. J. Paige (Symmetric perpendicularity) 133.
- Kemchadze, Š. S. (Eindeutigkeitsbasen in p -Gruppen) 254.
- Kertész, A. (Abelian torsion groups) 14.
- Khinchin, A. Y. (Three pearls of number theory) 272.
- Kiefer, J. (Minimum variance estimators) 120; (Rectangular distribution) 121.
- s. A. Dvoretzky 371.
- Kikuchi, Sadaemon (Velocities of stellar system) 459.
- Kitagawa, Tosio (Statistical inferences. II. III.) 365; (IV.) 366; (Statistical controls. I.) 366.
- Kitover, K. A. (Anwendung biharmonischer Funktionen) 422.
- Kivikoski, E. (Kennzeichnung der Kurven) 162.
- Kjellberg, Bo (Integral functions) 55.
- Klein, Abraham s. R. Karplus 225.
- Martin J. (Ergodic theorem) 199.
- Kleinman, R. E. s. K. M. Siegel 48.
- Klingenberg, Wilhelm (Affine Schließungssätze) 131; (Flächen im projektiven Raum) 394.
- Klobe, Walter s. H. Hasse 248.
- Kneser, Hellmuth (Konvexe Räume) 86.
- Knitting, E. (Diffusion in the atmosphere) 459.
- Knopp, Konrad (A , E_k und B_k -Summierung) 293; (Theory of functions) 308.
- Kober, Hermann (Elektroten-Gas-Gemisch) 454.
- Kobori, Akira (Fonctions multivalentes) 56.
- Kodaira, Kunihiko (Theorem of Riemann-Roch) 381.
- Kolomenskij, A. (Energieverluste eines geladenen Teilchens) 213.
- s. B. Bolotovskij 213.
- Koltunov, M. A. (Problem der Verbiegung und Stabilität) 423.
- Komatu, Yûsaku (Randwertaufgabe für Kreis) 80; (Investigation on inheritance. XII₁, XII₂.) 122; (Mittlere Verzerrungen) 316; (Investigations on inheritance. XIII₁, XIII₂, XIV.) 369; (XV₁₋₄) 370.
- and Mitsuru Ozawa (Conformal mapping. II.) 317.
- Komm, H. s. A. Y. Khinchin 272.
- Kompaneec, A. (Methode des Feldes) 229.
- Kompfner, R. (Travelling-wave tubes) 440.
- Kôno, Kazumasa (Normal bivariate) 366.
- Korobov, N. M. (Diophantische Ungleichungen) 281.
- Koschmieder, Lothar (Determinanten aus Hermiteischen Funktionen) 305.
- Kotani, Masao s. T. Nakamura 232.
- Kourganoff, V. and W. Busbridge (Basic methods in transfer problems) 201.
- Koyré, Alexandre (Letter of Robert Hooke) 243.
- Krakovski, V. (Konstruktion der Achsen einer Ellipse) 172.
- Kramers, H. A. (Jaffé's theory of column-ionization) 234.
- Krasil'sčikova, E. A. (Flügel in kompressibler Strömung) 430.
- Krasnosel'skij, M. A. und Ja. B. Rutickij (Integraloperatoren in Orlicz'schen Räumen) 94.
- — — s. M. G. Krejn 94.

- Kravtchenko, Julien (Problème des sillages) 190.
- Kreisel, Georg (Formal systems of number theory) 247.
- Krejn, M. G. (Inhomogene Saite) 70; (Schwingungstheorie Sturmischer Systeme) 176; (Sturm-Liouvillesches Randwertproblem) 326.
- — — und M. A. Krasnosel'skij (Nichtbeschränkter Operator) 94.
- Krijger, C. G. (Abnormale Risiken) 128.
- Krishna, Shri (Congruence of Ribaucour) 154.
- Krishnamoorthy, A. S. (Partial sums in divergent series) 40.
- Kroll, Wolfgang (Elastic spectra of solids) 234.
- Krooth, Robert S. (Fertility of the parents of abnormals) 370.
- Kroupa, František (Elasticity for annular regions) 424.
- Krull, Wolfgang (Erweiterungen bewerteter Körper) 266; (Geschlossene Bewertungssysteme) 266.
- Kruppa, Erwin (Dualitätsprinzip) 151; (Affinnormalebenen) 155.
- Kruskall, William H. (Non-parametric test) 367.
- — — und W. Allen Wallis (Ranks in one-criterion variance analysis) 117.
- Krzyżański, Mirosław (Équation de la chaleur) 336.
- Kudō, Hirokichi (Infinite product measures) 285.
- Kuipers, L. and B. Meulenbeld (Fonctions of n variables) 33.
- Kula, Muzaffer (Notion d'enveloppe) 390.
- Kumar, Ram (Hankel transforms) 50.
- Kümmel, Hermann (Unitäre Quantenelektrodynamik) 448.
- Kundert, E. G. (Poles and zeros) 171.
- Kupperman, Morton (Grouping corrections) 116.
- Kuramochi, Zenjiro (Bounded analytic function) 319.
- Kuratowski, C. s. A. Grzegorzewski 411.
- Kurepa, G. (Dj.) (Rational numbers) 26; (Relation d'inclusion) 35.
- Kuroda, Tadashi (Riemann surface. II.) 320.
- Kuroš, A. G. (Höhere Algebra) 248.
- Kurzweil, Jaroslav (Metric theory of Diophantine approximations) 278.
- Kustaanheimo, Paul (Prime of a finite world) 130.
- — — and Bertil Qvist (Differentiation in Galois fields) 267.
- — — s. G. Järnefelt 371.
- Kuwagaki, Akira (Équations fonctionnelles) 97.
- Kuźmin, P. A. (Bewegung eines starren Körpers) 420.
- Kynch, G. J. (Scattering amplitudes) 229.
- Laadi, H. and O. Boivie (Product sums of normal deviates) 117.
- Laasonen, Pentti (Eigenwerte simultaner Differentialgleichungen) 329; (Symmetrischer Kern einer Integralgleichung) 344.
- Labra, Manuel (Winkelhalbierende) 293.
- Lalaguë, Pierre (Classes de fonctions indéfiniment dérivables) 293.
- Lalan, Victor (Transformations de Lorentz) 137.
- Lance, G. N. (Drag on slender pointed bodies) 190.
- Landé, Alfred (Thermodynamic continuity) 443; (Quantum mechanics) 443.
- Lane, Ralph E. (Convergence of continued fractions) 298; (Convergence problem for continued fractions) 298.
- Langhaar, H. L. (Energy of bending of plates) 180.
- Lapwood, E. R. (Effect of contraction) 239.
- Larčenko, E. G. (Technik des Rechnens) 97.
- Larguier, Everett (Homology bases) 412.
- Larsen, L. Melchior (Rechenkunst in Dänemark) 242.
- Latter, Richard s. R. Bellman 346.
- Lauffer, R. (Nichteuklidische Maßbestimmung) 372; (Schwerpunkte eines nichteuklidischen Dreiecks) 372.
- Laurenti, Fernando (Questioni di minimo) 292.
- Laurikainen, K. V. (Radial deuteron equation) 229; (Diracsche „ δ -Funktion“) 352.
- Lauwerier, H. A. (Coefficients of asymptotic series) 50.
- Lavut, A. P. (Eigenwerte von Seidelschen Transformationen) 99.
- Lawrence, H. R. and E. H. Gerber (Aerodynamic forces) 189.
- Lax, Peter D. s. P. W. Berg 74.
- Lazard, Michel (Groupes analytiques) 91.
- Ledinegg, E. und P. Urban (Lineare Atomkette) 453.
- Ledoux, P. (Périodes de pulsation d'étoiles) 459.
- Lee, E. H. (Limit load theorem) 184; (Paradox) 426.
- T. D. and C. N. Yang (State and phase transitions. II.) 434.
- — — s. C. N. Yang 433.
- Lee-Whiting, G. E. (X-ray absorption) 237.
- Leemans, J. (Développement d'une fonction) 302.
- Lefèvre, J. (Fonctions d'Escher) 127; (Théorie collective du risque) 127.
- Lehmann, E. L. (Multiparameter hypotheses) 117.
- Lehnert, Bo (Electrically conductive liquid) 436.
- Lehto, Olli (Distortion of conformal mappings) 316.
- Leighton, Walter (Self-adjoint differential equations) 65.
- Leisenring, Kenneth (Map of hyperbolic plane into Euclidean circle) 372.
- Leist, M. s. H. Falkenhagen 455.
- Leja, Franciszek (Harmonische Funktionen. I.) 51.
- Lejbenzon, Z. L. (Stetige Funktionen auf dem Kreise) 348.
- Lekkerkerker, C. G. s. H. J. A. Duparc 297.
- Lemaître, G. (Problème des trois corps) 177.
- Leonardi, Raffaele (Numeri equitali) 28.
- Lepage, Th. (Classe d'équations) 72.
- Leslie, D. C. M. (Supersonic theory) 194.
- LeVeque, W. J. (Distribution modulo 1) 279; (Continued fractions. I. II.) 279.

- Levi, Beppo (Lineare Differentialgleichungen) 322.
 — F. W. (Sätze von Besicovitch) 167.
 Levine, N. s. R. G. Helsel 39.
 Levinson, H. C. (Science of chance) 359.
 Levitan, B. M. (Spektralfunktion) 324; (Satz von V. A. Marčenko) 326.
 — — — s. G. I. Barenblatt 335.
 Lévy, Maurice (Forces nucléaires. I. II. III.) 226.
 — — M. (Relativistic two-body problem) 224; (Meson theory) 226.
 — Paul (Loi des grands nombres) 110; (Fractions continues aléatoires) 361; (Processus de Markoff) 362.
 Lewis, D. J. (Cubic polynomials) 26.
 Lewy, Hans (Free surface flow) 192.
 Liber, A. E. (Räume mit algebraischer Metrik) 400.
 Lichnerowicz, André and Don Aufenkamp (Equations of dynamics) 419.
 Lietzmann, W. (Mehrdimensionale Geometrie) 133.
 Línek, A. (Approximate structure) 456.
 Linnik, Ju. V. (Maxwellsches Gesetz) 198.
 Linsky, L. (Semantics) 244.
 Littlewood, J. E. (Problem of n bodies) 421.
 Ljunggren, W. s. V. Brun 272.
 Lloyd, Stuart P. ($\gamma\gamma$ angular correlations. II.) 451.
 Lokki, Olli (Harmonische Funktionen) 79.
 Lomnicki, Z. A. (Gini's mean difference) 115.
 Lopšic, A. M. (Hyperellipsoid) 99.
 Łopuszański, Jan (Derivation of Vlasov's equation from Fock's equation) 222.
 Lord, W. T. (Free-streamline) 191.
 Lorent, H. (Ensembles de conférences) 375; (Courbes construites à partir de deux coniques) 375.
 Lorentz, G. G. and M. S. Macphail (Unbounded operators) 352.
 Lorenzen, Paul (Widerspruchsfreiheit des Unendlichkeitsbegriffes) 5; (Teilbarkeitstheorie in Bereichen) 12; (Mengenbegriff in Topologie) 408.
 Łoś, J. (Opérations analytiques) 284.
 Loster, C. (Suites de polynômes) 320.
 Lovera, Piera (Problema dinamico) 175.
 Löwig, Henry (Transitive Boolean relations) 22.
 Luce, R. Duncan (Boolean matrix theory) 23.
 Łukasiewicz, Jan (Theory of deduction) 4.
 Luke, P. J., R. E. Meyerott and W. W. Clendenin (Ionized lithium) 232.
 Lunc, A. G. (Kontaktschemata) 250.
 Lundquist, Stig (Magnetohydrodynamics) 437.
 Lufe, A. I. (Spannungszustand) 182.
 Lyra, Gerhard (Konvergenzfrage linearer Differentialgleichungen) 65.
 Ma, S. T. (Bound states) 448.
 MacDonald, D. K. C. and K. Sarginson (Galvanomagnetic effects) 458.
 Machida, Shigeru and Kazuhiko Nishijima (Adiabatic nuclear potential) 452.
 Macintyre, A. J. (Integral functions) 55.
 MacKay, A. D. D. s. L. Toff 355.
 MacLane, G. R. (Riemann surfaces) 318.
 Macphail, M. S. (Euler-Knopp transformation) 295.
 — — — s. G. G. Lorentz 352.
 Mahalanobis, P. C. (Design of sample surveys) 365.
 Majumdar, Nandagopal (Apparent disappearance of radiation) 216.
 — R. C., S. P. Pandya and S. Gupta (Motion of spinning particle) 220.
 Makai, E. (Sturm-Liouville functions) 323.
 Mal'cev, A. I. (Symmetrische Reglersysteme) 72; (Stabilität einer Bewegung) 328.
 Manara, Carlo Felice (Identità birazionale) 378; (Trasformazioni puntuali) 393.
 Mandel, Jean (Tassement d'une couche d'argile) 184.
 Mandelbrojt, S. (Séries adhérentes) 52; (Fermeture) 303.
 Marčenko, V. A. (Differentialoperatoren. I.) 325.
 March, N. H. (Virial theorem) 232.
 Marchaud, André (Points singuliers) 163; (Propriétés différentielles des surfaces) 163.
 Marcus, F. (Surfaces et réseaux ϵ) 394.
 — P. M. (Free energies of superconductor) 458.
 Marczewski, E. et C. Ryll-Nardzewski (Mesurabilité des fonctions) 286.
 Markov, A. A. (Algorithmische Probleme) 3.
 Marković, Željko (Höhere Analysis) 281.
 Markovitz, Hershel (Bessel functions) 49.
 Marmion, Alphonse (Espace euclidien à n dimensions) 135.
 Marshall, Hans s. S. Flügge 441.
 Martin, M. H. s. J. B. Diaz 333.
 Mason, M. and W. Weaver (Electromagnetic field) 435.
 Massey, H. S. W. and E. H. S. Burhop (Impact phenomena) 453.
 Matsumoto, Makoto (Riemannian manifolds) 157; (Riemann spaces) 158.
 Matsushita, Shin-ichi (Topological groups) 350; (Functionals on B -algebras) 351.
 Matsuyama, Noboru (Summability) 294; (Fourier series) 304.
 Mattila, Sakari (Conjugate random functions) 109.
 Mattioli, Ennio (Gruppi abeliani finiti) 14.
 Maud, F. E. and C. J. Thorne (Thin plates. I.) 423.
 Mayers jr., Garry C. s. A. Gessow 191.
 McCandless, Byron H. (Dimension and disconnection) 169.
 McKinsey, J. C. C. (Game theory) 114.
 McLean, David (Cubic equations) 254.

- McPherson, J. L. and S. N. Alexander (UNIVAG system) 105.
- Meagher, R. E. and J. P. Nash (ORDVAC) 104.
- Medlin, Gene W. (Characteristic roots) 10.
- Meijer, C. S. (*G*-function. I.) 307; (II.) 308.
- Meixner, J. (Wärmeleitfähigkeit fluider Mischungen) 197; (Strömungen von fluiden Medien) 432.
- Memory, D. J. s. V. C. A. Ferraro 238.
- Mendelsohn, N. S. (Representations of real numbers by sequences of integers) 281.
- Mendes, Marcel (Équations canoniques) 331; (Transformations canoniques) 331.
- Mercier, A. (Électrodynamique classique) 435.
- Merman, G. A. (Hyperbolisch-elliptische Bewegung) 177.
- Mersman, W. A. (Integral in servomechanism theory) 290.
- Meschkowski, Herbert (Trigonometrische Formeln) 133.
- Messell, H. and R. B. Potts (Fluctuation problem) 231.
- Meulenbeld, B. s. L. Kuipers 33.
- Meyerott, R. E. s. P. J. Luke 232.
- Michel, Louis (Conservation de la parité. I.) 226; (Représentations du groupe des rotations) 226.
- Michlin, S. G. (Fehler bei der Berechnung einer elastischen Schale) 423; (Operatorentheorie) 424.
- Middleton, David (Signal-modulated waves. II.) 201. — — s. W. B. Davenport jr. 200.
- Mihailović, Dobrovoje (Problema di due corpi) 420.
- Mikaëljan, A. L. (Geometrische Optik) 439; (Konstruktion von inhomogenen Medien) 439.
- Mikeladze, Š. E. (Mehrfache Integrale) 101.
- Mikhail, F. I. (Clock problem) 215.
- Mikusiński, J. G. (Un déterminant) 249.
- Miles, John W. (Wave equation in hyperbolic space) 333.
- Milloux, Henri (Fonctions méromorphes et leurs dérivées) 56.
- Milne, E. A. (Sir James Jeans) 243.
- Minagawa, T. and T. Rado (Rigidity of surfaces) 153.
- Minami, Sakae s. M. Sugawara 205.
- Shigeo (Neutral-meson production) 227.
- —, Tadao Nakano, Kazuhiko Nishijima, Hisaichirō Okonogi and Eiji Yamada (Fion reactions) 227.
- Mineo, Corradino (Gaspere Mignosi) 243.
- Minkiewicz, Jan (Équation du cinquième degré) 356.
- Miroljubov, A. A. (Differenzen-Differentialgleichungen) 321.
- Misek, Karel (Oscillations of beams) 426.
- Mishra, R. S. (Ruled surfaces. III.) 154.
- Misonou, Yosinao (Operator algebra) 94.
- Mitchell, A. R. and Francis McCall (Bow shock wave) 196.
- Mitra, A. P. (Variations of recombination) 239.
- Mittmann, Otfried M. J. (Empirische Funktionen) 118.
- Miyadera, Isao (Semi-group operators) 93.
- Miyasawa, Kōichi (Minimax estimations) 369.
- Miyatake, Osamu (Field equations in quantum mechanics) 223; (Singularity of perturbation-term) 447.
- Mizohata, Sigeru and Masaya Yamaguti (Non-linear differential equation) 68.
- Mo, Yeh (d_n -monotone sequence) 297.
- Moise, Edwin E. (Affine structures in 3-manifolds. V.) 171; (L^* -spaces) 409.
- Moisil, Gr. C. (Systèmes différentiels adjoints) 331; (Distribution spatiale instantanée des grandeurs physiques) 443.
- Monna, A. F. (Espaces linéaires normés) 347.
- Monticelli, F. (Cascata elettrofotonica) 230.
- Montroll, Elliott W. (Markoff chains) 363.
- — — and J. M. Greenberg (Scattering of waves. III.) 212.
- Moór, Arthur (Finslersche und Cartansche Räume) 158.
- Moore, P. G. (Poisson parameter) 121.
- Morawetz, Cathleen S. (Stability problems) 192.
- Moreau, Jean-Jacques (Écoulement rotationnel. I. II.) 188.
- Morgantini, E. (Equazioni diofantee) 275.
- Mori, Akira (Prolongation of Riemann surfaces) 59; (Riemann surfaces) 319.
- Hazime and Syū Ono (Transport phenomena. I.) 434.
- Morin, Ugo (Unirazionalità dell'ipersuperficie) 144.
- Morlat, Georges (Loi de Poisson) 107; (Fonctions aléatoires) 109.
- Morpurgo, G. (Corrispondenza elettrodinamica classica e quantistica) 221.
- Motzkin, T. S. and Olga Taussky (Pairs of matrices) 9; (Representations of finite groups) 15.
- Muchmore, Robert B. (Micro-waves) 438.
- Mukherjee, B. N. (Hermite's equation) 305.
- — — s. C. N. Srinivasengar 139.
- Mukherji, Bhola Nath s. H. D. Bagchi 306.
- Biswarup s. Hari das Bagchi 141.
- Mulholland, H. P. (Convex even function of errors) 98.
- Mullaney, F. C. (ERA 1101 computer) 104.
- Müller, Alfred (Axonometrie) 172.
- Mullins jr., Edgar Raymond (Straight line plane) 164.
- Munakata, Yasuo s. Ch. Hayashi 224.
- Muracchini, Luigi (Geometria proiettiva differenziale) 392; (Trasformazioni puntuali) 393; (Varietà Vs. I. II.) 396.
- Murai, Tomokazu and Gentaro Araki (Molecular integrals) 453.
- — s. G. Araki 453.
- Murdoch, D. C. (Noncommutative ideal theory) 262.
- Murnaghan, F. D. (Classical groups) 255; (Decomposition of tensors) 386.

- Murray, F. J. (Curie point in order-disorder problem) 456.
- Muto, Toshinosuke, Makoto Tanifuji, Kenza Inoue and Takeo Inoue (Interaction of μ meson. II.) 450.
- Myrberg, P. J. (Automorphe Funktionen) 59.
- Myškis, A. D. (Differentialgleichungen mit retardiertem Argument) 322.
- Mysovskich, I. P. (Newtonsche Methode) 98.
- Nachbin, Leopoldo** (Funktionalanalysis) 348.
- Nádeník, Zbyněk (Courbes de Bertrand) 387.
- Nadile, Antonio (Sistemi anolonomi) 175; (Configurazioni ellissoidali) 192; (Sistema anolonomo) 420; (Propagazione delle onde elettromagnetiche) 438.
- Nagai, Osamu (Brauer's theorem of simple groups) 15.
- Tamao s. T. Nobuhara 159.
- Nagata, Jun-iti (Uniform homeomorphism) 409.
- Nagell, Trygve (Théorème arithmétique) 27; (Corps résolvants des coniques cubiques) 27; (Exceptional points on plane cubics) 28; (Cubiques planes du premier genre) 271.
- Najmark, M. A. (Irreduzible unitäre Darstellungen) 19; (Spektrum nicht selbstadjungierter Differentialoperatoren) 327.
- Nakahara, Isamu (Classe projective d'un ensemble) 284.
- Nakamura, Masahiro (Uniform space having volume) 409.
- — and Zirō Takeda (Radon-Nikodym theorem of traces) 349.
- — and Takasi Turumaru (Simple algebras) 349.
- Takashi, Kimio Ohno, Masao Kotani and Katsunori Hijikata (Interaction of π -electrons) 232.
- Tutō (Cooperative phenomena) 447.
- Nakano, Tadao s. Sh. Minami 227.
- Nakaoka, Minoru (Exact sequences $\sum_p (K, L)$) 414; (Mappings of a complex) 414.
- Nambu, Yoichiro (Lagrangian formalism) 446.
- Namiki, M. and Y. Suzuki (Corpuscular aspect) 224.
- Nardini, Renate (Magneto-dinamica dei fluidi compressibili) 205; (Onde magneto-idrodinamiche) 206.
- Nash, John (Algebraic manifolds) 385.
- J. P. s. R. E. Meagher 104.
- Natucci, A. (Leonardo geometra) 242; (Principio d'induzione) 291.
- Navarro Sagrista, Sebastian (Pearson-Kurven) 108.
- Néel, Louis (Antiferromagnetism) 238.
- Negri, Domenico (Determinante) 148.
- Nehari, Zeev (Conformal mapping) 315.
- Neilson, Donald O. s. H. Ashley 190.
- Nelipa, N. F. („Leuchtendes“ Elektron) 444.
- Néron, A. (Base pour les diviseurs) 146.
- Nevanlinna, Rolf (Hilbertscher Raum) 88.
- Newlands, Margery (Disturbance in elastic medium) 187.
- Newman, M. H. A. (Pathlength and linear measure) 287.
- Niße, V. (Surfaces strophoidales) 141.
- Nickel, K. (Tragflügelsysteme) 189.
- Niehurs, Heinz (Relationen zwischen den Werten einer „Größe“) 6.
- Nielsen, Jakob (Diskontinuierliche Gruppen) 20; (Rationale Mechanik. III.) 427.
- Nikitina, V. N. (Magnetisierung eines Stabes) 206.
- Nikodým, Otton Martin s. W. D. Berg 86.
- Nikol'skij, S. M. (Approximation differenzierbarer Funktionen) 298.
- Nishijima, Kazuhiko (Lagrangian formalism) 221.
- — s. Sh. Machida 452.
- — s. Sh. Minami 227.
- Nishimura, Jun and Koichi Kamata (Cascade showers. I.) 230.
- Nishiyama, Toshiyuki (Quantum theory of boson assemblies. I.) 447.
- Nisida, Tosio (Inverse function of Poisson process) 112.
- Nitsche, Joachim (Bestimmung der Flächen) 388.
- — s. Johannes Nitsche 80.
- Johannes und Joachim Nitsche (Randwertproblem) 80.
- Nobuhara, Tetsurō and Tamao Nagai (Finsler spaces) 159.
- Noguchi, Hiroshi (Mappings on 2-spheres) 417.
- Nollet, Louis (Construction des anneaux) 25; (Courbes quasi irréductibles) 146.
- Norden, A. P. (Komplexe affine Ebene) 137.
- — — und M. E. Cypkin (Regelflächen und Kurven) 398.
- Nordon, Jean (Équation différentielle) 322.
- Noto, Silvia (Equazioni differenziali) 64.
- Obálth, Richard** (Unmögliche diophantische Gleichungen) 29.
- Obreanu, Filip (Théorème de Baire) 348.
- Obrechhoff (Obreškov), N. (Descartesscher Satz über imaginäre Wurzeln) 11.
- Occhieppo, Konradin Ferrari d' s. Ferrari d'Occhieppo, Konradin 459.
- Oettinger, Anthony G. (Digital computer) 358.
- Ohira, Keishirō (Abstract Euclidean spaces) 347.
- Ohkubo, Takeo (Contact transformations) 402.
- Ohno, Kimio s. T. Nakamura 232.
- Okamoto, Masashi (Non-parametric test) 367; (Test of goodness of fit) 368.
- Okayama, Taisuke (Statistics) 199.
- Okonogi, Hisaichirō s. Sh. Minami 227.
- Olbert, Stanislaw (Multiple scattering. I.) 452.
- Olejník, O. A. (Gleichungen vom elliptischen Typus) 78.
- Olekiewicz, M. (Expected values in random sequences) 359; (Table of Student's t -distribution)

- 359; (Estimates of the mean) 368.
- Olevskij, M. N. (Riemannsche Funktion) 75.
- Oliveri, E. (Moto piano di un punto) 419.
- Ollendorff, Franz (Magnetische Felder) 436.
- Olsson, P. O. (Differential equation for phase shifts) 228.
- Ono, Akimasa (Strain in tube-wall) 425.
- Akira s. W. Sibagaki 340.
- Syû (Mechanics of phase transition) 200.
- — s. H. Mori 434.
- Orihara, Masae and Kazô Tsuji (Measures) 285.
- Orlicz, W. s. A. Alexiewicz 352.
- Ostrowski, A. M. (Distribution function of sums of n variables) 110; (Linear interpolation) 359.
- Oswatitsch, Klaus (Gasdynamik) 193.
- Ott, K. (Zahlen- oder Größengleichung?) 248.
- Ottestad, Per (Variance of percentage fractions) 365.
- Owens, O. G. (Homogeneous Dirichlet problem) 333.
- Ozawa, Mitsuru (Riemann surfaces) 318.
- — s. Y. Komatu 317.
- Paatero, V.** (Konforme Abbildung mehrblättriger Gebiete) 58.
- Pachale, Helmut (Biharmolisches Randwertproblem) 80.
- Paige, L. J. s. P. J. Kelly 133.
- Pais, A. and R. Jost (Charge conjugation) 447.
- Pajares, Emilio (Bahnstimmung von Doppelsternen) 459.
- Pál, Sándor (Diffusionsprobleme) 336.
- Paleček, E. M. (Angenäherte Integration) 177.
- Pandya, S. P. s. R. C. Majumdar 220.
- Panov, D. Ju. (Rechenstab) 103.
- Papy, Georges (Algèbres de Grassmann) 265.
- Paquet, Henriette (Couples de surfaces) 397.
- Parmenter, R. H. (Electronic energy bands) 236.
- Parodi, Maurice (Équations intégrales) 83; (Transformation de Laplace) 97.
- Paterson, M. S. (X-ray diffraction) 236.
- Patterson, E. M. (Ricci-current spaces) 156.
- — — and A. G. Walker (Riemann extensions) 156.
- Pavlov, P. P. (Sylowsche p -Untergruppen) 256.
- Payne, L. E. (Axially symmetric flow) 190.
- — — and Alexander Weinstein (Capacity) 81.
- Pedersen, Flemming P. (Spaces with negative curvature) 405.
- Pedoe, D. s. W. V. D. Hodge 145.
- Peierls, R. E. (Commutation laws) 446.
- Peremans, W. s. H. J. A. Duparc 249, 297.
- Perfect, Hazel (Matrices with positive elements) 9.
- Perron, Oskar (Verteilung der quadratischen Reste) 30.
- Persico, E. (Resister network for integration) 103.
- Péter, Róza (Transfinite Rekursionen) 247.
- Petersen, Richard (Laplace-transformation) 62.
- — — and Helge Skovgaard (Equiconvergence theorem for Laguerre series) 302.
- Petiau, Gérard (Équations d'ondes) 445.
- Petrescu, St. (Espaces à connexion projective P_2) 403.
- Petriščev, P. P. (Elastoplastische Deformationen) 183.
- Petrov, A. Z. (Gravitationsfelder) 399.
- Peyovitch, T.
- $$\left(\int_x^\infty dx \int_x^\infty dx \dots \int_x^\infty f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^\infty (t-x)^{n-1} f(t) dt \right)$$
- 290.
- Philip, G. C. and W. I. S. Robson (Group pension schemes) 126.
- Phythian, J. E. (Motions of a body through a gas) 428.
- Picone, Mauro (Convergenza uniforme) 39; (Interpolation) 299.
- Pikus, D. L. (Isoperimetrisches Problem) 166.
- Pini, Bruno (Problema di valori al contorno) 177.
- Pipping, Nils (Geometrische Miniaturen) 134; (Euklidischer Algorithmus) 269.
- Pizzetti, Ernesto (Dalle proporzioni alle progressioni) 122.
- Plans, Antonio (Invarianten quadratischer Formen) 138; (Dimensionsapproximation) 412.
- Pleijel, Åke (Membranes vibrantes) 80; (Theorem of Carleman) 296.
- Plessis, Nicolaas du (Fractional integrals) 38.
- Plunkett, R. (Convergence of relaxation methods) 355.
- Pogorelov, A. V. (Regularität einer konvexen Fläche) 405.
- Pohlack, Hubert (Umkehrbarkeit der Lichtwege) 210.
- Polya, Georges (Domaines symétriques) 168.
- Poorte, Glen E. (MARK III calculator) 104.
- Popoff, Kyrille (Processus irréversibles. II.) 197.
- Popova, Hélène (Vecteurs dérivés des quasi-groupes) 12; (Logarithmiques des quasi-groupes) 12; (Logarithmétique d'une boucle) 12.
- Popovici, Constantin (Équations intégro-fonctionnelles) 342.
- Pöschl, Theodor (Ecuazione di Darboux-Riccati) 150.
- Potts, R. B. (Order-disorder transformations) 456.
- — — s. H. Messel 231.
- Prachar, K. (Additive Zahlentheorie) 276.
- Prakash, Prem (Steady flow superposable on constant velocity) 192.
- Prandtl, Ludwig (Fluid dynamics) 428.
- Predonzan, Arno (Monoidi V_{k-1}^n di S_k) 143.
- Presper, J. s. J. Eckert jr. 104.
- Price, P. J. (Compressibilità) 433.
- Pucci, Carlo (Problema di Cauchy. I. II.) 74; (Problema al contorno) 336.
- Pugh, Emerson M., R. J. Eichberger and Norman

- Rostoker (Jet formation) 431.
- Puig Adam, P. (Kettenbruchalgorithmus) 289.
- Putnam, C. R. (Unboundedness of spectrum) 324; (Quantum-mechanical operators) 441.
- Quine, W. V. (Tarski's theory of truth) 245; (Simplifying truth functions) 245. — — — s. J. T. Clark 244.
- Qvist, Bertil s. P. Kustaanheimo 267.
- Rabinovič, Ju. L. (Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte linearer Integralgleichungen) 345.
- Rado, R. s. P. Erdős 282. — T. s. T. Minagawa 153.
- Radojić, M. (Singularités essentielles) 63.
- Rådström, Hans (Topological groups) 257.
- Raduan, F. Botella s. Botella Raduan, F. 398.
- Radziszewski, Constantin (Figures inscrites dans figures convexes) 166.
- Raher, W. (Krumme Stäbe) 422.
- Raj, Des (Parameters of normal populations) 120.
- Rajagopal, C. T. (Convergenza delle serie) 40.
- Ramakrishnan, Alladi (Janossy's model of nucleon cascade) 231.
- Randolph, John F. (Calculus) 36.
- Rangaswami Aiyer, K. (System of circles) 134.
- Rao, P. Sambasiva (Series of eigenfunctions) 339.
- Rasulov, M. L. (Rechnerische Lösungsmethode) 332.
- Ravenhall, D. G. s. L. Wolfenstein 448.
- Raychaudhuri, Amal Kumar (Radiation sphere) 215.
- Raynor, G. V. (Band structure of metals) 457.
- Reckling, K. A. (Stabilität erzwingener harmonischer Schwingungen) 186.
- Rédei, L. (Determinantenteiler) 262. — — und Jenő Szép (Endliche nilpotente Gruppen) 255.
- Reeb, Georges (Trajectoires des systèmes dynamiques) 329.
- Reichel, Georg (Transformationstheorie der Matrizen) 250.
- Reifenberg, E. R. (Parameetric surfaces. IV.) 38.
- Reiner, I. s. L. K. Hua 257.
- Reiter, H. J. (Harmonic analysis) 92.
- Rényi, A. (Probability distributions) 108. — Kató (Verteilung von Zahlen) 277.
- Resch, Daniel (Temperature bounds) 434.
- Reuter, G. E. H. (Boundedness theorems. II.) 69.
- Rham, Georges de (Espace de Riemann) 157.
- Ricci, Giovanni (Numeri primi consecutivi) 277.
- Richard, P.-J. (Tables de mortalité) 124.
- Richter, Hans (Wahrscheinlichkeitstheorie) 359.
- Ridder, J. (Struktur der Mathematik) 248.
- Rideau, G. s. T. Kahan 82.
- Riegels, F. (Potentialströmungen) 190.
- Riesz, M. (Mesure de Lebesgue) 286.
- Rijkers, H. (Dette latente) 126.
- Ríos, Sixto (Wahrscheinlichkeitsgesetze) 361; (Operative Forschung) 371. — — s. S. S. Wilks 364.
- Rivier, W. (Jeux de combinaison) 8.
- Rivlin, R. S. s. J. E. Adkins 182.
- Riz, P. M. (Wellengleichung) 338.
- Rizza, G. B. (Formula integrale di Cauchy) 61.
- Roberts, S. C. s. E. A. Milne 243.
- Robson, W. I. S. s. G. C. Philip 126.
- Rocard, Yves (Phénomènes irréversibles) 432.
- Rodosskij, K. A. (č-Funktion) 277; ($L(1, \gamma)$) 277.
- Rodriguez-Salinas, Baltasar (Gezeiten) 459.
- Rogosinski, Werner W. (Volume and integral) 36.
- Rojien, J. P. van und A. de Hullu (Sterbetafel) 124.
- Roquette, Peter (Charakterisierung endlicher Gruppe) 19.
- Rosati, Mario (Funzioni abeliane pari) 147.
- Rose, Alan (Eight-valued geometry) 5; (Computational logic) 244; (Post's *m*-valued calculus) 244; (Lukasiewicz propositional calculus) 244; (Ensemble de fonctions primitives) 245.
- Rosen, Edward (Distance between earth and moon) 242.
- Rosenblatt, M. (Mises statistic) 360.
- Rosenbloom, P. C. (Mass distributions) 80; (Problèmes extrémaux. II.) 81.
- Rosenzweig, Norbert (Odd terms in the iron group) 233.
- Rosser, J. Barkley (Axiom of infinity) 5.
- Rostoker, Norman s. E. M. Pugh 431.
- Rothe, E. H. (Leray-Schauder index) 97.
- Roy, René (Élasticités de la demande) 129.
- Royden, H. L. s. L. V. Ahlfors 59.
- Royo, José s. S. S. Wilks 364.
- Royster, W. C. (Convexity of analytic functions) 57.
- Rozenfel'd, B. A. (Mannigfaltigkeit der Unterräume) 376. — — — und Z. A. Skopeč (Cremona-Transformationen) 378.
- Rozet, O. (Congruences de droites) 397. — — s. L. Godeaux 136.
- Rubinowicz, A. (Fields) 445.
- Rubinstein, L. I. (Verdampfen flüssiger Gemische) 201.
- Rueff, M. s. G. Grimm 374.
- Rutickij, Ja. B. s. M. A. Krasnosel'skij 94.
- Rutledge, W. A. s. E. Ikenberry 53.
- Rybin, G. F. (Weltanschauung Ostrogradskijs) 243.
- Ryll-Nardzewski, C. s. E. Marczewski 286.
- Ryser, H. J. (Combinatorial investigations) 7.
- Ruy Gomes, Luís s. Gomes, Luís Ruy 286.
- Ryszelberghe, Pierre van (Production minimum d'entropie) 432.
- Rzechina, N. F. (Lokale Hypertorsen) 402.
- Rzewuski, Jan (Perturbation theory) 222.
- Sackmann, Louis A. (Résultats d'expériences) 122.

- Sagawa, Akira (Ausnahmegebiete) 56.
- Sagrista, Sebastian Navarro s. Navarro Sagrista, Sebastian 108.
- Saito, Shiroshi (Retracts) 410.
- Sakai, Shoichiro (Mautner's decomposition) 350.
- Saks, Stanisław and Antoni Zygmund (Analytic functions) 308.
- Salenius, T. (Kürzeste Linien in Kugelschalenräumen) 399.
- Salinas, Baltasar R.- (Formeln von Taylor) 292.
- Salpeter, E. E. (Mass corrections) 225.
- Saltykow, N. (Dernier multiplicateur) 72; (Théorie des équations aux dérivées partielles) 73; (Système d'équations différentielles ordinaires) 73; (Équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre) 73; (Invariants différentiels) 73; (Équations aux dérivées partielles du second ordre) 73; (Domaine d'existence des intégrales) 74; (Elie Cartan) 243; (Équations aux différentielles totales) 330.
- Sambasiva Rao, P. s. Rao, P. Sambasiva 339.
- Sambo, Alberto (Derivazione sotto il segno di integrale) 39.
- Sampson, J. H. (Automorphic varieties) 64.
- San Juan, Ricardo (Somme des classes quasi-analytiques) 293.
- Sangermano, Cosimo (Corrispondenze puntuali) 393.
- Santaló, Luis A. (Integralgeometrie) 168.
- Šapiro, G. S. (Elasto-plastische Wellen) 186.
- Sard, Arthur (Representations of remainders) 300; (Remainders: several variables) 300; (Remainders as integrals) 300; (Approximation and variance) 355.
- Sarginson, K. s. D. K. C. MacDonald 458.
- Sario, Leo (Surfaces de Riemann) 318; (Extremal method on Riemann surfaces) 319.
- Sasaki, Muneo (Photodisintegration) 227.
- Sasaki, Shigeo (Tadahiko Kubota) 243.
- Yasuharu (Multivalent functions) 57.
- Sato, Shoji (Lattice homomorphisms. I.) 14.
- Satō, Tokui (Équations intégrales de Volterra) 344.
- Sauvenier-Goffin (Manuscrits de H. Bosmans) 243.
- Saxer, Walter (Domaines de normalité) 320.
- Ššeglov, M. P. (Cesarosche Mittel) 41; (Satz von Hardy-Landau-Vijayaraghavan) 41.
- Schaefer, H. (Technische Eigenwertprobleme) 185.
- Schafroth, M. R. (Interaction and Meissner-Ochsenfeld effect) 237.
- Scheidegger, Adrian E. (Contraction hypothesis of orogenesis) 239.
- Scherk, Peter (Convex bodies) 32.
- Scherrer, W. (Metrisches Feld) 445.
- Schiff, L. I. (Nonlinear meson theory. I. II. III.) 449.
- Schirmer, H. (Biegewellen) 185.
- Schlomka, Teodor (Welttensoren) 214.
- Schlüter, Arnulf (Schwingungsformen eines Plasmas) 454; (Plasma im Magnetfeld) 455.
- Schmeidler, F. (Dreikörperproblem) 421.
- Werner (Hamel-Feier) 243.
- Schmidt, Adam (Anfangswertproblem) 75.
- Olaf (Risings and settings) 241.
- Schneidt, Max (Endliche Gleichungen einer Fläche) 388.
- Schönberg, M. s. M. Huybrechts 228.
- Schöneborn, Heinz (Linearformenmoduln. I. II.) 260.
- Schrödinger, Erwin (Relativistic Fourier reciprocity) 444.
- Schröter, Karl (Mengen ohne Basis) 3.
- Schult, Veryl s. W. W. Hart 374.
- Schumann, W. O. (Sehr lange elektrische Wellen) 438, 439.
- Schwartz, Laurent (Noyaux) 351.
- Schwarz, Štefan (Semi-groups having a kernel) 253.
- Schwarzl, F. s. A. J. Staverman 197.
- Schwerdtfeger, Hans (Matrices permutables) 10.
- Scoins, H. I. (Integral equation of Green) 234.
- Scorza Toso, Annamaria (Funzione composta) 291.
- Scott, D. B. (Algebraic surfaces) 380.
- E. J. s. St. Saks 308.
- J. F. (René Descartes) 242.
- Sears, D. B. (Differential equation) 64.
- Seely, Fred B. and James O. Smith (Mechanics of materials) 421.
- Segre, Beniamino (Corpi risolventi) 272.
- Seidel, W. s. A. Y. Khinchin 272.
- Seki, Setsuya (Change of variables) 38.
- Selberg, Atle (Primenumber-theory) 31.
- Selmer, Ernst S. (Dixon elliptic functions) 315.
- Šemin, Ferruh (Darboux lines) 387.
- Sen, Hari K. (Solar „enhanced radiation“) 233.
- Serre, Jean-Pierre (Groupes d'Eilenberg-MacLane) 414.
- s. H. Cartan 413.
- Sestini, G. (Pietro Teofilo) 243; (Problemi di Stefan) 434.
- Seth, B. R. (Elastic-plastic torsion) 184.
- Severn, R. T. s. D. N. de G. Allen 202.
- Shah, S. M. (Eigenfunction expansions) 301.
- — — and Mohd. Ishaq (Quasi-monotone series) 297.
- Shannon, C. E. (Information theory) 364.
- Shapiro, George (Ramanujan's τ -function) 31.
- Shaw, R. H. (Theorem of Frobenius) 15.
- Shaw-Kwei, Moh (Quantification) 246.
- Sheldon, John W. and Liston Tatum (Card-programmed calculator) 105.
- Shellard, G. D. (Product of random variables) 368.
- Shen, Shan-Fu (Viscosity effect) 196.
- Shepherdson, J. C. (Models for set theory. II.) 281.

- Sherman, S. (Stochastic matrices) 250.
- Shiffman, Max (Subsonic flows) 193.
- Shimada, Nobuo and Hiroshi Uehara (Classification of mappings) 415.
- Shimamoto, T. s. R. C. Bose 116.
- Shirota, Taira (Theorem of I. Kaplansky) 89.
- Sibagaki, W. (Gammafunktion mit Tafel) 305.
- — and Akira Ono (Harmonic functions) 340.
- Siegel, K. M., J. W. Crispin, R. E. Kleinman and H. E. Hunter (Zeros of $P'_{n_i}(x_0)$) 48.
- Sierpiński, Waclaw (Diviseurs de types ordinaux) 283.
- Sigalov, A. G. (Probleme der Variationsrechnung) 81.
- Signorini, Antonio (Pubblicazioni) 243; (Meccanica razionale) 418.
- Sikorski, R. (Generalized limits and means) 348.
- Šilov, G. E. (Doppelt-periodische vektorglatte Funktionen) 386.
- Simonart, Fernand (Déplacements) 137.
- Sips, Robert (Équation intégrale des fonctions de Mathieu) 307.
- Širokov, A. P. (A -Räume) 401.
- Skolem, Th. (Congruence modulo p) 29; (Irrationality) 33.
- Skopec, Z. A. s. B. A. Rozenfeld 378.
- Skovgaard, Helge s. R. Petersen 302.
- Slater, L. J. (Hypergeometric transformations) 51; (Integral of hypergeometric type) 51.
- Slichter, L. B. (Interpretation problem) 206.
- Slobodjanskij, M. G. (Fehler bei der Lösung linearer Probleme) 355.
- Smith, James O. s. F. B. Seely 421.
- Šmuškevič, I. M. s. B. L. Ioffe 227.
- Snell, J. L. (Martingale system theorems) 114.
- Snow, C. (Hypergeometric and Legendre functions) 47.
- Sobolev, S. L. (Differenzengleichung) 72.
- Sobolev, V. I. (Selbstadjungierte Operatoren) 353.
- Socio, Marialuisa de (Campo elettromagnetico) 205.
- Sokolov, A. A. (Quantentheorie des Gravitationsfeldes) 445.
- Ju. D. (Filtration) 431.
- Soljanik-Krassa, K. V. (Axialsymmetrisches Problem) 179.
- Sommer, Friedrich (Integralformeln) 61.
- Sommerfeld, A. (Theoretical physics. I.) 418.
- Sonnenschein, J. (Points de courbure nulle) 141.
- Spampinato, Nicolò (Falde bidimensionali) 377.
- Spencer, L. V. (Penetration and diffusion of X-rays) 237.
- Spiegel, M. R. (Random vibrations of a string) 426.
- Srinivasiengar, C. N. and B. N. Mukherjee (Quadric surface) 139.
- Srivastava, H. M. (k -function of Bateman and cylinder functions) 51.
- — — and A. M. Chak ($P_{r,k}(x)$ function) 51.
- R. S. L. (Method of summability) 41.
- Staff Computation Laboratory (Magnetic drum calculator) 104; (Tables of error function) 106.
- Stange, K. (Gütegrad von Mischungen) 119.
- Stanojević, Časlav V. (Set equations) 282.
- Staverman, A. J. and F. Schwarzl (Thermodynamics) 197; (Non-equilibrium thermodynamics) 197.
- Steenrod, N. E. (Cohomology classes) 413.
- Stephens, Kathleen M. (Orthotropic plane stress) 179.
- Stern, M. O. s. A. Sommerfeld 418.
- Steward, G. C. (Plane kinematics) 149.
- Stickland A. C. (Progress in Physics. XV.) 418.
- Stiefel, Eduard s. M. R. Hestenes 99.
- Stipanić, Ernest (Geometria del triangolo) 242.
- Stöhr, Alfred (Dynamisches Weltmodell. II.) 238.
- Stojakovic, Mirko (Matrices rectangulaires) 249.
- Štokalo, I. Z. (Ostrogradskijs Arbeiten) 243; (Klassen linearer Differentialgleichungen) 327.
- Stone, A. H. (Multicoherent spaces) 411.
- Stoppelli, Francesco (Fenomeni giroscopici) 174.
- Ströher, Wolfgang (Kreidekreis) 141; (Linienelement) 391.
- Stubban, J. O. s. V. Brun 272.
- Suchy, Kurt (Von Wellenoptik zur Strahlenoptik. I.) 207.
- Sugawara, Masao (Mass variation. I.) 205; (Magnetic moments of nucleons) 228.
- — and Sakae Minami (Bopp's unitary field theory. II.) 205.
- Sugiyama, Hiroshi (Σp_m^2 in probability distributions. I.) 360.
- Suguri, Tsuneo (Invariants in geometry of paths) 161; (Gauss and Codazzi equations) 399; (Normal coordinates) 399.
- Šul'gin, M. F. (Dynamische Gleichungen Čaplygins) 173.
- Šulikovskij, V. I. (Theorie der Netze) 401.
- Sun, Jenning T. (Frenet formulas) 403.
- Sunouchi, Gen-ichiro and Tamotsu Tsuchikura (Convergent integrals) 85.
- Haruo (Maximal Hilbert algebras) 349; (Plancherel formula) 350.
- Surányi, János (Classes finies d'ensembles) 283.
- Surinov, Ju. A. (Funktionalgleichungen der Wärmestrahlung) 203.
- Süss, W. (Kugeln und Affinsphären) 155.
- Šuvalova, Ė. Z. (Hyperkonvergenz) 309.
- Suzuki, Y. s. M. Namiki 224.
- Sverdrup, Erling (Life assurance mathematics) 124.
- Sydler, J.-P. (Conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens) 136.
- Sz.-Nagy, Béla (Séries de polynômes orthogonaux) 301; (Self-adjoint operators) 353.
- Gyula (Wertverteilung bei Polynomen) 251.

- Szabó, István (Belastete Kreisplatte) 179.
- Szász, Paul (Parallelwinkel) 132; (Hyperbolische Trigonometrie) 373.
- Szebehely, Victor G. (Problem of three bodies) 177.
- Szegő, G. (Hermitian forms) 42.
- Szele, T. s. L. Fuchs 263.
- Szép, Jenő (Einfache Gruppen) 254.
- — s. L. Rédei 255.
- Szűsz, Péter (Gleichverteilung) 280.
- Tables for the analysis of beta spectra** 231.
- of Bessel functions 359.
- — error functions 106.
- Tai, C. T. (Back-scattering) 212.
- Tajmanov, A. D. (Abbildungen topologischer Räume) 168.
- Takabayasi, Takehiko (Formulation of quantum mechanics) 218.
- Takahashi, Shuichi (Cohomology groups) 258.
- Takayanagi, Kazuo (Inelastic collision. II.) 453.
- Takeda, Kusuo (Surfaces of rectilinear congruence) 397.
- Zirò (Theorem of R. Palu de la Barrière) 93.
- — and Takasi Turumaru („Position p'' “) 348.
- — s. M. Nakamura 349.
- Takeno, Hyōitirō s. Y. Ueno 215.
- Takenouchi, Osamu (Maximal Hilbert algebras) 349.
- Taketa, Kiyosi (Metabelsche Gruppen. III.) 14.
- Takeuti, Gaisi (Ordinal numbers) 36.
- Tallqvist, Hj. (Örter gleicher Gesichtswinkel) 140; (Zwei Kreise) 141; (Gerade und Kreis) 141; (Örter bei Kegelschnitt) 141.
- Tambs Lyche, R. s. V. Brun 272.
- Tammi, Olli (Coefficients of schlicht functions) 310.
- Tamura, Jirō (Riemann surfaces) 59.
- Tanaka, Chuii (Dirichlet series. III. VII. VIII.) 54; (Laplace-transforms. XI. XII.) 84.
- Hajime s. Z. Tokuoaka 446.
- Tanifuji, Makoto s. T. Muto 450.
- Tanzi Cattabianchi, Luigi (Equazioni generalizzanti l'equazione di Bessel) 49.
- Tashiro, Yoshihiro (Dérivée de Lie) 148.
- Tatum, Liston s. J. W. Sheldon 105.
- Taussky, Olga and John Todd (Systems of equations. I. II.) 249.
- — s. T. S. Motzkin 9, 15.
- Tautz, Georg L. (Umkehrungsproblem elliptischer Differentialgleichungen. I. II.) 77, 78.
- Teissier, Marianne (Idéaux dans demi-groupes) 12.
- Tekinalp, Bekir (Conjugate beam method) 422.
- Temljakov, A. A. (Analytische Fortsetzung) 61.
- Temperley, N. N. V. (Statistical mechanics. II.) 198; (Landau and London-Tisza models) 455.
- Tenca, Luigi (Guido Grandi) 243; (Determinanti da una matrice) 249.
- Terpstra, T. J. (Konfidenzintervall) 368.
- Terracini, Alessandro (Superficie di S_3) 151; (Linee principali di superficie) 395.
- Terry, Milton E. (Rank order tests) 367.
- Tessman, Jack R. (Susceptibility of antiferromagnet) 238.
- Thalberg, Olaf M. („Conic involutions“) 377.
- Theil, H. (Economic microvariables) 370.
- Thimm, Walter (Ausgeartete meromorphe Abbildungen. I. II.) 62.
- Thirring, Walter E. (Meson-Gleichungen) 225.
- Thiry, Yves (Problème de Schwarzschild) 217.
- Thomas, J. M. (Linear differential equation) 322.
- L. H. (Relativistic dynamics) 445.
- Thompson, J. E. (Slide rule) 358.
- Thomsen, Poul (Mathematische Behandlung eines Spieles) 7.
- Thorne, C. J. s. L. C. Barrett 431.
- — — s. H. J. Fletcher 346.
- — — s. F. E. Maud 423.
- Thosar, Y. V. (Recurrence relations) 48.
- Thrall, R. M. (Galois connection) 23.
- Thullen, Peter (Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen) 61.
- Tibiletti, Cesarina (Geometria algebrica) 142.
- Tichonov, A. N. (Systeme von Differentialgleichungen) 71.
- Tiffen, R. (Elastic half-plane) 179; (Elastic problems) 179.
- Tinbergen, J. (Balance of payments equilibrium) 128.
- Tits, J. (Groupes projectifs) 257.
- Titus, C. J. and G. S. Young (Interiority) 417.
- Tobin, James (Theory of rationing) 130.
- Toda, Hiroshi (Homotopy groups of spheres) 415, 416.
- Todd, John s. O. Taussky 249.
- Toft, L. and A. D. D. MacKay (Practical mathematics. II.) 355.
- Tôki, Yukinari (Riemann surfaces) 59.
- Tokuoka, Zensuke and Hajime Tanaka (Particle formalism and wave formalism of meson) 446.
- Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot (First law of thermodynamics) 196.
- Tomić, M. (Trigonometrische Polynome) 43.
- Tomita, Minoru (Measure theory) 285.
- Tomonaga, Yasurō (Betti numbers) 157.
- Tonnelat, Marie-Antoinette (Théorie unitaire des champs) 218.
- Tonolo, Angelo (Problema di Darboux) 389.
- Tonowoka, Keinosuke (Cartan space) 400.
- Tornheim, Leonard (Clifford algebras) 265; (Normed fields) 269.
- Tortrat, M. A. (Lois convexes de probabilité) 108.
- Toscano, L. (Triangles po-daires orthogonaux) 373; (Triangle sur le cercle de Brocard. I.) 373.
- Toso, Annamaria Scorza s. Scorza Toso, Annamaria 291.

- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 166.
- Tôyama, Hiraku (Determinant equation) 249.
- Tricomi, Francesco G. (Distribuzione statistica) 122; (Nuova funzione) 123.
- Truesdell, Clifford (Velocità massima) 188; (Viscosity of fluids) 433.
- Tsuboko, Matsuji (Space of projective connection) 160.
- Tsuchikura, Tamotsu s. G.-i. Sunouchi 85.
- Tsuji, Kazô s. M. Orihara 285.
- Masatsugu (Numbers mod. 1) 33; (Bloch's theorem) 56; (Potential theory) 79; (Subharmonic functions) 79; (Potential function) 320.
- Tulcea, C. T. Ionescu s. Ionescu Tulcea, C. T. 286.
- T'ung, Ch'in-mo and Hsien-yü Hsü (Inequalities of Turán type) 306.
- Tung, Huai-Yuen (Stieltjes integral) 288.
- Turán, Paul (Zeta-function of Riemann) 54; (Algèbre fonctionnelle) 252; (Trigonometrical sum) 304; (Lacunary power-series) 311.
- Turumaru, Takasi s. M. Nakamura 349.
- — s. Z. Takeda 348.
- Tweedie, M. C. K. (Estimation of parameters) 121.
- Twiss, R. Q. (Electron-ion streams) 233.
- Überall, Herbert (Energieabhängigkeit der Phasenverschiebung) 451.
- Udeschini, Paolo (Campo elettromagnetico) 204.
- Udgaonkar, B. M. (Relativistic field quantization) 446.
- Uehara, Hiroshi (Homotopy type problems of polyhedra. I. II.) 170.
- — s. N. Shimada 415.
- Ueno, Yoshio and Hyôitirô Takeno (Equivalent observers) 215.
- Ufljand, Ja. S. (Anwendung der Mellintransformation) 181.
- Úlehla, Ivan (Particles with maximum spin. I.) 445.
- Uhler, Horace S. (Mersenne numbers) 30.
- Ullman, J. L. (Theorem of Frobenius) 345.
- Umegaki, Hisaharu (Operator algebra) 349.
- Umezawa, Minoru (*j-j* coupling shell model) 230.
- Toshio (Multivalency) 313; (Multivalent functions) 313; (Analytic functions star-like of order p) 314.
- Underwood, R. S. (Functions of n variables) 142.
- Uranisi, Hisao (Statistical inferences) 366.
- Urban, P. (W.K.B.-Verfahren) 356.
- — s. E. Ledinegg 453.
- Utiyama, R. s. T. Dodo 221.
- Vaccaro, Giuseppe (Singularità superficiali. I.) 145.
- Vadnal, Alojzij (Double logarithme) 297.
- Vajnberg, M. M. (Differentialrechnung in linearen Räumen) 93.
- Válcovici, V. (Mouvement tourbillonnaire) 428.
- Valk, Ir J. (Solid angle Ω) 291.
- Vandiver, H. S. s. O. B. Faircloth 29.
- Vaona, Guido (Varietà quasi-asintotiche) 395; (Varietà quasi-asintotica) 396.
- Varma, R. S. (Multivariate distribution) 115.
- Vasilache, Sergiu (Problème de Neumann) 338; (Équations intégro-différentielles) 342.
- Vasil'eva, A. B. (Differentialgleichungen) 71.
- Vaughan, D. C. (Relaxation methods) 103.
- Veen, H. J. van (Nomographie) 358.
- Vekua, N. P. (Carlemansche Randwertaufgabe) 315.
- I. N. (Systeme von Differentialgleichungen) 337.
- Velghe, A. (Nébuleuses obscures) 238.
- Verblunsky, S. (Circumradius of a set) 165.
- Vest, M. L. (Cremona transformations) 378.
- Vidal Abascal, E. (Geometrie und geometrischer Raum) 398; (Integralgeometrie) 408.
- Vietoris, L. (Vierscheitelsatz der ebenen Kurven) 150.
- Vigier, Jean-Pierre (Théorie de l'onde-pilote) 219; (Mécanique ondulatoire) 220.
- Viguier, Gabriel (Écoulement incompressible) 192.
- Vilenkin, N. Ja. (Orthogonale Kerne) 83.
- Villa, M. (Transformations ponctuelles) 142; (Varietà quasi-asintotiche) 395.
- Vinogradov, M. I. (Abhandlungen) 31.
- Vincze, István (Schwerlinie einer Kurve) 406.
- Vineyard, George H. (Multiple small angle scattering) 439.
- Virtanen, K. I. (Extremalfunktionen) 319.
- Višik, M. I. (Elliptische Differentialgleichungen) 337.
- Viswanathan, K. S. (Rectangular lattice) 235.
- Volkmann, Bodo (Mengen natürlicher Zahlen) 34.
- Volpato, Mario (Equazione alle derivate parziali) 75; (Corpi di massa variabile) 174.
- Voss, K. s. H. Hopf 153.
- Vrănceanu, G. (Espaces à connexion projective) 160.
- Vrkljan, V. S. (De Brogliesche Theorie) 446.
- Wada, Hidekazu (Mappings from complexes) 169; (Sätze von Hopf und Bruschlinsky) 169.
- Waddell, Mathews C. (Regular rings) 261.
- Waelbroeck, L. (Surcorps du corps des nombres réels) 268.
- Waerden, B. L. van der (Order tests) 118.
- Wait, James R. (Electromagnetic fields) 207.
- Walisz, (Val'fis), A. Z. (Darstellung als Summe von Quadraten) 275.
- Walker, A. G. s. E. M. Patterson 156.
- A. W. (Differential equation of a conic) 150.
- Wallis, A. Allen s. W. H. Kruskal 117.
- Walsh, J. L. (Approximation on a curve) 52.
- Wang, Hsien-chung (Two-point homogeneous spaces) 405; (Transformation groups) 412.
- Wannier, Gregory H. (Motion of ions. II.) 233.
- Ward, G. N. (Vector differential equations. I.) 74; (II.) 193.
- J. C. s. M. Kac 458.

- Wasow, W. R. (Inversion of matrices) 113.
- Wassermann, G. D. (Heat conduction in solids) 76.
- Weaver, W. s. M. Mason 435.
- Weber, C. (Torsionsverwölbung) 181.
- Weidenhammer, F. (Biegeschwingungen) 185.
- Weil, André (Jacobi sums) 270; (Picard varieties) 383.
- Weinberger, H. F. (Optimum problem) 354.
- Weiner, James R. s. J. Eckert jr. 104.
- Weinstein, Alexander s. L. E. Payne 81.
- Weizsäcker, C. F. v. (Quadratische Metrik) 7.
- Welsh, H. Frazer s. J. Eckert jr. 104.
- Wendel, J. G. s. M. Hausner 87.
- Wendt, H. (Jungfernquelle) 191.
- Werner, Jack s. Ch.-Ch. Chang 431.
- Westergaard, H. M. (Elasticity and plasticity) 421.
- Weston, J. D. (Bounds of a bilinear form) 87.
- Weyl, Hermann (Natürliche Randwertaufgaben) 210.
- Whipple, R. T. P. s. J. Heading 240.
- Whitehead, George W. (Fiber spaces and Eilenberg homology groups) 413.
- Whittle, P. (Factor analysis) 116; (Models of population) 123.
- Whyburn, G. T. (Mappings) 411.
- W. M. s. A. K. Hinds 329.
- Whyte, L. L. (Points on a sphere) 136.
- Wick, G. C. s. J. Ashkin 451.
- — — s. G. F. Chew 450.
- Wigner, E. P. (Elementary transcendents) 53; (Poles and residues for an R function) 314; (Quantenmechanische Operatoren) 441.
- Wilder, R. L. (Mathematics) 248.
- Wilks, S. S. (Statistische Analyse) 364.
- Wilson, A. J. C. s. J. N. Eastabrook 457.
- Winogradski, Judith (Densités de valeur moyenne) 444; (Familles d'opérateurs) 444.
- Wintner, Aurel s. Ph. Hartman 67, 177, 333.
- Wiśniewski, F. J. (Diffraction des particules sur un cristal) 457.
- Wit, G. W. de (Pearsons χ -Kriterium) 125.
- Witt, Bryce Seligman de (Point transformations) 441.
- Ernst (Struktur des Gruppenringes) 263.
- Wittmeyer, H. (Torsioneigenfrequenzen) 186.
- Wold, Herman (Demand analysis) 129.
- Woldringh, H. H. (Flow of He II) 455.
- Wolfenstein, L. and D. G. Ravenhall (Invariance under charge conjugation) 448.
- Wolfowitz, J. (Consistent estimators) 369.
- — s. A. Dvoretzky 371.
- Wolkowitsch, D. (Moment d'inertie) 138.
- Wong, Yung-chow (Curvature theory) 151.
- Woodbury, M. A. s. C. L. Dolph 112.
- Wright, G. H. von (Modal logic) 244.
- Wunderlich, Walter (Toruloxodrome) 173.
- Wünsche, Günther (Sequentialetest-Planung) 103.
- Wylly, Alexander (Oscillating supersonic airfoil) 195.
- Yamada, Eiji s. Sh. Minami 227.
- Yamaguti, Masaya s. S. Mizohata 68.
- Yamamoto, Koichi (7×7 latin squares) 8.
- Sumiyasu (Coefficient of variation) 369.
- Yang, C. N. and T. D. Lee (State and phase transitions. I.) 433.
- — — s. T. D. Lee 434.
- K. s. S. Bochner 158.
- Yano, Kentaro and Hitosi Hiramatsu (Projective geometry of K -spreads) 161.
- Yeh, Hsuan (Subsonic potential flows) 195.
- Yennie, D. R. (Nonlocal field theory) 449; (Quantum corrections) 449.
- Yevick, George J. (Finite-sized electron. I.) 221.
- Ylitch-Daiovitch, Militsa (Géométrie projective) 375.
- Yntema, L. (Demographic analysis) 123.
- Yosida, Kōsaku (Diffusion equations) 113; (Cauchy's problem) 334; (Elliptic differential operator) 339.
- Young, G. S. s. C. J. Titus 417.
- jr., Gail S. („Statistical decision functions“) 365.
- Yu, Yi-Yuan (Disk supported by forces) 180; (Gravitational stresses) 182.
- Yūjōbō, Zuiman (Ahlfors's theory) 317; (Subharmonic functions) 341.
- Zaanen, A. C. (Continuous kernels) 344.
- Zacher, Giovanni (Gruppi finiti) 15.
- Zadeh, Lotfi A. (Filtration of signals) 201.
- Zahorski, Zygmunt (Courbes) 164.
- Žak, I. E. (Riemann-Summierbarkeit) 296.
- Zamansky, Marc (Séries divergentes) 203, 294.
- — s. H. Delange 294.
- Zanaboni, O. (Flessione nelle barre curve) 422.
- Zarantonello, Eduardo H. (Trigonometric interpolation) 43.
- Zavalo, S. T. (Freie Gruppen mit Operatoren) 254.
- Ždanov, G. S. s. Z. V. Zvonkova 456.
- Zemmer jr., Joseph L. (Subalgebras) 25.
- Zeuli, Tino (Sistemi dinamici corrispondenti) 174; (Onde elettromagnetiche critiche) 208; (Sistemi dinamici corrispondenti) 420.
- Zhang, Ming-Yng (Überdeckungssatz) 317.
- Ziegler, Hans (Konservatives System) 176; (Mechanik. III.) 176; (Kritische Drehzahlen) 187.
- Zonneveld, J. A. and J. Berghuis (Asymptotic expansions) 301.
- Zulauf, Achim (Zerfallung natürlicher Zahlen) 276; (Satz von Goldbach-Vinogradov) 276.
- Zvonkova, Z. V. und G. S. Ždanov (Vorzeichen struktureller Amplituden) 456.
- Zwirner, Giuseppe (Problema di Nicoletti) 69; ($\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y})$) 75.
- Zygmund, Antoni s. St. Saks 308.